

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчётно-графических работ по сопротивлению материалов, основам строительной механики (для специальностей ВиВ, ТГВ и СТ) и теории упругости и пластичности.

Пособие состоит из 3-х частей и 13 глав по темам расчётно-графических работ. Каждая глава содержит краткое изложение теории, где приведены основные формулы и уравнения, и примеры решения задач, аналогичных задачам в расчётно-графических работах.

В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней – уголков, двутавров и швеллеров.

В первой части пособия приведены главы, соответствующие учебному материалу 1-го семестра изучения сопротивления материалов – геометрические характеристики поперечных сечений стержней, центральное растяжение и сжатие прямых стержней, внутренние усилия в балках и плоских стержневых системах при изгибе, напряжения в балках при изгибе и расчеты на прочность.

Пособие написано авторским коллективом кафедры сопротивления материалов МГСУ. Большую помощь при написании и подготовке к изданию учебного пособия оказали авторам коллеги по кафедре – профессор О.В.Мкртычев, доценты А.Я.Астахова, А.В. Ильяшенко и А.Г.Паушкин.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила – P , площадь поперечного сечения стержня – F . Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Е д и н и ц а		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1\text{Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$ $1\text{кН} \approx 0,1\text{тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1\text{Н/м} \approx 0,1\text{кгс/м}$ $1\text{кН/м} \approx 0,1\text{тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	$1\text{Нм} \approx 0,1\text{кгс}\cdot\text{м}$ $1\text{кНм} \approx 0,1\text{тс}\cdot\text{м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1\text{Па} \approx 0,1\text{кгс/м}^2$ $1\text{МПа} \approx 10\text{кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

ГЛАВА 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

1.1. Основные определения и формулы

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений стержней (рис.1.1), используемыми при расчете стержней на прочность и жесткость, являются следующие.

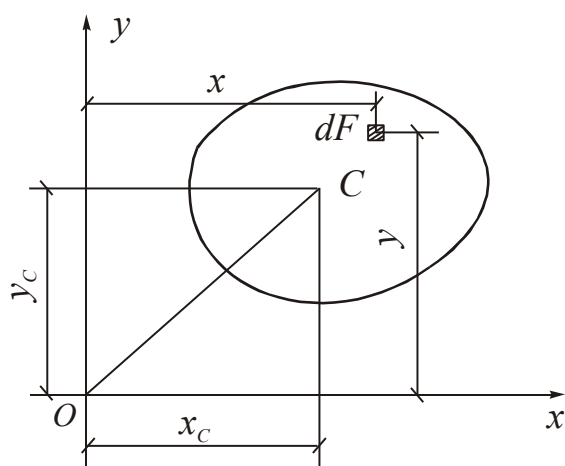


Рис.1.1

Полярный момент инерции

Площадь сечения F .

Статические моменты площади сечения относительно осей Ox и Oy

$$S_x = \iint_F y dF, \quad S_y = \iint_F x dF. \quad (1.1)$$

Осевые моменты инерции

$$J_x = \iint_F y^2 dF, \quad J_y = \iint_F x^2 dF. \quad (1.2)$$

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \iint_F xy dF. \quad (1.3)$$

$$J_p = \iint_F r^2 dF = J_x + J_y. \quad (1.4)$$

Статические моменты имеют размерность длины в третьей степени (см^3), а моменты инерции – единицы длины в четвертой степени (см^4). Статические моменты и центробежный момент инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые моменты инерции всегда являются положительными величинами.

Координаты центра тяжести сечения определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (1.5)$$

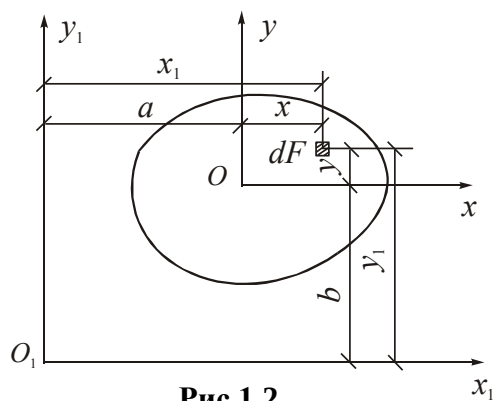


Рис.1.2

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями. Статический момент сечения относительно любой центральной оси равен нулю. Частным случаем центральных осей являются оси симметрии сечения.

При определении моментов инерции сечений используются зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей координат (рис.1.2):

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F, \quad J_{y_1} = J_y + a^2 F, \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + ab F, \quad (1.6)$$

где a и b – координаты центра тяжести O в системе координат $O_1 x_1 y_1$.

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения $J_{max} = J_1$ и $J_{min} = J_2$. Они называются главными моментами инерции.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями сечения.

Величины главных моментов инерции J_1 и J_2 и углы наклона главных осей α_1 и α_2 к оси Ox определяются по формулам

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}; \quad (1.7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}.$$

Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей. Для сечений, имеющих более двух осей симметрии, а также при равенстве главных моментов инерции $J_1 = J_2$ все центральные оси являются главными.

Ниже приведены справочные данные о геометрических характеристиках простых сечений.

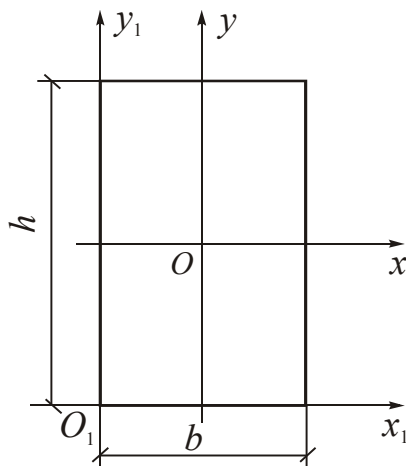


Рис.1.3

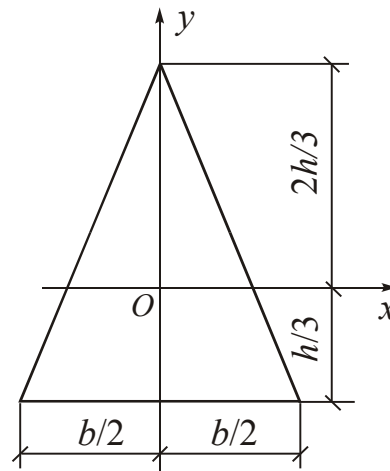


Рис.1.4

Прямоугольник (рис.1.3)

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}, \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (1.8)$$

Равнобедренный треугольник (рис.1.4)

$$J_x = \frac{bh^3}{36}, \quad J_y = \frac{hb^3}{48}. \quad (1.9)$$

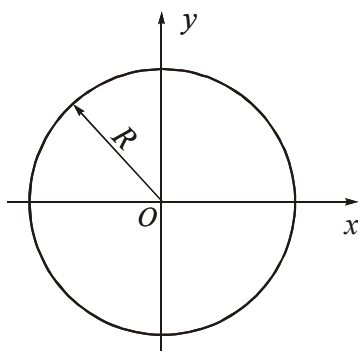


Рис.1.5

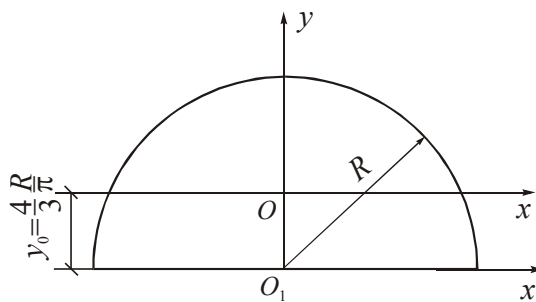


Рис.1.6

Круг (рис.1.5)

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (1.10)$$

Полукруг (рис.1.6)

$$J_{x_1} = J_y = \frac{\pi R^4}{8}, \quad J_x \approx 0,11R^4, \quad y_0 = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R. \quad (1.11)$$

Геометрические характеристики сечений прокатных стержней (двутавра, швеллера, уголка) приведены в сортаменте.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей сечения в виде прямоугольника с круговыми вырезами (рис.1.7).

Размеры сечений на рисунках 1.7 ÷ 1.12 даны в сантиметрах.

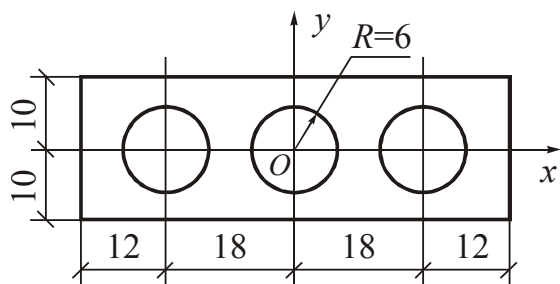


Рис.1.7

Оси симметрии Ox , Oy являются главными центральными осями всего сечения.

Моменты инерции и площади прямоугольника и круговых вырезов относительно их собственных осей определяются по формулам (1.8) и (1.10)

$$J_x^{(1)} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40000 \text{ см}^4,$$

$$J_y^{(1)} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ см}^4, \quad F_1 = 60 \cdot 20 = 1200 \text{ см}^2;$$

$$J_x^{(2)} = J_y^{(2)} = \frac{\pi \cdot 6^4}{4} = 1017 \text{ см}^4, \quad F_2 = \pi \cdot 6^2 = 113 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_x^{(1)} - 3J_x^{(2)} = 40000 - 3 \cdot 1017 = 36949 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} - 3J_y^{(2)} - 2F_2 a^2 = 360000 - 3 \cdot 1017 - 2 \cdot 113 \cdot 18^2 = 283725 \text{ см}^4.$$

Задача 1.2.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения, показанного на рис.1.8.

Разобьем сечение на три простые фигуры: прямоугольник с размерами 12×8 см и два равнобедренных треугольника с размерами 12×6 см. Моменты инерции и площади прямоугольника и треугольников относительно их собственных центральных осей определяются по формулам (1.8) и (1.9).

$$J_x^{(1)} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{ см}^4, \quad J_y^{(1)} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{ см}^4,$$

$$F_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2;$$

$$J_x^{(2)} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4, \quad J_y^{(2)} = \frac{6 \cdot 12^3}{48} = 216 \text{ см}^4,$$

$$F_2 = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2.$$

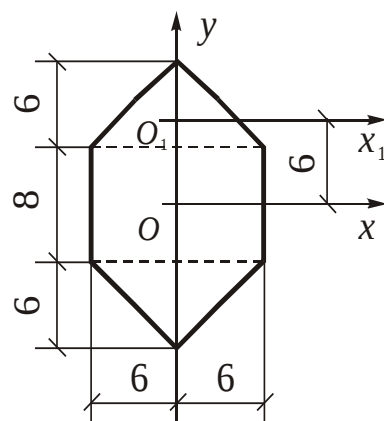


Рис.1.8

Площадь всего сечения равна

$$F = 96 + 2 \cdot 36 = 168 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox , Oy определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_x^{(1)} + 2(J_x^{(2)} + F_2 b^2) = 512 + 2(72 + 36 \cdot 6^2) = 3248 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} = 1152 + 2 \cdot 216 = 1584 \text{ см}^4.$$

Задача 1.3.

Определим моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стального стержня, составленного из четырех равнобоких уголков $L100 \times 100 \times 10$ и листа сечением 300×10 мм (рис.1.9).

Выпишем из сортамента площадь и моменты инерции сечения уголка относительно собственных центральных осей O_1x_1 и O_1y_1 :

$$J_{x_1}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = 179 \text{ см}^4, \quad F_1 = 19,2 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции относительно осей Ox и Oy и площадь сечения листа равны

$$J_x^{(2)} = \frac{1 \cdot 30^3}{12} = 2250 \text{ см}^4, \quad J_y^{(2)} = \frac{30 \cdot 1^3}{12} = 2,5 \text{ см}^4, \quad F_2 = 30 \text{ см}^2.$$

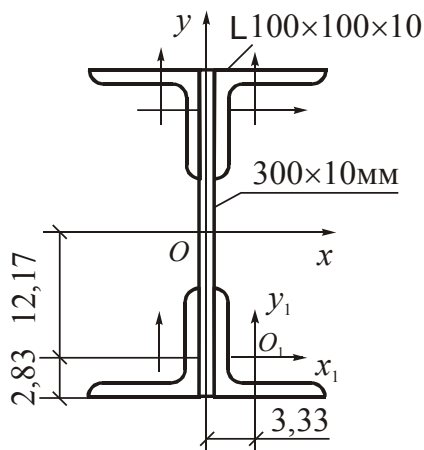


Рис.1.9

Площадь всего сечения равна

$$F = 4 \cdot 19,2 + 30 = 106,8 \text{ см}^2.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей Ox и Oy определяются по формулам (1.6).

$$J_x = 4(J_{x_1}^{(1)} + F_1 b_1^2) + J_x^{(2)} = 4(179 + 19,2 \cdot 12,17^2) + 2250 = 14341 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 4(J_{y_1}^{(1)} + F_1 a_1^2) + J_y^{(2)} = 4(179 + 19,2 \cdot 3,33^2) + 2,5 = 1570 \text{ см}^4.$$

Задача 1.4.

Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения с одной осью симметрии (рис.1.10).

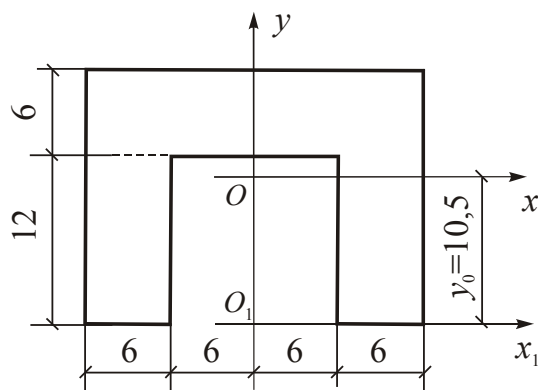


Рис.1.10

Данное сечение можно рассматривать как прямоугольник с размерами 24×18 см и прямоугольный вырез с размерами 12×12 см.

Площадь сечения равна

$$F = 24 \cdot 18 - 12 \cdot 12 = 288 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести сечения, который находится на оси симметрии Oy , примем в качестве вспомогательной оси ось O_1x_1 , проходящую по основанию фигур.

Статический момент сечения относительно этой оси определим как разность статических моментов прямоугольника и квадрата

$$S_{x_1} = F_1 y_1 - F_2 y_2 = 24 \cdot 18 \cdot 9 - 12 \cdot 12 \cdot 6 = 3024 \text{ см}^3.$$

Определим по формуле (1.5) координату центра тяжести

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{3024}{288} = 10,5 \text{ см}.$$

Оси Ox и Oy являются главными центральными осями сечения.

По третьей из формул (1.8) определим момент инерции сечения относительно оси O_1x_1 :

$$J_{x_1} = \frac{24 \cdot 18^3}{3} - \frac{12 \cdot 12^3}{3} = 39744 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей определяются по формулам (1.6).

$$J_x = J_{x_1} - F y_0^2 = 39744 - 288 \cdot 10,5^2 = 7992 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{18 \cdot 24^3}{12} - \frac{12 \cdot 12^3}{12} = 19008 \text{ см}^4.$$

Задача 1.5.

Определим положение центра тяжести и моменты инерции относительно главных центральных осей поперечного сечения стальной балки, составленной из двух двутавров $\text{I}27$ и стального листа сечением 400×12 мм (рис.1.11).

Моменты инерции и площади сечений двутавра и листа относительно собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 5010 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = 260 \text{ см}^4,$$

$$F_1 = 40,2 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2} = \frac{40 \cdot 1,2^3}{12} = 5,76 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_2} = \frac{1,2 \cdot 40^3}{12} = 6400 \text{ см}^4,$$

$$F_2 = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ см}^2.$$

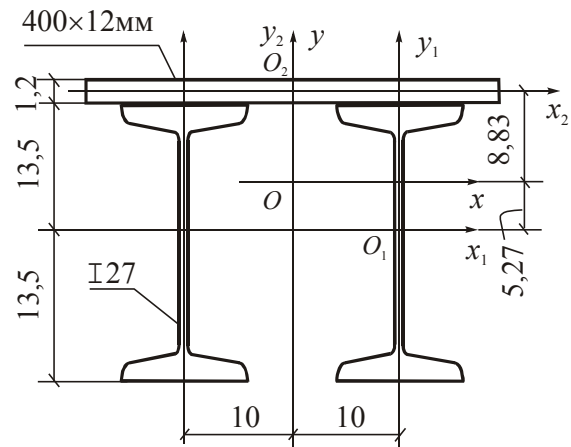


Рис.1.11

Площадь всего сечения равна

$$F = 2 \cdot 40,2 + 48 = 128,4 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести всего сечения определим статический момент сечения относительно оси O_1x_1 , проходящей через центры тяжести двутавров:

$$S_{x_1} = F_2 y_2 = 48 \left(13,5 + \frac{1,2}{2} \right) = 676,8 \text{ см}^3.$$

По второй из формул (1.5) получим

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{676,8}{128,4} = 5,27 \text{ см}.$$

Оси Ox и Oy являются главными центральными осями. Моменты инерции сечения относительно этих осей равны

$$J_x = 2(5010 + 40,2 \cdot 5,27^2) + (5,76 + 48 \cdot 8,83^2) = 16000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2(260 + 40,2 \cdot 10^2) + 6400 = 14960 \text{ см}^4.$$

Задача 1.6.

Для стержня несимметричного сечения, составленного из двутавра I50 и неравнобокого уголка L200×125×16 (рис.1.12,а), определим положение центра тяжести сечения, моменты инерции относительно главных центральных осей и положение этих осей.

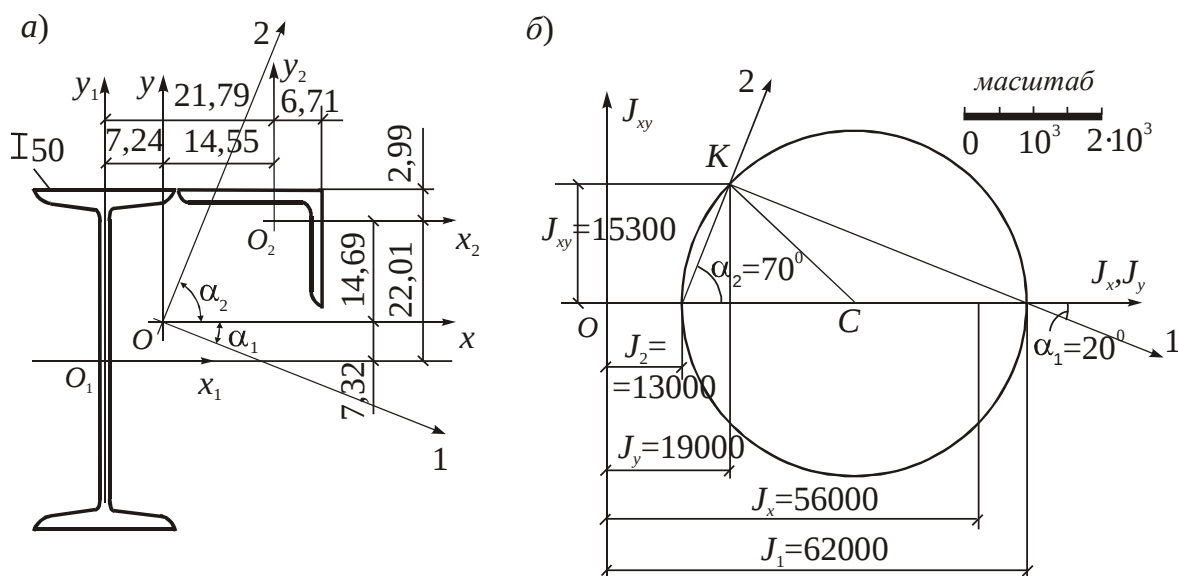


Рис.1.12

Моменты инерции и площади сечений двутавра и уголка относительно их собственных центральных осей соответственно равны:

$$J_{x_1} = 39727 \text{ см}^4, \quad J_{y_1} = 1043 \text{ см}^4, \quad J_{x_1 y_1} = 0, \quad F_1 = 100 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2} = 617 \text{ см}^4, \quad J_{y_2} = 2026 \text{ см}^4, \quad J_{x_2 y_2} = -644 \text{ см}^4, \quad F_2 = 49,8 \text{ см}^2.$$

Площадь всего сечения равна

$$F = 100 + 49,8 = 149,8 \text{ см}^2.$$

Для определения положения центра тяжести выберем в качестве вспомогательных осей оси двутавра O_1x_1 и O_1y_1 . По формулам (1.5) получим

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{F_2 x_2}{F} = \frac{49,8 \cdot 21,79}{149,8} = 7,24 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{F_2 y_2}{F} = \frac{49,8 \cdot 22,01}{149,8} = 7,32 \text{ см}.$$

Эти величины и координаты центров тяжести двутавра и уголка в системе координат Oxy показаны на рис.1.12,*a* и соответственно равны:

$$a_1 = -7,24 \text{ см}, \quad b_1 = -7,32 \text{ см}, \quad a_2 = 14,55 \text{ см}, \quad b_2 = 14,69 \text{ см}.$$

Определим по формулам (1.5) моменты инерции сечения относительно центральных осей Ox и Oy .

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + F_1 b_1^2 + J_{x_2} + F_2 b_2^2 = \\ &= 39727 + 100 \cdot 7,32^2 + 617 + 49,8 \cdot 14,69^2 = 56449 \text{ см}^4; \\ J_y &= J_{y_1} + F_1 a_1^2 + J_{y_2} + F_2 a_2^2 = \\ &= 1043 + 100 \cdot 7,24^2 + 2026 + 49,8 \cdot 14,55^2 = 18854 \text{ см}^4; \\ J_{xy} &= J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 b_2 = \\ &= 100 \cdot (-7,24) \cdot (-7,32) - 644 + 49,8 \cdot 14,55 \cdot 14,69 = 15300 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

По формулам (1.7) определим величины главных моментов инерции и углы наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox .

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \\ &= \frac{56449 + 18854}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{56449 - 18854}{2}\right)^2 + 15300^2}; \\ J_1 &= 61889 \text{ см}^4, \quad J_2 = 13415 \text{ см}^4; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{15300}{18854 - 61889} = -0,356, \quad \alpha_1 = -19,6^\circ; \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{15300}{18854 - 13415} = 2,813, \quad \alpha_2 = 70,4^\circ. \end{aligned}$$

На рис.1.12,*б* приведено графическое определение величин главных моментов инерции и положения главных осей.

ГЛАВА 2

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

2.1. Основные определения и формулы

Центральное растяжение и сжатие прямого стержня вызывается действием осевых нагрузок, в состав которых входят сосредоточенные силы и распределенные нагрузки, характеризующиеся интенсивностью q . При $q = \text{const}$ нагрузка называется равномерно распределенной, равнодействующая которой равна произведению qa , где a – длина участка распределения.

В поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения и одно внутреннее усилие – продольная сила N , определяемая с помощью метода сечений. При этом продольная сила равна сумме проекций на ось Ox нагрузок, приложенных к одной из частей стержня (рис.2.1).

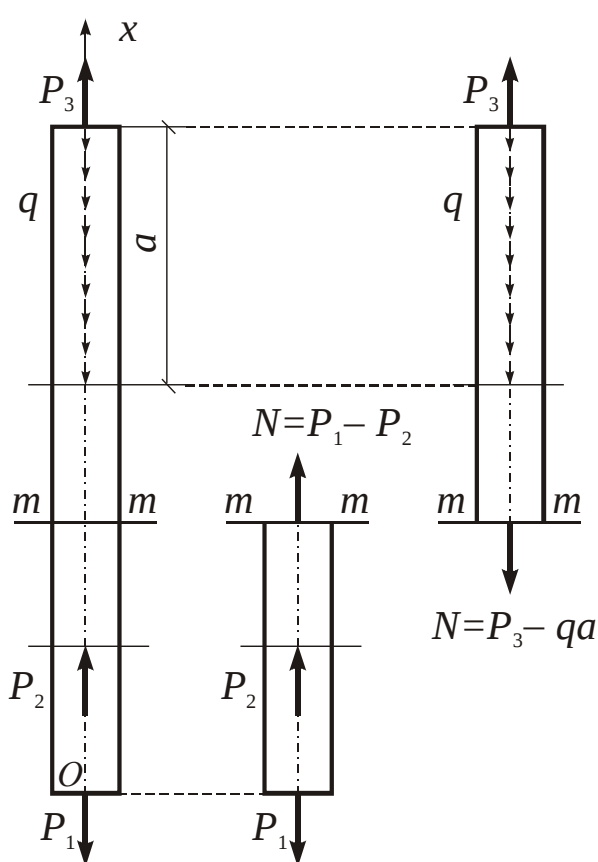


Рис.2.1

Результаты вычисления продольных сил N для верхней и нижней частей стержня должны совпадать. Растягивающая продольная сила считается положительной, а сжимающая – отрицательной. Продольная сила имеет размерность сосредоточенной силы (например, кН).

После определения продольных сил N в характерных сечениях стержня можно построить график изменения этих сил по длине стержня (эпюру N). При её построении используется дифференциальное соотношение

$$\frac{dN}{dx} = -q. \quad (2.1)$$

Нормальные напряжения при центральном растяжении и сжатии одинаковы во всех точках поперечного сечения и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.2)$$

где F – площадь поперечного сечения.

В системе СИ напряжения имеют размерность $\text{Па} = \text{Н/м}^2$, $\text{МПа} = 10^{-1} \text{ кН/см}^2$ и др.

Относительная продольная деформация стержня длиной l равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.3)$$

где Δl – удлинение или укорочение стержня.

В пределах упругих деформаций справедливо линейное соотношение между напряжениями и деформациями, называемое законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon , \quad (2.4)$$

где E – модуль упругости материала стержня.

Удлинение или укорочение стержня, закрепленного в начальном сечении $x = 0$, определяется по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dx . \quad (2.5)$$

Для частного случая $EF = const$ и $N = const$ имеем

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} . \quad (2.6)$$

Для стержня с постоянной жесткостью EF при произвольном законе изменения продольной силы N величину Δl можно определить по формуле

$$\Delta l = \frac{1}{EF} \Omega_N = \frac{1}{E} \Omega_\sigma \quad (2.7)$$

где Ω_N и Ω_σ – площади эпюры N или эпюры σ на рассматриваемом участке стержня.

Поперечные сечения стержня, оставаясь плоскими и перпендикулярными к оси, получают осевые перемещения $u = u(x)$. Эпюра осевых перемещений строится после определения удлинений или укорочений Δl участков стержня.

Если при определении продольных сил и опорных реакций уравнений равновесия недостаточно, то стержень или стержневая система называются статически неопределимыми. Для их расчета необходимо использовать условия деформации.

Расчет на прочность элементов строительных конструкций производится по методу предельных состояний. В поперечных сечениях стержня при центральном растяжении или сжатии должно выполняться условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R , \quad (2.8)$$

где R – расчетное сопротивление материала, характеризующее его прочность, и γ_c – коэффициент условий работы. Величина продольной силы N вычисляется от действия расчетных нагрузок, определяемых с учетом коэффициента надежности по нагрузкам γ_f . Значения R , γ_c и γ_f приведены в соответствующих разделах СНиП.

Подбор сечения стержня производится по формуле

$$F \geq \frac{N}{\gamma_c R} . \quad (2.9)$$

Расчет элементов машиностроительных конструкций производится по методу допускаемых напряжений. Условие прочности в этом случае записывается в виде

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (2.10)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

При расчете стержней и стержневых систем из пластичных материалов может быть использована упрощённая диаграмма зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$, например, диаграмма Прандтля (рис.2.2). Согласно этой диаграмме при достижении напряжениями предела текучести σ_T деформации неограниченно возрастают. При этом продольная сила в стержне принимает предельное значение (разрушающая сила)

$$N = N_{\text{пред}} = \sigma_T F. \quad (2.11)$$

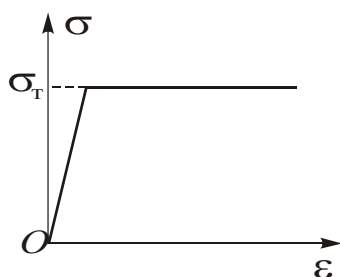


Рис.2.2

За начало разрушения стержневой системы можно принять такое состояние, при котором напряжения во всех стержнях достигнут предела текучести. При этом величина предельной нагрузки $P_{\text{пред}}$ определяется из уравнений равновесия. Допускаемая нагрузка определяется по формуле

$$P = \frac{P_{\text{пред}}}{n}, \quad (2.12)$$

где n – коэффициент запаса прочности.

2.2. Примеры решения задач

Задача 2.1.

Для стержня ступенчато постоянного сечения, находящегося под действием осевых нагрузок (рис.2.3,а), построим эпюры N и σ . Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений. В расчетах примем $E = 1 \cdot 10^5$ МПа = $1 \cdot 10^4$ кН/см².

Определим опорную реакцию в точке закрепления стержня.

$$\Sigma X = 0, \quad -R + 9 + 30 \cdot 1,2 - 24 = 0, \quad R = 21 \text{ кН}.$$

Направление опорной реакции в начале расчета принято правильно.

Определим с помощью метода сечений продольные силы и нормальные напряжения в пределах трех характерных участков стержня.

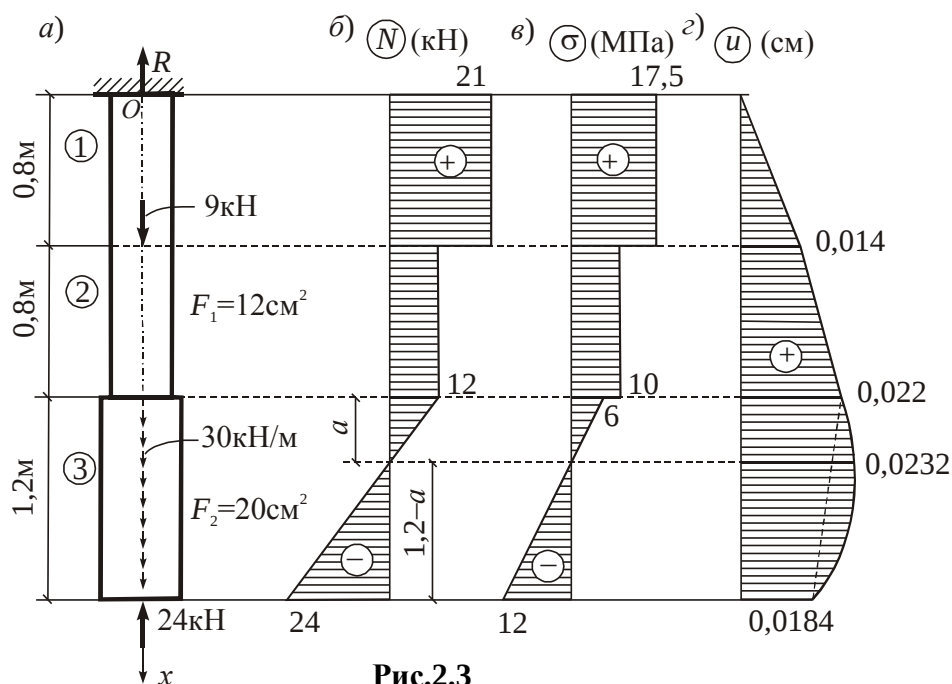


Рис.2.3

Участок 1 ($0 \leq x \leq 0,8$ м, рис.2.4).

$$\Sigma X = 0, \quad -21 + N = 0;$$

$$N = 21 \text{ кН (растяжение)};$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ кН/см}^2 = 17,5 \text{ МПа}.$$

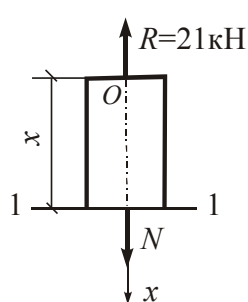


Рис.2.4

Участок 2 ($0,8 \leq x \leq 1,6$ м, рис.2.5).

$$\Sigma X = 0, \quad -21 + 9 + N = 0;$$

$$N = 12 \text{ кН (растяжение)},$$

$$\sigma = \frac{12}{12} = 1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}.$$

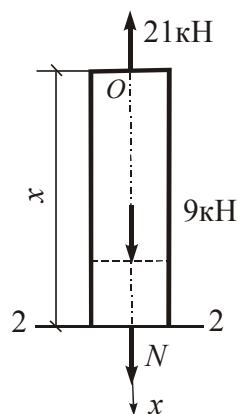


Рис.2.5

Участок 3 ($1,6 \leq x \leq 2,8$ м, рис.2.6).

$$\Sigma X = 0, \quad -N + 30(2,8 - x) - 24 = 0, \quad N = 30(2,8 - x) - 24;$$

$$x = 1,6 \text{ м}, \quad N = 30 \cdot 1,2 - 24 = 12 \text{ кН (растяжение)},$$

$$\sigma = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ кН/см}^2 = 6 \text{ МПа}.$$

$$x = 2,8 \text{ м}, \quad N = -24 \text{ кН (сжатие)},$$

$$\sigma = -\frac{24}{20} = -1,2 \text{ кН/см}^2 = -12 \text{ МПа}.$$

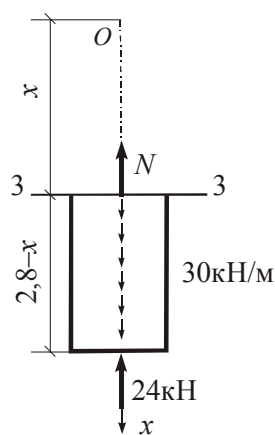


Рис.2.6

Строим эпюры N и σ (рис.2.3,б,в). В пределах первого и второго участков продольные силы и нормальные напряжения имеют постоянные значения, а в пределах третьего участка они изменяются по линейному закону. В сечении $x = 0,8$ м продольная сила имеет скачок на величину 9 кН.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{21 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0,014 \text{ см (удлинение) ,}$$

$$\Delta l_2 = \frac{12 \cdot 80}{1 \cdot 10^4 \cdot 12} = 0,008 \text{ см (удлинение),}$$

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EF_2} \Omega_N = \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} \cdot \frac{(-24 + 12)}{2} \cdot 120 = -0,0036 \text{ см (укорочение).}$$

Общее удлинение стержня равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,014 + 0,008 - 0,0036 = 0,0184 \text{ см.}$$

Определим осевые перемещения характерных сечений стержня.

$$x = 0, \quad u = u_0 = 0 ;$$

$$x = 0,8 \text{ м , } u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0,014 \text{ см ;}$$

$$x = 1,6 \text{ м , } u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0,014 + 0,008 = 0,022 \text{ см ;}$$

$$x = 2,8 \text{ м , } u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0,0184 \text{ см .}$$

Эпюра u приведена на рис.2.3,з. В пределах первого и второго участков осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах третьего участка – по закону квадратной параболы. В сечении, где $N = \sigma = 0$, имеется экстремум u_{max} , который равен:

$$u_{max} = u_2 + \Delta l_3^* = 0,022 + \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 40 = 0,0232 \text{ см ,}$$

где Δl_3^* – удлинение верхней части третьего участка стержня длиной a , которая определяется из пропорции:

$$\frac{24}{1,2 - a} = \frac{12}{a} , \quad a = 0,4 \text{ м.}$$

Все поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox , то есть вниз.

Задача.2.2.

Для стержня ступенчато постоянного сечения, испытывающего центральное растяжение и сжатие (рис.2.7,а), построим эпюры N и σ . Определим удлинения (укорочения) участков стержня и всего стержня в целом и построим эпюру осевых перемещений. В расчетах примем $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Определим с помощью метода сечений значения продольных сил и нормальных напряжений в характерных сечениях стержня, начиная с сечения вблизи свободного торца.

Участок 3 ($2 \leq x \leq 3 \text{ м}$).

$$x = 3 \text{ м , } N = 0, \quad \sigma = 0 ;$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad N = -30 \cdot 1 = -30 \text{ кН (сжатие)} ;$$

$$\sigma = -\frac{30}{15} = -2 \text{ кН/см}^2 = -20 \text{ МПа} .$$

Участок 2 ($1,2 \leq x \leq 2 \text{ м}$).

$$x = 2 \text{ м}, \quad N = -30 \text{ кН},$$

$$\sigma = -\frac{30}{10} = -3 \text{ кН/см}^2 = -30 \text{ МПа} .$$

$$x = 1,2 \text{ м}, \quad N = -30 \text{ кН}, \quad \sigma = -30 \text{ МПа} .$$

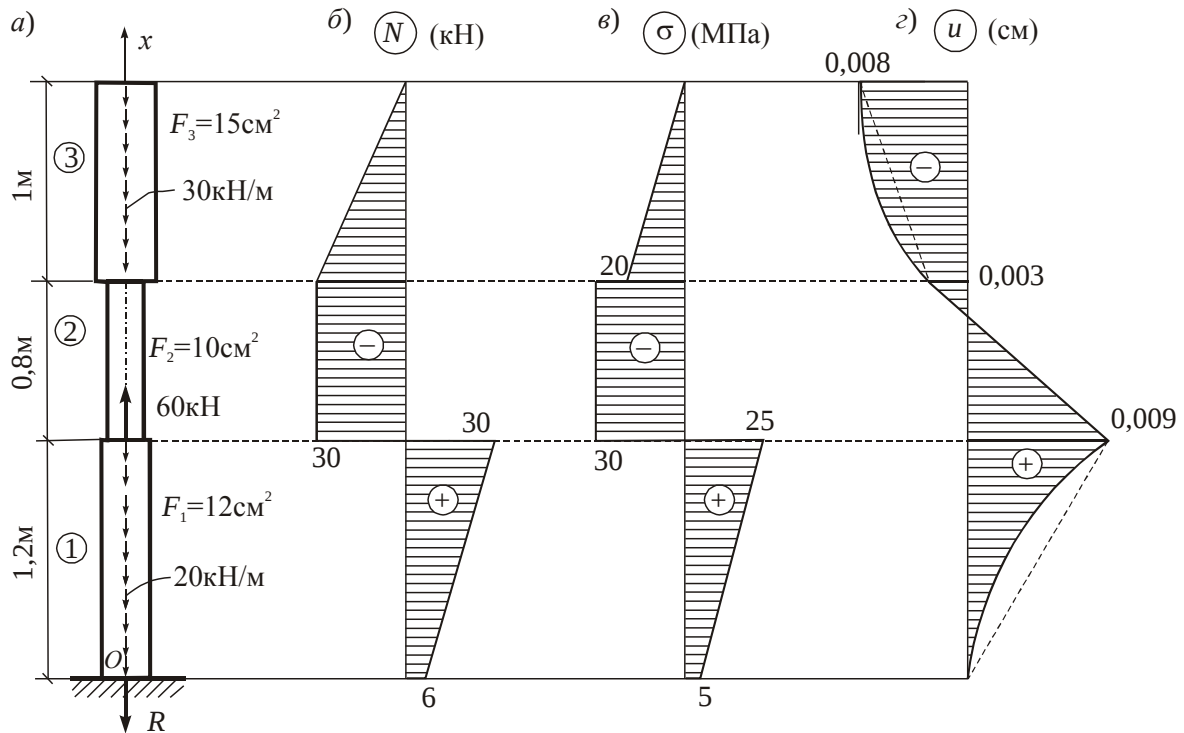


Рис.2.7

Участок 1 ($0 \leq x \leq 1,2 \text{ м}$).

$$x = 1,2 \text{ м}, \quad N = -30 + 60 = 30 \text{ кН (растяжение)} ;$$

$$\sigma = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ кН/см}^2 = 25 \text{ МПа} ;$$

$$x = 0, \quad N = 30 - 20 \cdot 1,2 = 6 \text{ кН} ;$$

$$\sigma = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ кН/см}^2 = 5 \text{ МПа} .$$

Эпюры N и σ приведены на рис.2.7,б,в. В пределах первого и третьего участков продольные силы и нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а в пределах второго участка они имеют постоянное значение. В сечении $x = 1,2 \text{ м}$ продольная сила имеет скачок на величину 60 кН.

Опорная реакция в закреплённом сечении равна $R = 6 \text{ кН}$. Её направление показано на рис.2.7,а.

Определим величины удлинений (укорочений) участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 12} \cdot \frac{(30 + 6)}{2} \cdot 120 = 0,009 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = -\frac{30 \cdot 80}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = -0,012 \text{ см};$$

$$\Delta l_3 = -\frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 100 = -0,005 \text{ см};$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,009 - 0,012 - 0,005 = -0,008 \text{ см}.$$

Стержень в целом укорачивается.

Определяем осевые перемещения характерных сечений стержня.

$$x = 0, \quad u_0 = 0;$$

$$x = 1,2 \text{ м}, \quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 0,009 \text{ см};$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = 0,009 - 0,012 = -0,003 \text{ см};$$

$$x = 3 \text{ м}, \quad u_3 = u_2 + \Delta l_3 = \Delta l = -0,008 \text{ см}.$$

Эпюра u приведена на рис.2.7,з. В пределах второго участка осевые перемещения изменяются по линейному закону, а в пределах первого и третьего участков – по квадратичному закону. В сечении $x = 3 \text{ м}$ касательная к эпюре u параллельна оси Ox . В пределах второго участка имеется сечение, осевое перемещение которого равно нулю.

Задача 2.3.

Чугунный стержень ступенчато постоянного сечения закреплен на обоих торцах и находится под действием двух сосредоточенных сил (рис.2.8,а). Построим в общем виде эпюры N , σ и u и определим величину силы P из условий прочности по методу допускаемых напряжений. В расчетах примем $F = 10 \text{ см}^2$ и допускаемые напряжения при растяжении и сжатии $[\sigma_p] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$, $[\sigma_c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2$.

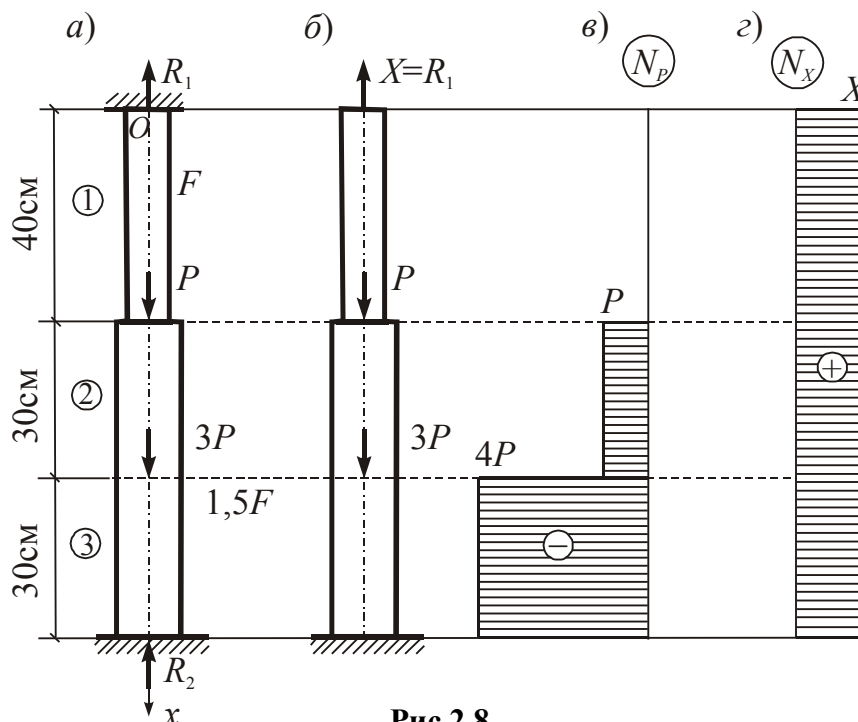


Рис.2.8

В точках закрепления стержня возникают две опорные реакции R_1 и R_2 . Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0, \quad -R_1 + P + 3P - R_2 = 0, \quad R_1 + R_2 = 4P.$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными. Данный стержень является статически неопределимым, и для его расчета необходимо использовать условие деформации стержня $\Delta l = 0$. Раскроем это условие с помощью принципа независимости действия сил.

Отбросим мысленно одно из закреплений, например, верхнее, и введем в этом сечении неизвестную силу $X = R_1$ (рис.2.8,б). Произведем расчет полученного таким образом статически определимого стержня отдельно на действие заданных нагрузок и силы X . Соответствующие эпюры продольных сил приведены на рис.2.8,в,г. При этом величины удлинений и укорочений стержня равны:

$$\Delta l_P = -\frac{P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} - \frac{4P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = -100 \frac{P}{EF};$$

$$\Delta l_X = \frac{X \cdot 40}{EF} + \frac{X \cdot 60}{E \cdot 1,5F} = 80 \frac{X}{EF}.$$

Используем условие деформации стержня и находим опорные реакции.

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_X = -100 \frac{P}{EF} + 80 \frac{X}{EF} = 0;$$

$$X = R_1 = 1,25P, \quad R_2 = 4P - R_1 = 2,75P.$$

Определяем значения N , σ и Δl в пределах участков стержня.

Участок 1.

$$N = R_1 = 1,25P, \quad \sigma = 1,25 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_1 = \frac{1,25P \cdot 40}{EF} = 50 \frac{P}{EF}.$$

Участок 2.

$$N = 1,25P - P = 0,25P, \quad \sigma = 0,25 \frac{P}{1,5F} = 0,167 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_2 = \frac{0,25P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = 5 \frac{P}{EF}.$$

Участок 3.

$$N = -R_2 = -2,75P, \quad \sigma = -2,75 \frac{P}{1,5F} = -1,83 \frac{P}{F};$$

$$\Delta l_3 = -\frac{2,75P \cdot 30}{E \cdot 1,5F} = -55 \frac{P}{EF}.$$

Проверим выполнение условия деформации стержня.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{P}{EF}(50 + 5 - 55) = 0.$$

Задача решена правильно. Эпюры N и σ приведены на рис.2.9,б,в. Определяем осевые перемещения характерных сечений.

$$x = 0, \quad u = u_0 = 0;$$

$$x = 40 \text{ см}, \quad u_1 = u_0 + \Delta l_1 = 50 \frac{P}{EF};$$

$$x = 70 \text{ см}, \quad u_2 = u_1 + \Delta l_2 = \frac{P}{EF}(50 + 5) = 55 \frac{P}{EF};$$

$$x = 100 \text{ см}, \quad u_3 = \Delta l = 0.$$

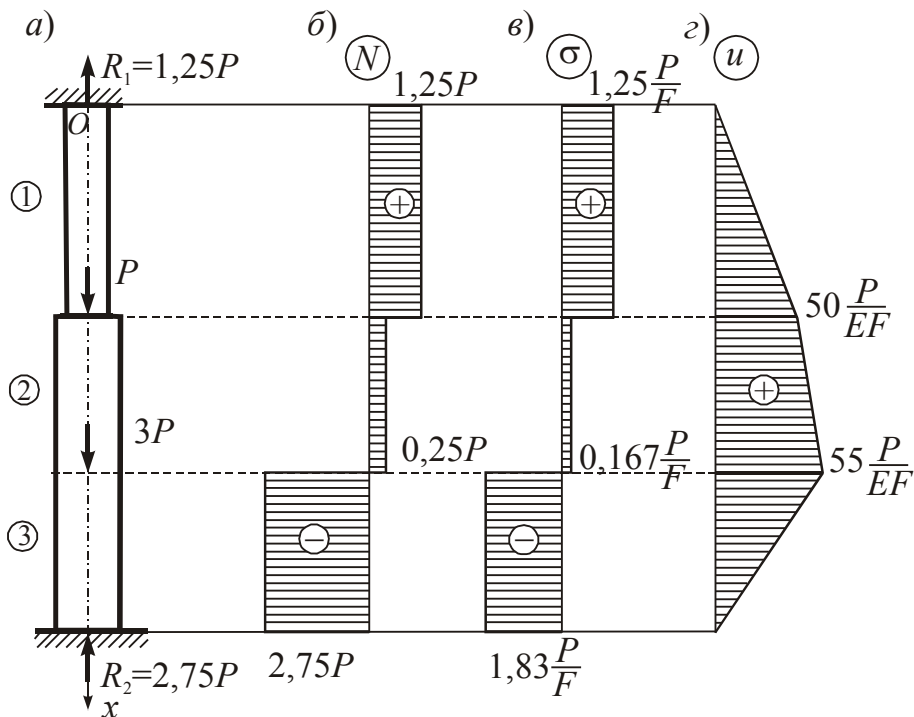


Рис.2.9

Эпюра u приведена на рис.2.9,г. Осевые перемещения изменяются по линейному закону. Все поперечные сечения перемещаются в положительном направлении оси Ox , то есть вниз.

Используем условия прочности по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям (первый и третий участки) и определим допускаемые значения силы P .

$$\sigma_p = 1,25 \frac{P}{F} = 1,25 \frac{P}{10} \leq [\sigma_p] = 8 \text{ кН/см}^2, \quad P \leq 64 \text{ кН};$$

$$|\sigma_c| = 1,83 \frac{P}{F} = 1,83 \frac{P}{10} \leq [\sigma_c] = 15 \text{ кН/см}^2, \quad P \leq 81,8 \text{ кН}.$$

Из двух допускаемых значений силы надо принять меньшее: $P = 64 \text{ кН}$.

Задача 2.4.

Латунный стержень ступенчато постоянного сечения находится под действием силы $P = 30$ кН. Нижний участок испытывает равномерный нагрев на величину $T = 20^\circ\text{C}$ по отношению к начальной температуре. Между нижним торцом стержня и жестким основанием имеется малый зазор $\delta = 0,012$ см (рис.2.10,а). Построим эпюры N , σ и u .

В расчетах примем $E = 1 \cdot 10^5$ МПа $= 1 \cdot 10^4$ кН/см² и коэффициент линейного температурного расширения $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

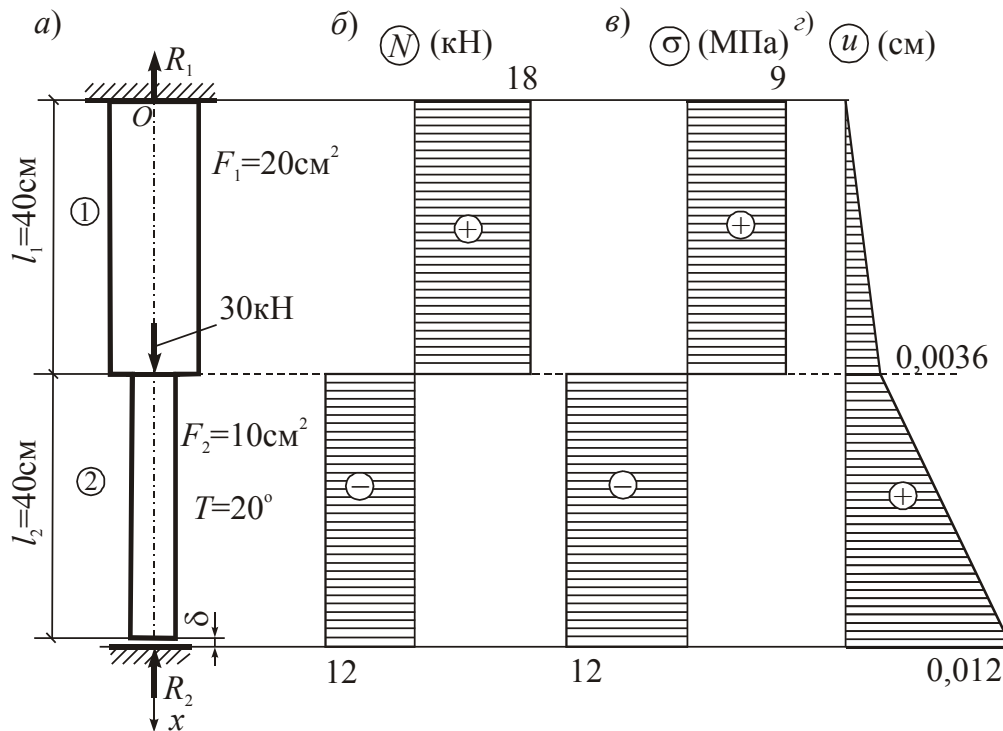


Рис.2.10

Определим величину возможного удлинения стержня от действия силы P и от нагрева нижнего участка.

$$\Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} = \frac{30 \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} = 0,006 \text{ см};$$

$$\Delta l_T = \alpha l_2 T = 1,65 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \cdot 20 = 0,0132 \text{ см};$$

$$\Delta l_P + \Delta l_T = 0,006 + 0,0132 = 0,0192 \text{ см}.$$

Поскольку сумма Δl_P и Δl_T больше зазора $\delta = 0,012$ см, при нагружении стержня этот зазор замкнется, и стержень будет работать как статически неопределимый с двумя опорными реакциями R_1 и R_2 (рис.2.10,а).

Составим уравнение равновесия.

$$\Sigma X = 0, \quad -R_1 + 30 - R_2 = 0, \quad R_1 + R_2 = 30 \text{ кН}.$$

Для решения задачи используем условие деформации стержня $\Delta l = \delta$. Отбросим мысленно нижнее закрепление и введем неизвестную силу $X = R_2$. Возможное укорочение стержня от действия этой силы равно:

$$\Delta l_X = -\frac{Xl_1}{EF_1} - \frac{Xl_2}{EF_2} = -\frac{X \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} - \frac{X \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 10} = -6 \cdot 10^{-4} X.$$

Используя условие деформации стержня, на основании принципа независимости действия сил получим

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_P + \Delta l_T + \Delta l_X = 0,0192 - 6 \cdot 10^{-4} X = \delta = 0,012 \text{ см}; \\ X &= R_2 = 12 \text{ кН}, \quad R_1 = 30 - R_2 = 30 - 12 = 18 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Определим продольные силы и нормальные напряжения в пределах участков стержня и величины удлинений участков.

Участок 1.

$$N = R_1 = 18 \text{ кН}, \quad \sigma = \frac{18}{20} = 0,9 \text{ кН/см}^2 = 9 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_1 = \frac{18 \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 20} = 0,0036 \text{ см}.$$

Участок 2.

$$N = -R_2 = -12 \text{ кН}, \quad \sigma = -\frac{12}{10} = -1,2 \text{ кН/см}^2 = -12 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_2 = -\frac{12 \cdot 40}{1 \cdot 10^4 \cdot 10} + \Delta l_T = -0,0048 + 0,0132 = 0,0084 \text{ см}.$$

Проверим выполнение условия деформации стержня.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,0036 + 0,0084 = 0,012 \text{ см} = \delta.$$

Задача решена правильно. Эпюры N и σ приведены на рис.2.10,б,в. Определяем осевые перемещения характерных сечений стержня.

$$\begin{aligned} x &= 0, & u &= u_0 = 0; \\ x &= 40 \text{ см}, & u_1 &= u_0 + \Delta l_1 = 0,0036 \text{ см}; \\ x &= 80 \text{ см}, & u_2 &= \delta = 0,012 \text{ см}. \end{aligned}$$

Эпюра u приведена на рис.2.10,г. Осевые перемещения изменяются по линейному закону. Все поперечные сечения перемещаются вниз.

Задача 2.5.

Стержневая система состоит из жесткой балки AB , шарнирно опёртой в точке A и поддерживаемой стержнем CB круглого сечения диаметром $d = 22$ мм (рис.2.11,а). Определим допустимую величину силы P из условия прочности стержня CB по методу предельных состояний, величину удлинения стержня и угол поворота балки AB . В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_c = 0,9$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

При нагружении системы возникают опорные реакции R_A и H_A на опоре A и продольная растягивающая сила N в стержне CB . Эти величины можно определить из уравнений равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Для определения N используем уравнение равновесия для моментов

$$\Sigma M_A = 0, \quad Nr - 2P = 0, \quad N = \frac{2P}{r} = \frac{2}{1,34}P = 1,49P,$$

где $r = 3 \sin \alpha = 3 \cdot 0,447 = 1,34$ м – плечо силы N , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{3} = 0,5$, $\sin \alpha = 0,447$.

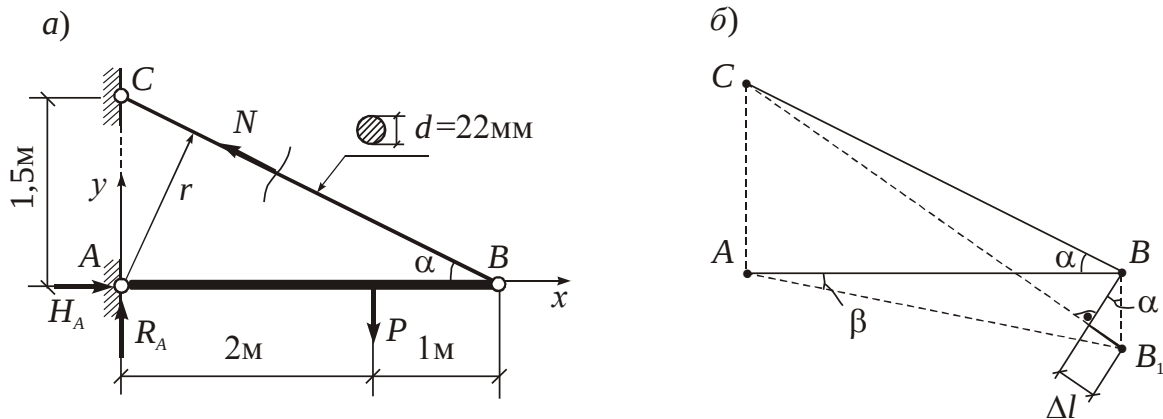


Рис.2.11

Используем условие прочности стержня

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{1,49P}{3,8} \leq \gamma_c R = 21 \cdot 0,9,$$

где $F = \frac{3,14 \cdot 2,2^2}{4} = 3,8$ см² – площадь сечения стержня.

Расчетное и нормативные значения силы P равны:

$$P_p \leq \frac{21 \cdot 0,9 \cdot 3,8}{1,49} = 48,2 \text{ кН};$$

$$P_n = \frac{P_p}{\gamma_f} = \frac{48,2}{1,4} = 34,4 \text{ кН}.$$

Принимаем с округлением $P_n = 34$ кН и определяем величину удлинения стержня от действия этой силы. Схема деформации системы приведена на рис.2.11,б.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{1,49 \cdot 34 \cdot 335,4}{21 \cdot 10^4 \cdot 3,8} = 0,213 \text{ см},$$

где $l = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = 3,354$ м – длина стержня.

Определим угол поворота жесткой балки AB .

$$BB_1 = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{0,213}{0,447} = 0,477 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BB_1}{AB} = \frac{0,477}{300} = 0,00159, \quad \beta = 0,09^\circ.$$

Угол поворота балки очень мал.

Задача 2.6.

Стержневая система (рис.2.12,а) состоит из жесткой балки AB , имеющей шарнирно неподвижную опору A , и двух стержней CD и ED , поддерживающих балку. К балке приложена сила P , нормативное значение которой равно 400 кН. Определим усилия в стержнях и подберем их сечения в виде двух стальных равнобоких уголков. Определим величину разрушающей силы. В расчетах примем коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, расчетное сопротивление материала $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$, предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа} = 24 \text{ кН/см}^2$ и соотношение между площадями поперечных сечений стержней $F_2/F_1 = 1,2$.

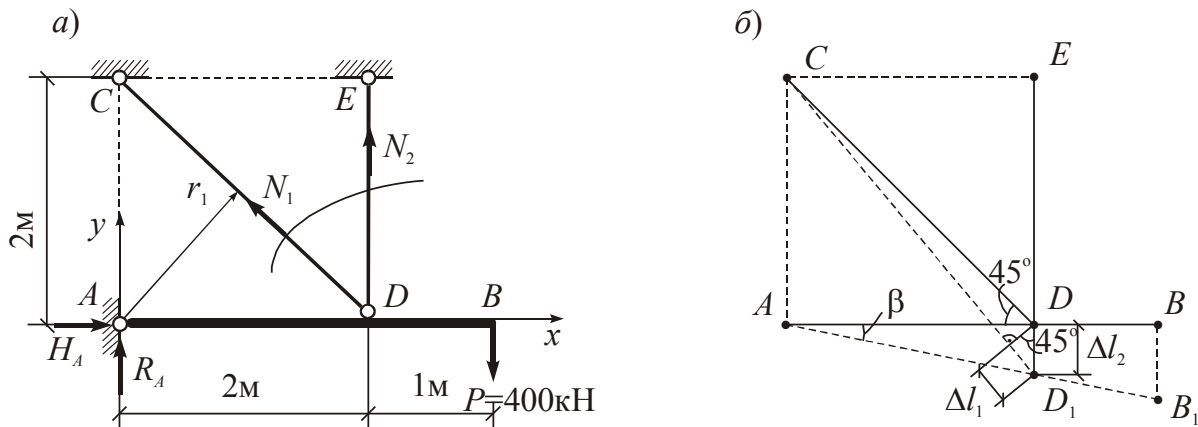


Рис.2.12

Под действием нагрузки на опоре A возникают опорные реакции R_A и H_A , а в стержнях – растягивающие усилия N_1 и N_2 . Поскольку для их определения можно использовать только три независимых уравнения равновесия $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$, задача является статически неопределимой.

Составим уравнение равновесия относительно усилий N_1 и N_2 .

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 r_1 + N_2 r_2 - P r_P = 0,$$

где $r_1 = 2 \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,414 \text{ м}$, $r_2 = 2 \text{ м}$ и $r_P = 3 \text{ м}$ – плечи сил N_1 , N_2 и P относительно точки A .

Расчетное значение силы P равно

$$P_p = P_n \gamma_f = 400 \cdot 1,2 = 480 \text{ кН}.$$

Получили одно уравнение относительно двух неизвестных N_1 и N_2 :

$$1,44 N_1 + 2 N_2 = 480 \cdot 3 = 1440 \text{ кНм}.$$

Для получения второго уравнения рассмотрим схему деформации системы. Под действием силы P жесткая балка AB повернется относительно точки A на малый угол β . Стержни при этом получают удлинения Δl_1 и Δl_2 (рис.2.12,б). Из схемы деформации находим:

$$\Delta l_1 = DD_1 \sin 45^\circ, \quad \Delta l_2 = DD_1, \quad \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \sin 45^\circ = 0,707.$$

Полученное соотношение является условием деформации системы. Выразим Δl_1 и Δl_2 через усилия в стержнях.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2},$$

где $l_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,828$ м, $l_2 = 2$ м – длины стержней.

Используем условие деформации системы.

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \cdot \frac{EF_2}{N_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{2,828}{2,0} \cdot 1,2 = 0,707,$$

$$N_1 = 0,417 N_2.$$

Подставляем полученное соотношение в уравнение равновесия и определяем расчетные значения усилий в стержнях.

$$1,414 \cdot 0,417 N_2 + 2 N_2 = 1440, \quad N_2 = 556 \text{ кН}, \quad N_1 = 0,417 \cdot 556 = 232 \text{ кН}.$$

Определяем требуемые площади сечений стержней из условий прочности.

$$F_1 \geq \frac{N_1}{\gamma_c R} = \frac{232}{21 \cdot 0,9} = 12,3 \text{ см}^2, \quad F_2 \geq \frac{N_2}{\gamma_c R} = \frac{556}{21 \cdot 0,9} = 29,4 \text{ см}^2.$$

Проверяем выполнение принятого соотношения между F_1 и F_2 .

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{29,4}{12,3} = 2,39 > 1,2.$$

При подборе сечения первого стержня его площадь надо увеличить и принять равной

$$F_1 = \frac{F_2}{1,2} = \frac{29,4}{1,2} = 24,5 \text{ см}^2.$$

Поскольку каждый стержень состоит из двух одинаковых равнобоких уголков (рис.2.13), разделим требуемые площади сечений пополам и по сортаменту примем сечения стержней.

Проверим прочность стержней и определим величины их удлинений.

Первый стержень $\text{Л } 90 \times 90 \times 7$

$$F_1 = 2 \cdot 12,3 = 24,6 \text{ см}^2;$$

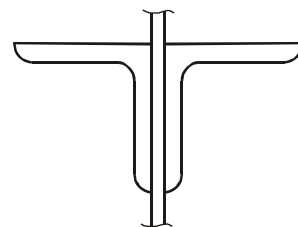


Рис.2.13

$$\sigma = \frac{N_1}{F_1} = \frac{232}{24,6} = 9,43 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18,9 \text{ кН/см}^2 ;$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{\gamma_f E F_1} = \frac{232 \cdot 282,8}{1,2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 24,6} = 0,106 \text{ см} .$$

Второй стержень $\text{Л } 110 \times 110 \times 7$

$$F_2 = 2 \cdot 15,2 = 30,4 \text{ см}^2 ;$$

$$\sigma = \frac{N_2}{F_2} = \frac{556}{30,4} = 18,3 \text{ кН/см}^2 < \gamma_c R = 18,9 \text{ кН/см}^2 ;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{\gamma_f E F_2} = \frac{556 \cdot 200}{1,2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 30,4} = 0,145 \text{ см} .$$

Прочность стержней обеспечена. Согласно СНиП определение удлинений произведено от действия нормативной нагрузки. В силу этого расчетные значения усилий разделены на коэффициент надежности по нагрузке γ_f . Модуль упругости стали принят равным $E = 2,1 \cdot 10^5 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Проверим выполнение условия деформации системы.

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{0,106}{0,145} = 0,73 \neq 0,707 .$$

Расхождение составляет:

$$\Delta\% = \frac{0,73 - 0,707}{0,707} \cdot 100\% = 3,3\% .$$

Определим величину разрушающей (предельной) силы. Согласно диаграмме Прандтля принимается, что при этом напряжения в стержнях равны пределу текучести σ_t , а усилия в стержнях равны $N_{1т} = \sigma_t F_1$ и $N_{2т} = \sigma_t F_2$.

Составим уравнение предельного равновесия системы.

$$\Sigma M_A = 0 , \quad \sigma_t F_1 r_1 + \sigma_t F_2 r_2 = P_{\text{пред}} r_P .$$

Отсюда находим

$$P_{\text{пред}} = \frac{\sigma_t (F_1 r_1 + F_2 r_2)}{r_P} = \frac{24(24,6 \cdot 1,414 + 30,4 \cdot 2)}{3} = 765 \text{ кН} .$$

Коэффициент запаса по отношению к нормативному значению силы равен

$$n = \frac{P_{\text{пред}}}{P_n} = \frac{765}{400} = 1,91 .$$

ГЛАВА 3

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ БАЛОК И ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

3.1. Основные определения и формулы

При плоском прямом изгибе в плоскости Oxy в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия – поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z (рис.3.1).

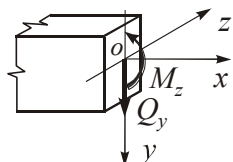


Рис.3.1

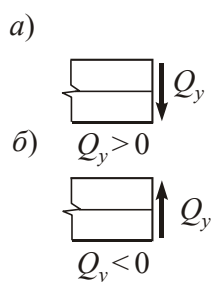


Рис.3.2

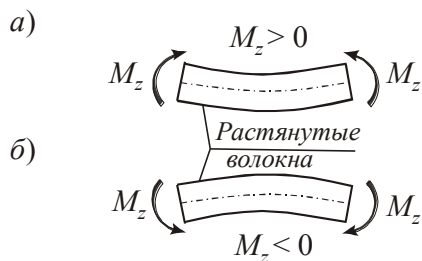


Рис.3.3

Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки (рис.3.2). Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис.3.3).

Поперечная сила в любом сечении балки определяется как сумма проекций всех нагрузок, приложенных к одной из частей балки, на нормаль к её оси.

Изгибающий момент в любом сечении балки определяется как сумма моментов всех нагрузок, приложенных к одной из частей балки, относительно центра тяжести данного сечения.

Рассматривая, например, равновесие левой части балки (рис.3.4), получим

$$\sum Y = 0, \quad -P_1 + P_2 + Q_y = 0,$$

$$Q_y = P_1 - P_2.$$

$$\sum M_C = 0, \quad -P_1x + P_2(x-a) - M + M_z = 0, \quad M_z = P_1x - P_2(x-a) + M.$$

Между изгибающим моментом M_z , поперечной силой Q_y и распределённой нагрузкой q имеют место следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = -q. \quad (3.1)$$

Эти зависимости используются при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

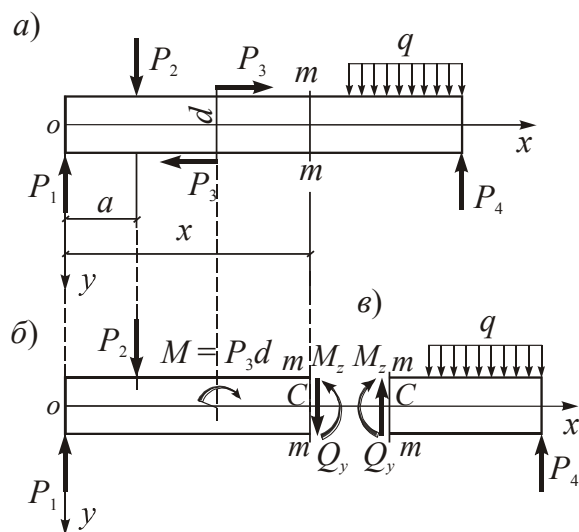


Рис.3.4

3.2. Примеры решения задач

Задача 3.1.

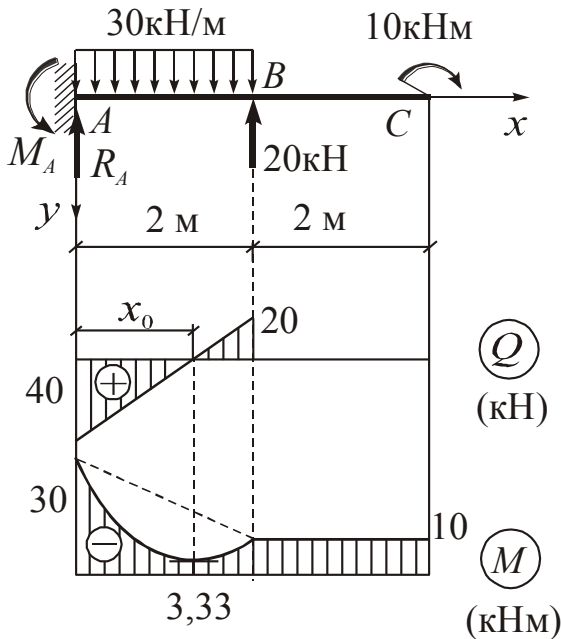


Рис.3.5

Для консольной балки, изображённой на рис.3.5, построим эпюры Q_y и M_z .

При построении эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z в консольных балках определение опорных реакции не обязательно, однако, если эти реакции известны, то они могут использоваться для проверки правильности эпюр Q_y и M_z .

$$\sum Y = 0, \quad -R_A + 30 \cdot 2 - 20 = 0,$$

$$R_A = 40 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - 30 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 - 10 = 0,$$

$$M_A = 30 \text{ кНм}.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца.

Сечение $x = 4 \text{ м}$, $Q_y = 0$, $M_z = -10 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 2 \text{ м}$ (справа), $Q_y = 0$, $M_z = -10 \text{ кНм}$.

Сечение $x = 2 \text{ м}$ (слева), $Q_y = -20 \text{ кН}$, $M_z = -10 \text{ кНм}$.

Сечение $x = 0$, $Q_y = -20 + 30 \cdot 2 = 40 \text{ кН}$, $M_z = -10 - 30 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = -30 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна).

На участке BC поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент согласно второй из формул (3.1) имеет постоянное значение. На участке AB с равномерно распределённой нагрузкой ($q = \text{const}$) согласно первой и третьей из формул (3.1) поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращённой в сторону действия нагрузки.

Эпюра M_z имеет экстремум в сечении x_0 , где $Q_y = 0$. Величину x_0 можно определить из подобия треугольников на эпюре Q_y :

$$\frac{x_0}{2 - x_0} = \frac{40}{20}, \quad x_0 = 1,33 \text{ м}, \quad 2 - x_0 = 0,67 \text{ м}.$$

При этом

$$M_{\max} = M_z(1,33) = -10 - 30 \cdot \frac{0,67^2}{2} + 20 \cdot 0,67 = -3,33 \text{ кНм}.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.5.

Задача 3.2.

Для консольной балки, изображенной на рис.3.6, построим эпюры Q_y и M_z .

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки, начиная со свободного конца.

Сечение $x = 0$, $Q_y = 0$, $M_z = 0$.

Сечение $x = 3$ м (слева), $Q_y = -12 \cdot 3 = -36$ кН,
 $M_z = -12 \cdot 3 \cdot 1,5 = -54$ кНм
 (растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 3$ м (справа), $Q_y = -36$ кН,
 $M_z = -54 + 24 = -30$ кНм.

Сечение $x = 4$ м, $Q_y = -36$ кН,
 $M_z = -12 \cdot 3 \cdot 2,5 + 24 = -66$ кНм
 (растянуты верхние волокна).

На участке AB с равномерно распределенной нагрузкой согласно формулам (3.1) поперечная сила Q_y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_z – по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращенной в сторону действия нагрузки; при этом во всех сечениях он вызывает растяжение верхних волокон. На участке BC распределенная нагрузка отсутствует. Следовательно, на этом участке поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону, причем в сечении B имеется скачок, равный по величине приложенному моменту 24 кНм.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.6. Из этих эпюр следует, что $R_C = 36$ кН, $M_C = 66$ кНм.

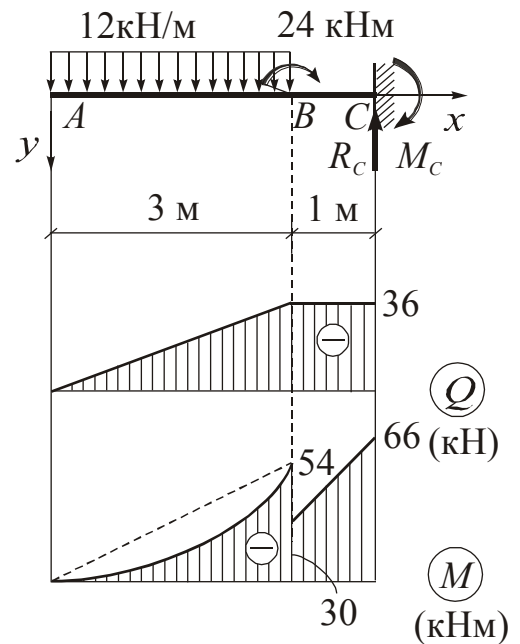


Рис.3.6

Задача 3.3.

Для шарнирно опертой балки, изображенной на рис.3.7, построим эпюры Q_y и M_z .

Расчет шарнирно опертой балки необходимо начинать с определения опорных реакций.

$$\Sigma M_A = 0, \quad -18 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 6R_B = 0, \\ R_B = 32 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 18 \cdot 4 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 6R_A = 0, \\ R_A = 52 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка),} \\ 18 \cdot 4 + 12 - 32 - 52 = 84 - 84 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

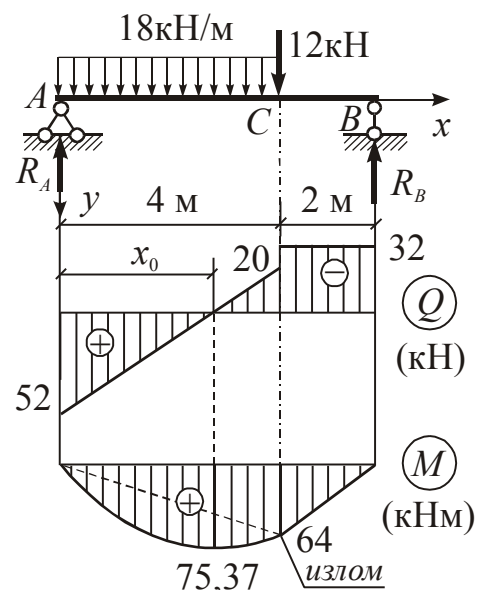


Рис.3.7

Сечение $x = 0$, $Q_y = R_A = 52 \text{ кН}$, $M_z = 0$.

Сечение $x = 6 \text{ м}$, $Q_y = -R_B = -32 \text{ кН}$, $M_z = 0$.

Сечение $x = 4 \text{ м (справа)}$, $Q_y = -32 \text{ кН}$, $M_z = 32 \cdot 2 = 64 \text{ кНм}$
(растянуты нижние волокна).

Сечение $x = 4 \text{ м (слева)}$, $Q_y = -32 + 12 = -20 \text{ кН}$, $M_z = 64 \text{ кНм}$.

На участке AC с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону со сменой знака с плюса на минус. Изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы и имеет экстремальное значение в сечении, где поперечная сила равна нулю.

На участке CB распределенная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечении C , где действует сосредоточенная сила 12 кН , на эпюре Q_y имеется скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре M_z имеет место излом.

Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения определяем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0}{4 - x_0} = \frac{52}{20}, \quad x_0 = 2,89 \text{ м}.$$

$$M_{\max} = M_z(2,89) = 52 \cdot 2,89 - 18 \cdot 2,89 \cdot \frac{2,89}{2} = 75,37 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 3.7.

Задача 3.4.

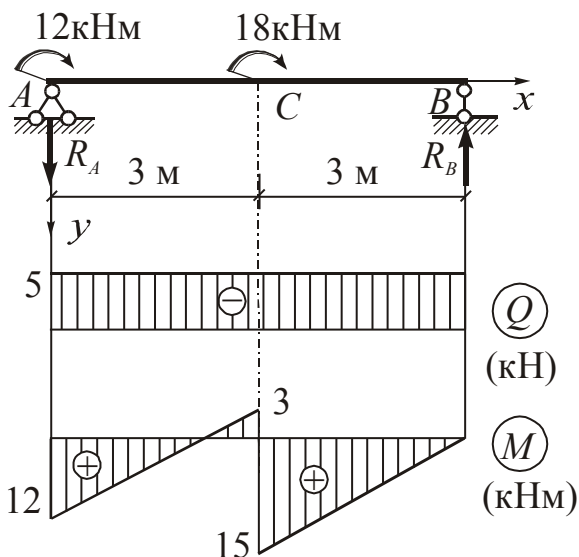


Рис.3.8

Для шарнирно опёртой балки, изображенной на рис.3.8, построим эпюры Q_y и M_z .

Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0, \quad -12 - 18 + 6R_B = 0,$$

$$R_B = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad -12 - 18 + 6R_A = 0,$$

$$R_A = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 5 - 5 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

Сечение $x = 0$, $Q_y = -R_A = -5 \text{ кН}$,

$$M_z = 12 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Сечение $x = 3 \text{ м (слева)}$, $Q_y = -5 \text{ кН}$, $M_z = 12 - 5 \cdot 3 = -3 \text{ кНм}$

(растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 3$ м (справа), $Q_y = -R_B = -5$ кН, $M_z = 5 \cdot 3 = 15$ кНм
(растянуты нижние волокна).

Поперечная сила по всей длине балки постоянна, а изгибающий момент на участках AC и CB изменяется по линейному закону и в сечении C имеет скачок, равный по величине действующему в этом сечении моменту.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.8.

Задача 3.5.

Для шарнирно опертой балки, изображенной на рис.3.9, построим эпюры Q_y и M_z .

Равнодействующая нагрузки, распределенной по линейному закону, равна

$$R = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6 = 54 \text{ кН}.$$

Определим опорные реакции

$$\Sigma M_A = 0, \quad 12 - 54 \cdot 4 + 6R_B = 0, \\ R_B = 34 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 12 + 54 \cdot 2 - 6R_A = 0, \\ R_A = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \\ 54 - 20 - 34 = 54 - 54 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

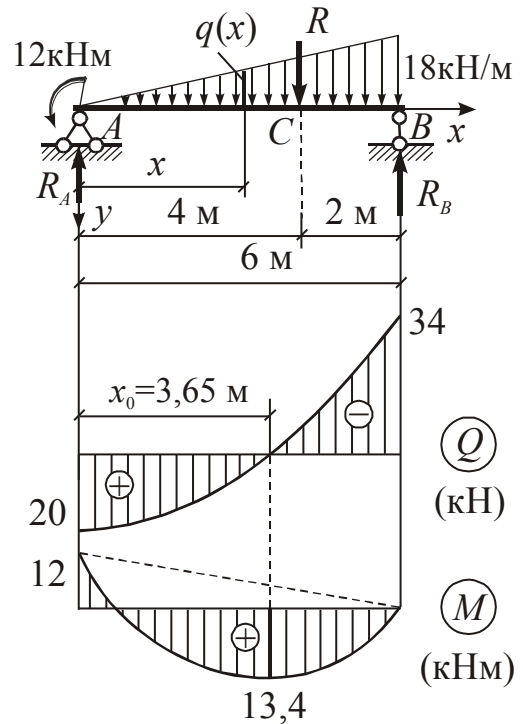


Рис.3.9

Сечение $x = 0$, $Q_y = R_A = 20$ кН, $M_z = -12$ кНм (растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 6$ м, $Q_y = -R_B = -34$ кН, $M_z = 0$.

Из подобия треугольников находим закон изменения распределенной нагрузки:

$$q(x) = \frac{18}{6}x = 3x.$$

Согласно зависимостям (3.1) поперечная сила изменяется по закону квадратной параболы

$$Q_y(x) = R_A - \frac{1}{2}q(x)x = 20 - \frac{3}{2}x^2,$$

а изгибающий момент – по закону кубической параболы

$$M_z(x) = -12 + 20x - \frac{1}{2}q(x)x \cdot \frac{1}{3}x = -12 + 20x - \frac{1}{2}x^3.$$

Определим положение сечения, где поперечная сила обращается в нуль

$$20 - \frac{3}{2}x^2 = 0, \quad x = x_0 = 3,65 \text{ м}.$$

В сечении x_0 изгибающий момент имеет экстремальное значение

$$M_{\max} = M_z(3,65) = -12 + 20 \cdot 3,65 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3,65 \cdot 3,65 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,65 = 13,4 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.9.

Задача 3.6.

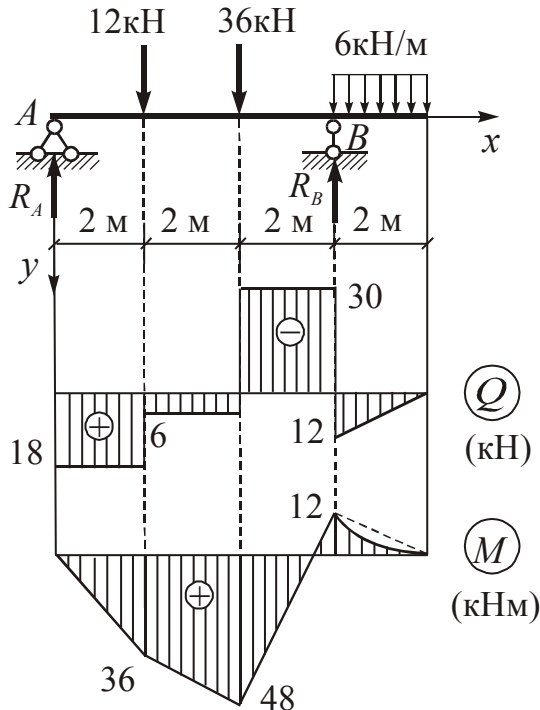


Рис.3.10

Для шарнирно опертой балки с консолью, изображенной на рис.3.10, построим эпюры Q_y и M_z . Найдем опорные реакции.

$$\Sigma M_A = 0, \quad -12 \cdot 2 - 36 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 7 + 6R_B = 0, \\ R_B = 42 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 12 \cdot 4 + 36 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 6R_A = 0, \\ R_A = 18 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка),}$$

$$12 + 36 + 6 \cdot 2 - 18 - 42 = 60 - 60 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

$$\text{Сечение } x = 0, \quad Q_y = R_A = 18 \text{ кН}, \quad M_z = 0.$$

$$\text{Сечение } x = 2 \text{ м (слева)}, \quad Q_y = 18 \text{ кН}, \\ M_z = 18 \cdot 2 = 36 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты нижние волокна).}$$

$$\text{Сечение } x = 2 \text{ м (справа)}, \quad Q_y = 18 - 12 = 6 \text{ кН}, \quad M_z = 36 \text{ кНм.}$$

$$\text{Сечение } x = 4 \text{ м (слева)}, \quad Q_y = 6 \text{ кН}, \quad M_z = 18 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 48 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты нижние волокна).}$$

$$\text{Сечение } x = 6 \text{ м (справа)}, \quad Q_y = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кН}, \quad M_z = -6 \cdot 2 \cdot 1 = -12 \text{ кНм} \\ \text{(растянуты верхние волокна).}$$

$$\text{Сечение } x = 6 \text{ м (слева)}, \quad Q_y = 12 - 42 = -30 \text{ кН}, \quad M_z = -12 \text{ кНм.}$$

$$\text{Сечение } x = 8 \text{ м}, \quad Q_y = 0, \quad M_z = 0.$$

На консольной части балки, где имеется распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы с выпуклостью, обращенной в сторону действия нагрузки. На остальных участках поперечная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях, где действуют сосредоточенные силы или опорные реакции, на эпюре Q_y имеются скачки, равные по величине действующим силам, а на эпюре M_z имеются точки излома.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.10.

Задача 3.7.

Для шарнирно опертой балки с консолями (рис.3.11) построим эпюры Q_y и M_z .

Находим опорные реакции.

$$\Sigma M_A = 0, \quad -6 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 15 \cdot 6 + 5R_B = 0, \quad R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad -6 + 12 \cdot 3 \cdot 3,5 - 15 \cdot 1 - 5R_A = 0, \quad R_A = 21 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \\ 12 \cdot 3 + 15 - 21 - 30 = 51 - 51 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

Сечение $x = 0$, $Q_y = 0$, $M_z = 6 \text{ кНм}$
(растянуты нижние волокна).

Сечение $x = 1 \text{ м}$ (слева), $Q_y = 0$, $M_z = 6 \text{ кНм}$.

Сечение $x = 1 \text{ м}$ (справа), $Q_y = R_A = 21 \text{ кН}$, $M_z = 6 \text{ кНм}$.

Сечение $x = 4 \text{ м}$, $Q_y = 21 - 12 \cdot 3 = -15 \text{ кН}$, $M_z = 6 + 21 \cdot 3 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = 15 \text{ кНм}$ (растянуты нижние волокна).

Сечение $x = 6 \text{ м}$ (справа), $Q_y = 15 \text{ кН}$, $M_z = -15 \cdot 1 = -15 \text{ кНм}$
(растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 6 \text{ м}$ (слева), $Q_y = 15 - 30 = -15 \text{ кН}$, $M_z = -15 \text{ кНм}$.

Сечение $x = 7 \text{ м}$, $Q_y = 15 \text{ кН}$, $M_z = 0$.

На участке с распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону со сменой знака с плюса на минус. Изгибающий момент на этом участке изменяется по закону квадратной параболы и имеет экстремальное значение в сечении, где поперечная сила равна нулю. Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0 - 1}{4 - x_0} = \frac{21}{15}, \quad x_0 = 2,75 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_z(2,75) = 6 + 21 \cdot 1,75 - 12 \cdot \frac{1,75^2}{2} = 24,4 \text{ кНм}$$

(растянуты нижние волокна).

На участке EA поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет постоянное значение. На участках DB и BC поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях A и B на эпюре Q_y имеются скачки.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.11.

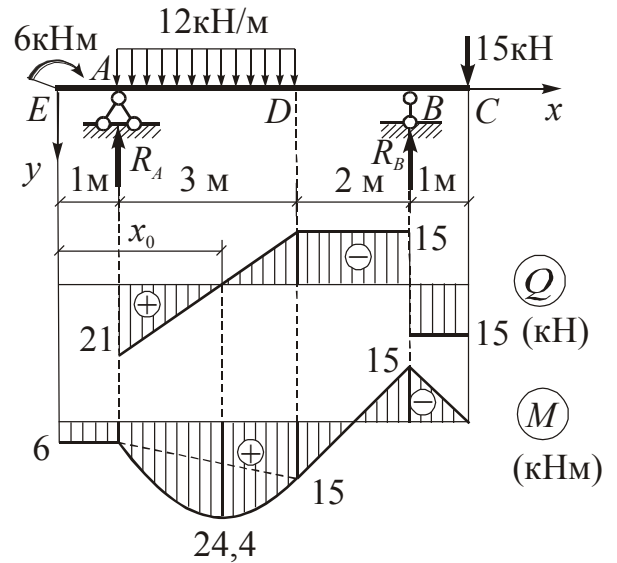


Рис.3.11

Задача 3.8.

Для балки с промежуточным шарниром, изображенной на рис.3.12, построим эпюры Q_y и M_z .

Балка является статически определимой, поскольку для определения трех опорных реакций R_A , R_B и R_D можно составить два уравнения равновесия и дополнительное уравнение $\Sigma M_C = 0$ для левой или правой части балки.

Расчет проведем с помощью так называемой поэтажной схемы. Разрежем мысленно балку по промежуточному шарниру C . Балка CD не может работать самостоятельно и опирается на несущую балку AC .

Вначале произведём расчёт несомой балки CD , имеющей условную шарнирную опору в сечении C .

Определяем опорные реакции.

$$\Sigma M_C = 0, \quad -18 \cdot 1 + 3R_D = 0,$$

$$R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0, \quad 18 \cdot 2 - 3R_C = 0,$$

$$R_C = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)},$$

$$18 - 12 - 6 = 18 - 18 = 0.$$

Выполним расчет несущей балки. Влияние несомой балки CD на несущую балку AC характеризуется действием силы 12 кН , имеющей направление, противоположное направлению условной опорной реакции R_C .

$$\Sigma M_A = 0, \quad -12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 \cdot 4 +$$

$$+ 3R_B = 0, \quad R_B = 34 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 12 \cdot 1 -$$

$$- 3R_A = 0, \quad R_A = 14 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)},$$

$$12 \cdot 3 + 12 - 34 - 14 = 48 - 48 = 0.$$

Вычислим значения Q_y и M_z в характерных сечениях балки.

$$\text{Сечение } x = 0, \quad Q_y = R_A = 14 \text{ кН}, \quad M_z = 0.$$

$$\text{Сечение } x = 3 \text{ м (справа)}, \quad Q_y = 12 \text{ кН}, \quad M_z = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кНм}$$

(растянуты верхние волокна).

$$\text{Сечение } x = 3 \text{ м (слева)}, \quad Q_y = 12 - 34 = -22 \text{ кН}, \quad M_z = -12 \text{ кНм}.$$

$$\text{Сечение } x = 4 \text{ м}, \quad Q_y = 12 \text{ кН}, \quad M_z = 0.$$

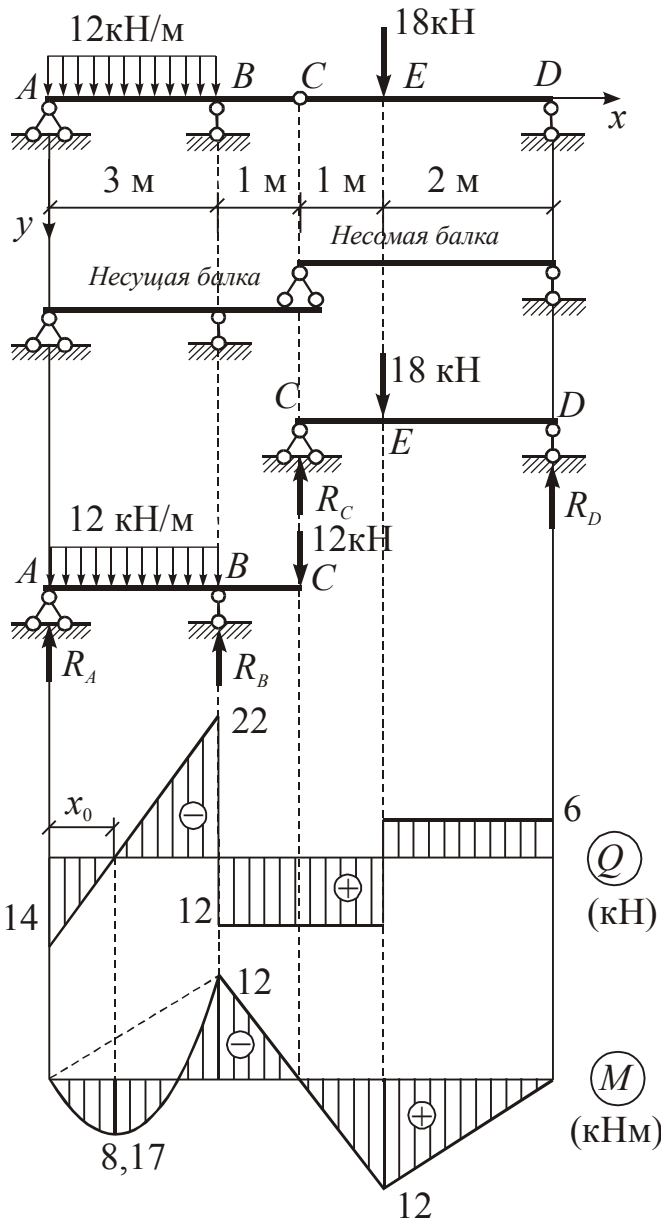


Рис.3.12

Сечение $x = 5$ м (справа), $Q_y = -6$ кН, $M_z = 6 \cdot 2 = 12$ кНм
(растянуты нижние волокна).

Сечение $x = 5$ м (слева), $Q_y = 12$ кН, $M_z = 12 \cdot 1 = 12$ кНм.

Сечение $x = 7$ м, $Q_y = -6$ кН, $M_z = 0$.

Из подобия треугольников на эпюре Q_y определяем координату сечения x_0 , и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0}{3 - x_0} = \frac{14}{22}, \quad x_0 = 1,17 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_z(1,17) = 14 \cdot 1,17 - 12 \cdot \frac{1,17^2}{2} = 8,17 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}.$$

На участках BE и ED поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. В сечениях B и E на эпюре поперечных сил имеются скачки, а на эпюре изгибающих моментов имеются точки излома.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.3.12.

Задача 3.9.

Для балки с наклонным участком, изображенной на рис.3.13, построим эпюры N , Q и M .

Определим опорные реакции.

$$\sum X = 0, \quad H_C = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \quad -18 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 4R_C = 0, \\ R_C = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0, \quad 12 \cdot 6 + 18 \cdot 4 \cdot 2 - 4R_B = 0, \\ R_B = 54 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \\ 12 + 18 \cdot 4 - 54 - 30 = 84 - 84 = 0.$$

При определении продольных и поперечных сил N и Q в пределах наклонного участка надо составить проекции нагрузок и реакций на ось стержня и на нормаль к оси.

Вычислим значения N , Q и M в характерных сечениях балки.

Сечение $x = 0$, $N = 0$, $Q = -12$ кН, $M = 0$.

Сечение $x = 2$ м (слева), $N = 0$,

$Q = -12$ кН, $M = -12 \cdot 2 = -24$ кНм
(растянуты верхние волокна).

Сечение $x = 2$ м (справа),

$N = -(54 - 12) \sin 30^\circ = -21$ кН (сжатие), $Q = (54 - 12) \cos 30^\circ = 36,4$ кН,
 $M = -24$ кНм.

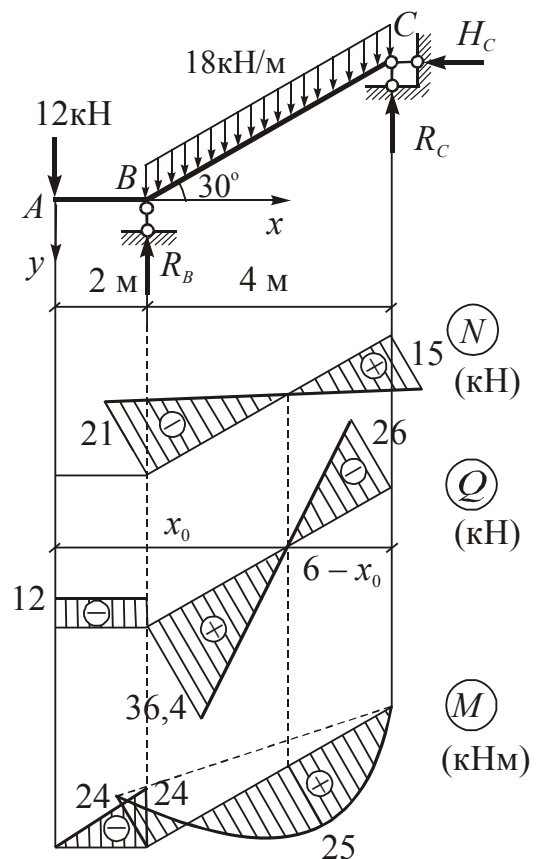


Рис.3.13

Сечение $x = 6$ м,

$N = 30 \sin 30^\circ = 15$ кН, (растяжение).

$Q = -30 \cos 30^\circ = -26$ кН, $M = 0$.

Из подобия треугольников на эпюре Q определяем координату x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0 - 2}{6 - x_0} = \frac{36,4}{26}, \quad x_0 = 4,33 \text{ м}, \quad 6 - x_0 = 1,67 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M(4,33) = 30 \cdot 1,67 - 18 \cdot \frac{1,67^2}{2} = 25 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}.$$

Эпюры N , Q и M приведены на рис. 3.13.

Задача 3.10.

Для консольного ломаного стержня, изображенного на рис.3.14,а, построим эпюры N , Q и M . Предварительное определение опорных реакций в заделке не обязательно.

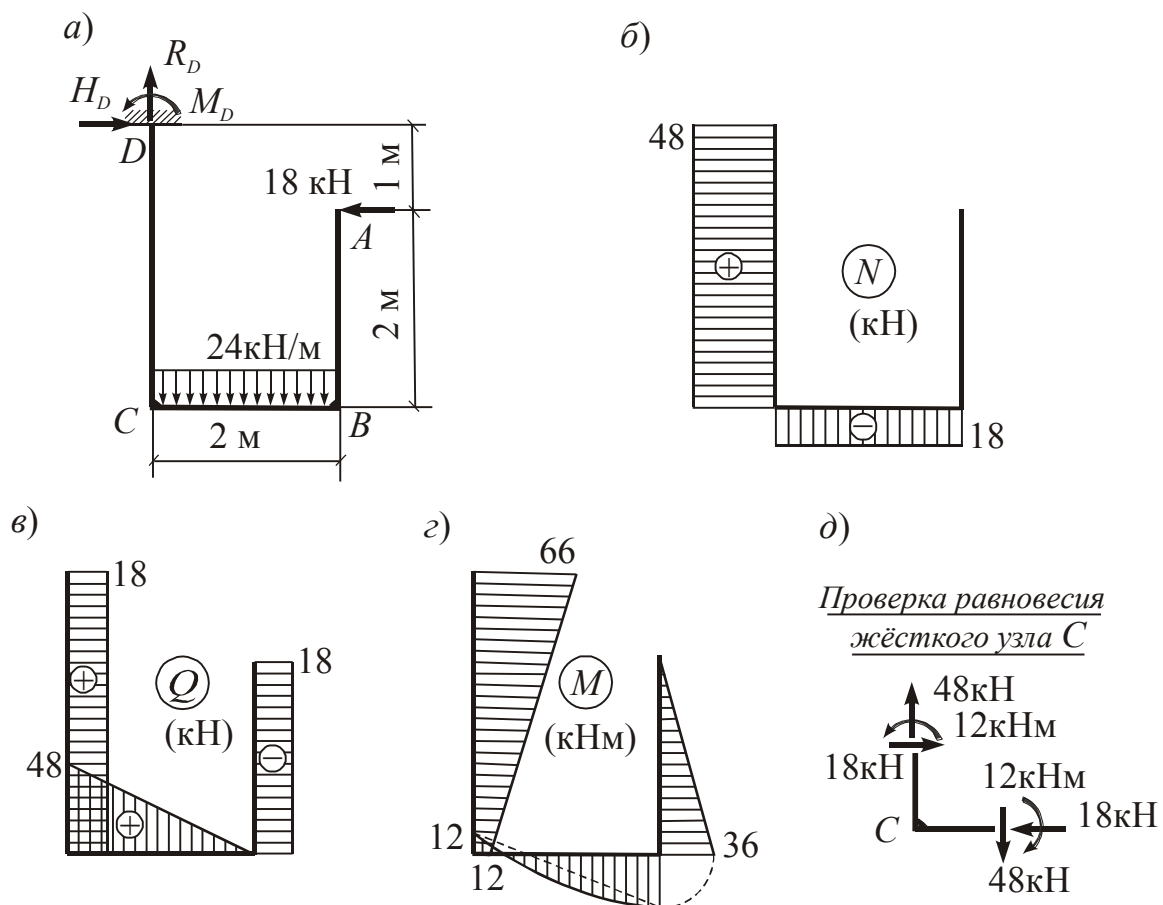


Рис.3.14

Определяем внутренние усилия N , Q и M в характерных сечениях стержней, начиная со свободного конца.

Стержень AB $N_A = N_B = 0$, $Q_A = Q_B = -18$ кН, $M_A = 0$,
 $M_B = 18 \cdot 2 = 36$ кНм (растянуты правые волокна).

Стержень BC $N_B = N_C = -18$ кН (сжатие), $Q_B = 0$, $Q_C = 24 \cdot 2 = 48$ кН,
 $M_B = 36$ кНм (растянуты нижние волокна),
 $M_C = -24 \cdot 2 \cdot 1 + 36 = -12$ кНм (растянуты верхние волокна).

Стержень CD $N_C = N_D = 2 \cdot 24 = 48$ кН (растяжение), $Q_C = Q_D = 18$ кН,
 $M_C = -12$ кНм (растянуты правые волокна),
 $M_D = -24 \cdot 2 \cdot 1 - 18 \cdot 1 = -66$ кНм (растянуты правые волокна).

Эпюры N , Q и M приведены на рис.3.14,б,в,г. Опорные реакции в заделке равны: $H_D = 18$ кН, $R_D = 48$ кН, $M_D = 66$ кНм.

Вырезаем жесткий узел C и проверяем его равновесие под действием усилий в стержнях, сходящихся в узле (рис.3.14,д). Условия равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M_C = 0$ выполняются.

Задача 3.11.

Для стержня с криволинейным участком в виде полуокружности (рис.3.15,а) построим эпюры внутренних усилий N , Q и M .

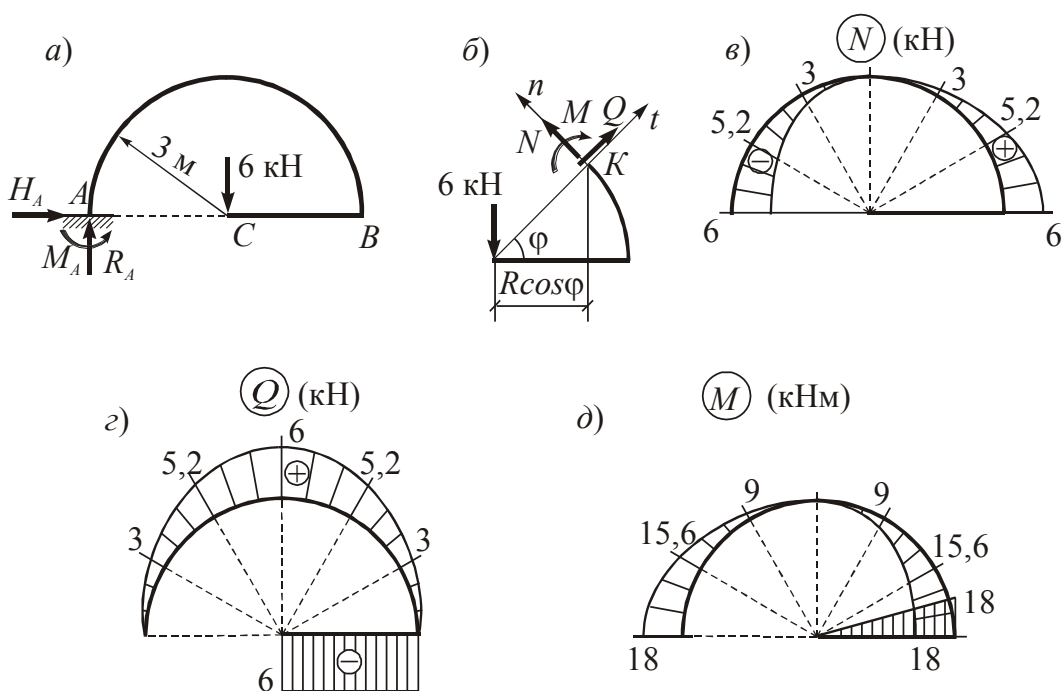


Рис.3.15

Установим законы изменения внутренних усилий на криволинейном участке в зависимости от угла φ . Приравнявая к нулю сумму проекций всех сил на нормаль n и на касательную t к сечению, а также сумму моментов относительно центра тяжести сечения K (рис.3.15,б), получим

$$\begin{aligned} \Sigma n &= 0, & N - 6 \cos \varphi &= 0, & N &= 6 \cos \varphi; \\ \Sigma t &= 0, & Q - 6 \sin \varphi &= 0, & Q &= 6 \sin \varphi; \\ \Sigma M_K &= 0, & -M + 6R \cos \varphi &= 0, & M &= 18 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Последовательно вычисляем

$\varphi = 0,$	$N = 6 \text{ кН},$	$Q = 0,$	$M = 18 \text{ кНм};$
$\varphi = 30^\circ,$	$N = 5,2 \text{ кН},$	$Q = 3 \text{ кН},$	$M = 15,6 \text{ кНм};$
$\varphi = 60^\circ,$	$N = 3 \text{ кН},$	$Q = 5,2 \text{ кН},$	$M = 9 \text{ кНм};$
$\varphi = 90^\circ,$	$N = 0,$	$Q = 6 \text{ кН},$	$M = 0;$
$\varphi = 120^\circ,$	$N = -3 \text{ кН},$	$Q = 5,2 \text{ кН},$	$M = -9 \text{ кНм};$
$\varphi = 150^\circ,$	$N = -5,2 \text{ кН},$	$Q = 3 \text{ кН},$	$M = -15,6 \text{ кНм};$
$\varphi = 180^\circ,$	$N = -6 \text{ кН},$	$Q = 0,$	$M = -18 \text{ кНм}.$

Вычислим значения N , Q и M в характерных сечениях горизонтального стержня BC .

Сечение C : $N = 0$, $Q = -6 \text{ кН}$, $M = 0$.

Сечение B : $N = 0$, $Q = -6 \text{ кН}$, $M = -6 \cdot 3 = -18 \text{ кНм}$
(растянуты верхние волокна).

Откладывая вычисленные значения в рассмотренных сечениях перпендикулярно к оси стержня и соединяя полученные точки, построим эпюры внутренних усилий N , Q и M . Эти эпюры приведены на рис.3.15, в, г, д.

Опорные реакции в заделке равны: $R_A = 6 \text{ кН}$, $H_A = 0$, $M_A = 18 \text{ кНм}$.

Задача 3.12.

Для рамы с шарнирными опорами (рис.3.16, а) построим эпюры N , Q и M .

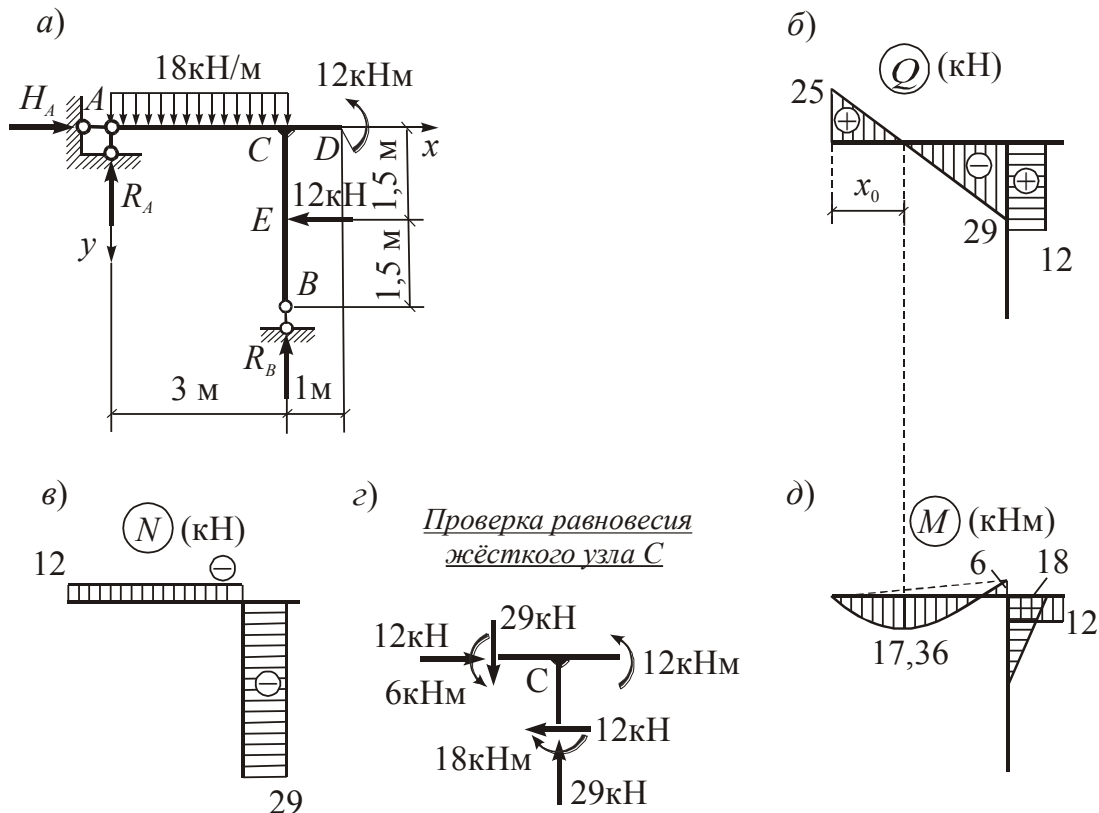


Рис.3.16

Определим величины опорных реакций.

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0, & H_A - 12 &= 0, & H_A &= 12 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A &= 0, & -18 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 - 12 \cdot 1,5 + 3R_B &= 0, & R_B &= 29 \text{ кН}; \\ \Sigma M_B &= 0, & 18 \cdot 3 \cdot 1,5 + 12 + 12 \cdot 1,5 - 12 \cdot 3 - 3R_A &= 0, & R_A &= 25 \text{ кН}; \\ \Sigma Y &= 0 \text{ (проверка)}, & 18 \cdot 3 - 25 - 29 &= 54 - 54 = 0.\end{aligned}$$

Вычисляем внутренние усилия в характерных сечениях каждого участка рамы.

Стержень AD

Сечение A: $N = -12 \text{ кН}, \quad Q = 25 \text{ кН}, \quad M = 0.$

Сечение C (слева): $N = -12 \text{ кН}, \quad Q = 25 - 18 \cdot 3 = -29 \text{ кН},$
 $M = 25 \cdot 3 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 = -6 \text{ кНм}$ (растянуты верхние волокна).

Сечение C (справа): $N = 0, \quad Q = 0, \quad M = 12 \text{ кНм}$
 (растянуты нижние волокна).

Сечение D: $N = 0, \quad Q = 0, \quad M = 12 \text{ кНм}.$

Стержень BC

Сечение B: $N = -29 \text{ кН}, \quad Q = 0, \quad M = 0.$

Сечение E (снизу): $N = -29 \text{ кН}, \quad Q = 0, \quad M = 0.$

Сечение E (сверху): $N = -29 \text{ кН}, \quad Q = 12 \text{ кН}, \quad M = 0.$

Сечение C: $N = -29 \text{ кН}, \quad Q = 12 \text{ кН}, \quad M = -12 \cdot 1,5 = -18 \text{ кНм}$
 (растянуты правые волокна).

Из подобия треугольников на эпюре Q (рис.3.16,б) определяем координату x_0 , где поперечная сила обращается в нуль, и для этого сечения вычисляем экстремальное значение изгибающего момента.

$$\frac{x_0}{3 - x_0} = \frac{25}{29}, \quad x_0 = 1,39 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M(1,39) = 25 \cdot 1,39 - 18 \cdot \frac{1,39^2}{2} = 17,36 \text{ кНм (растянуты нижние волокна)}.$$

Эпюры N , Q и M приведены на рис.3.16,б,в,д.

Вырежем мысленно узел C и проверим его равновесие под действием внутренних усилий в стержнях, сходящихся в узле (рис.3.16,з). Нетрудно видеть, что уравнения равновесия $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$ выполняются.

Задача 3.13.

Для консольной балки (рис.3.17,а) изображена эпюра изгибающих моментов (рис.3.17,б). Определим нагрузку, действующую на балку, опорные реакции и построим эпюру поперечных сил.

На участке BC эпюра M_z имеет вид наклонной прямой. Растянуты верхние волокна балки. Следовательно, к концу балки приложена сосредоточенная сила, направленная вниз и равная

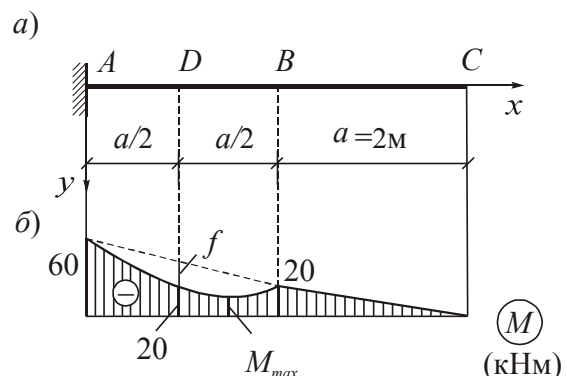


Рис.3.17

$$P_1 = \frac{M_B}{a} = \frac{20}{2} = 10 \text{ кН}.$$

На участке AB эпюра M_z имеет вид квадратной параболы. Следовательно, на этом участке на балку действует равномерно распределенная нагрузка q , направленная вниз. Величину q определим по абсолютным значениям изгибающих моментов M_A , M_B и M_D и по величине “стрелки” $f = qa^2/8$ квадратной параболы в середине участка AB .

Согласно свойству средней линии трапеции, имеем

$$f + M_D = \frac{M_A + M_B}{2}.$$

Отсюда получим

$$q = \frac{4(M_A + M_B) - 8M_D}{a^2} = \frac{4(60 + 20) - 8 \cdot 20}{4} = 40 \text{ кН/м}.$$

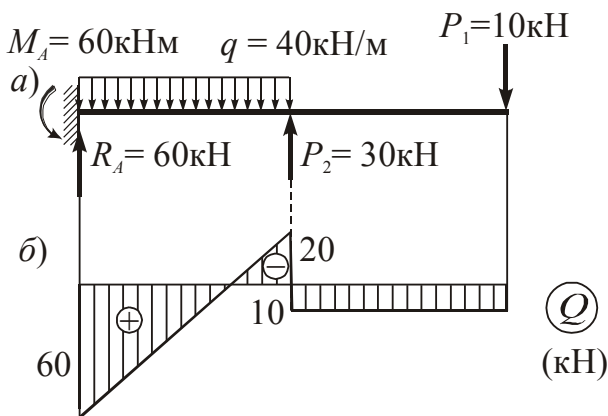


Рис.3.18

В сечении B на эпюре M_z имеется излом. Следовательно, в этом сечении приложена сосредоточенная сила P_2 , направленная вверх. Величину силы найдем по значению изгибающего момента в заделке

$$M_A = -60 \text{ кНм:}$$

$$\begin{aligned} M_A &= -P_1 2a + P_2 a - \frac{qa^2}{2} = \\ &= -10 \cdot 2 \cdot 2 + 2P_2 - \frac{40 \cdot 2^2}{2} = -60 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Отсюда получим $P_2 = 30 \text{ кН}$.

На рис.3.18,а показаны нагрузки, действующие на балку, и опорные реакции. Эпюра поперечных сил приведена на рис.3.18,б.

Задача 3.14.

Для шарнирно опертой балки с консолью (рис.3.19,а) изображена эпюра изгибающих моментов (рис.3.19,б). Определим нагрузку, действующую на балку, опорные реакции и построим эпюру поперечных сил.

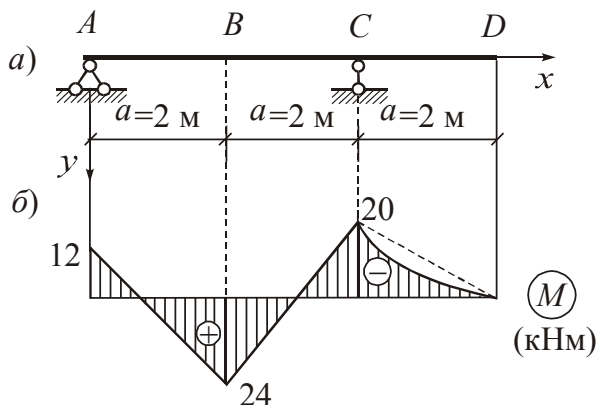


Рис.3.19

На консольной части CD балки действует равномерно распределенная нагрузка, направленная вниз, которую определим по величине изгибающего момента в сечении C :

$$M_C = \frac{qa^2}{2}, \quad q = \frac{2 \cdot 20}{2^2} = 10 \text{ кН/м}.$$

В сечении A к балке приложен момент $M = 12 \text{ кНм}$ (рис.3.19,а), вы-

зывает растяжение верхних волокон, а в сечении B – сосредоточенная сила P , направленная вниз. Величины силы P и опорных реакций R_A и R_B проще всего определить, предварительно построив эпюру поперечных сил, используя дифференциальную зависимость

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ где } \alpha - \text{угол наклона линии эпюры } M_z \text{ к оси балки.}$$

На участке AB (M_z возрастает, $Q_y > 0$).

$$Q_y = \frac{M_B - M_A}{a} = \frac{24 - (-12)}{2} = 18 \text{ кН.}$$

На участке BC (M_z убывает, $Q_y < 0$).

$$Q_y = \frac{M_C - M_B}{a} = \frac{-20 - 24}{2} = -22 \text{ кН.}$$

На участке CD (M_z возрастает, $Q_y > 0$).

$$Q_D = 0, \quad Q_C = qa = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН.}$$

Схема нагрузки и эпюра поперечных сил приведены на рис.3.20, а, б.

По величинам скачков на эпюре поперечных сил находим

$$P = 22 + 18 = 40 \text{ кН}; \quad R_C = 20 + 22 = 42 \text{ кН}, \quad R_A = Q_A = 18 \text{ кН.}$$

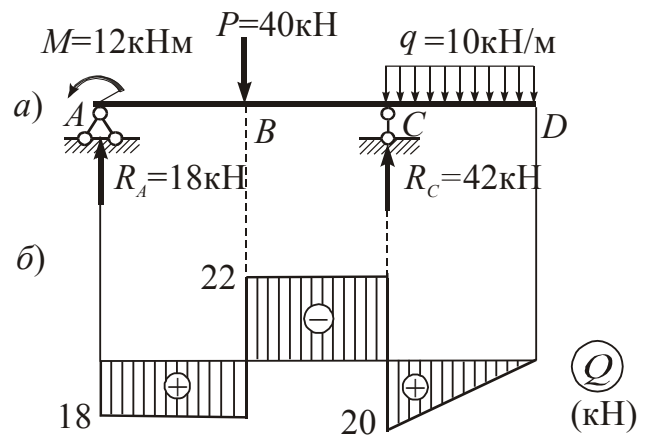


Рис.3.20

ГЛАВА 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В БАЛКАХ ПРИ ИЗГИБЕ И РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

4.1. Основные определения и формулы

При прямом изгибе балки в плоскости Oxy в её поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения

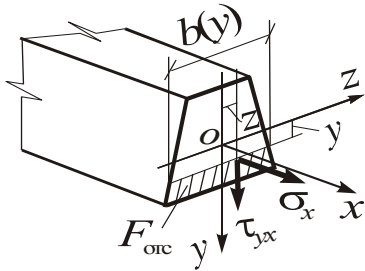


Рис.4.1

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y; \quad (4.1)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{Q_y S_{отс}(y)}{J_z b(y)}. \quad (4.2)$$

В этих формулах M_z и Q_y – изгибающий момент и поперечная сила; $S_{отс}(y)$ – статический момент отсечённой площади сечения $F_{отс}$ относительно нейтральной оси Oz ; $b(y)$ – ширина сечения (рис.4.1).

Из формулы (4.1) следует, что нормальные напряжения σ_x принимают наибольшее и наименьшее значения в нижних ($y = h_n$) и в верхних ($y = -h_b$) волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси (рис.4.2, а, б).

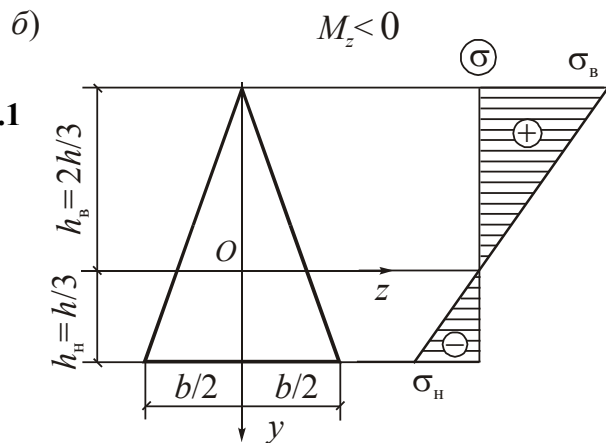
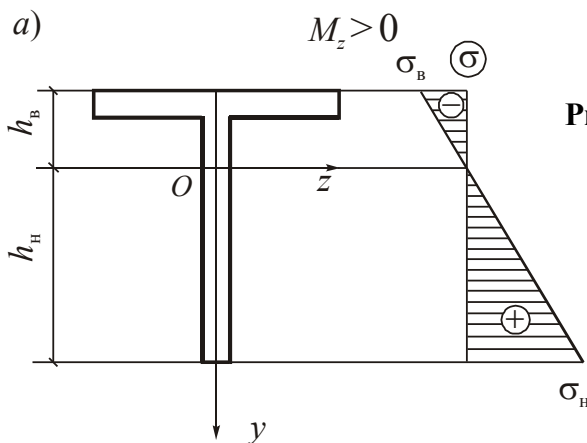


Рис.4.1

Рис.4.2

При этом

$$\sigma_n = \frac{M_z}{W_n}, \quad \sigma_b = -\frac{M_z}{W_b}, \quad (4.3)$$

где

$$W_n = \frac{J_z}{h_n}, \quad W_b = \frac{J_z}{h_b}. \quad (4.4)$$

Величины W_n и W_b называются моментами сопротивления сечения для нижних и верхних волокон.

Наибольшие по абсолютной величине напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{|M_z|}{W_{\text{нм}}}, \quad (4.5)$$

где $W_{\text{нм}}$ – меньший из моментов сопротивления $W_{\text{н}}$ и $W_{\text{в}}$.

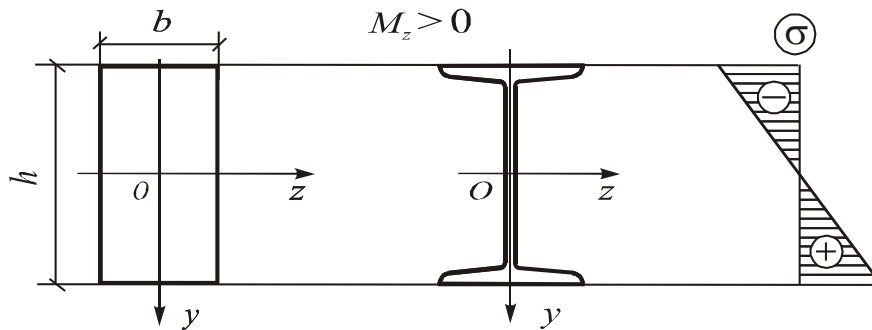


Рис.4.3

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси (рис.4.3), $h_{\text{н}} = h_{\text{в}} = h/2$ и $W_{\text{н}} = W_{\text{в}} = W = J_z/0,5h$. При этом наибольшие напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W}. \quad (4.6)$$

В балках прямоугольного сечения касательные напряжения τ_{yx} изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы. Наибольшие значения они имеют в точках на уровне нейтральной оси (рис.4.4,а).

Значения $\tau_{\text{нб}} = \tau_{\text{max}}$ и τ_1 на уровне сопряжения полки и стенки двутавра (рис.4.4,б) вычисляются по формулам

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y S_{1/2}}{J_z d}, \quad \tau_1 = \frac{Q_y S_{\text{п}}}{J_z d}, \quad (4.7)$$

где $S_{1/2}$ – статический момент половины сечения двутавра; $S_{\text{п}}$ – статический момент полки. При этом

$$S_{\text{п}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right). \quad (4.8)$$

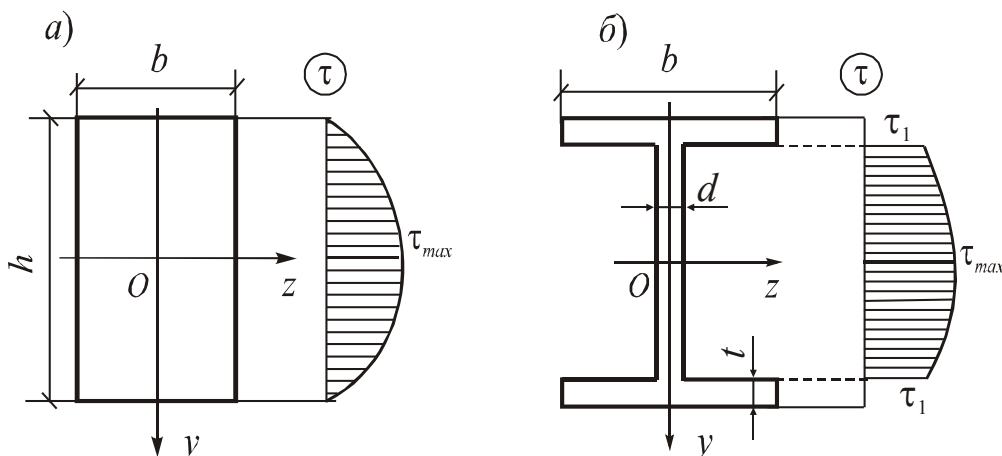


Рис.4.4

При изгибе балки величины главных напряжений σ_1 и σ_2 и углы наклона нормалей к главным площадкам α_1 и α_2 определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{yx}^2}; \quad (4.9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2}. \quad (4.10)$$

При расчёте изгибаемых элементов строительных конструкций на прочность применяется метод расчёта по предельным состояниям. В этом случае условие прочности по нормальным напряжениям записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} \leq \gamma_c R, \quad (4.11)$$

где R – расчётное сопротивление материала балки, а γ_c – коэффициент условий работы.

Для хрупких материалов расчётное сопротивление при растяжении R_p существенно меньше, чем при сжатии R_c . В этом случае должны выполняться условия прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям

$$\sigma_p^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_p, \quad \sigma_c^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_c. \quad (4.12)$$

В случае расчёта на прочность по методу допускаемых напряжений в формулах (4.11) и (4.12) величины в правых частях необходимо заменить соответственно на $[\sigma]$, $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$.

Для балок из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, с поперечным сечением, симметричным относительно нейтральной оси, условие прочности (4.11) записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (4.13)$$

Для сечений, несимметричных относительно нейтральной оси (типа тавра и др.)

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R. \quad (4.14)$$

В формулах (4.13) и (4.14) $M_{\text{расч}} = \gamma_f M_{\text{нб}}$ – наибольший изгибающий момент в опасном сечении балки от действия расчётных нагрузок, γ_f – коэффициент надёжности по нагрузке.

С использованием условий прочности (4.11) – (4.14) решаются следующие задачи: *проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности (грузоподъёмности).*

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при известных нагрузках, форме и размерах сечения и свойствах материала.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при известных нагрузках и свойствах материала. В этом случае ис-

пользуются расчётные формулы, получаемые из условий прочности (4.13) или (4.14)

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} \quad \text{или} \quad W_{\text{нм}} \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R}. \quad (4.15)$$

При решении задачи по определению грузоподъёмности балки вначале из условия прочности (4.13) или (4.14) находится величина расчётного значения изгибающего момента

$$M_{\text{расч}} \leq \gamma_c R W \quad \text{или} \quad M_{\text{расч}} \leq \gamma_c R W_{\text{нм}}, \quad (4.16)$$

затем по известному значению $M_{\text{расч}}$ определяются соответствующие величины нагрузок.

В некоторых случаях возникает необходимость использования условий прочности по наибольшим касательным напряжениям

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s, \quad (4.17)$$

где R_s – расчётное сопротивление материала при сдвиге.

Работа балки за пределом упругости материала зависит от вида диаграммы $\sigma = f(\varepsilon)$. Примем, что для материала балки можно использовать диаграмму Прандтля (рис.4.5,а). Согласно этой диаграмме при напряжениях, меньших предела текучести ($\sigma_x < \sigma_T$), справедлив закон Гука, а при $\sigma_x = \sigma_T$ деформации неограниченно возрастают.

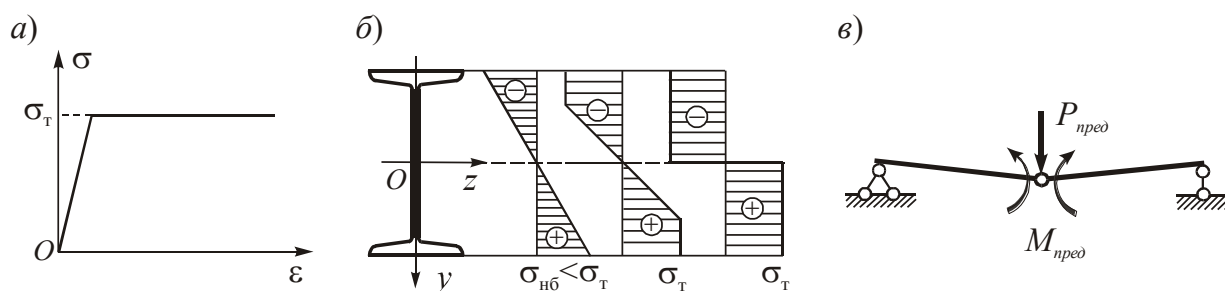


Рис.4.5

В случае изгиба балки при постепенном увеличении нагрузки напряжения в крайних волокнах опасного сечения достигают предела текучести σ_T и возникают пластические деформации. При дальнейшем увеличении нагрузки пластические деформации распространяются вглубь сечения балки (рис.4.5,б). Предельное состояние ($M_z = M_{\text{пред}}$) наступает, когда напряжения во всех волокнах в нижней и верхней частях балки достигают значения $\sigma_x = \sigma_T$. В опасном сечении балки возникает так называемый *пластический шарнир* (рис.4.5,в).

Предельный момент в пластическом шарнире определяется по формуле

$$M_{\text{пред}} = \sigma_T W_T. \quad (4.18)$$

Величина W_T – называется *пластическим моментом сопротивления*. Для симметричных сечений она равна

$$W_T = 2S_{1/2} = 2 \int_{F/2} y dF \quad (4.19)$$

Определив предельный момент, можно найти величину коэффициента запаса как отношение предельного момента к наибольшему изгибающему моменту от действия нормативных нагрузок:

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} \quad (4.20)$$

4.2. Примеры решения задач

Задача 4.1.

Для балки, показанной на рис.4.6, построим эпюры Q_y и M_z , подберём сечение балки в виде стального прокатного двутавра. В расчётах примем коэффициент надёжности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1,0$, расчётное сопротивление $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, расчётное сопротивление при сдвиге $R_s = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2$, предел текучести $\sigma_T = 230 \text{ МПа} = 23 \text{ кН/см}^2$.

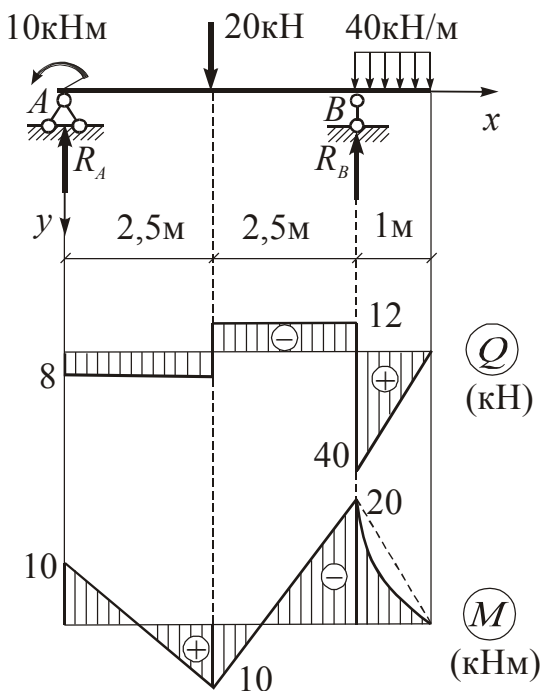


Рис.4.6

Расчёт начнём с определения опорных реакций и построения эпюр Q_y и M_z .

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 5 - 40 \cdot 1 \cdot 5,5 - 20 \cdot 2,5 + 10 = 0,$$

$$R_B = 52 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 5 + 10 + 20 \cdot 2,5 - 40 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,$$

$$R_A = 8 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 20 + 40 \cdot 1 - 8 - 52 = 60 - 60 = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.4.6. Опасным сечением является сечение над опорой B, где $Q = Q_{\text{нб}} = 40 \text{ кН}$ и $M = M_{\text{нб}} = 20 \text{ кНм}$.

Вычислим расчётные значения наибольшего изгибающего момента и наибольшей поперечной силы:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} \gamma_f = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кНм};$$

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} \gamma_f = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ кН}$$

и требуемый момент сопротивления

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} = \frac{24 \cdot 10^2}{1,0 \cdot 21} = 115 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр $\text{I}18$ и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения (рис.4.7).

$$h = 18 \text{ см}, \quad b = 9 \text{ см}, \quad d = 0,51 \text{ см}, \quad t = 0,81 \text{ см};$$

$$J_z = 1290 \text{ см}^4, \quad W = 143 \text{ см}^3, \quad S_{1/2} = 81,4 \text{ см}^3.$$

Вычисляем статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси Oz

$$S_{\pi} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 9 \cdot 0,81 \left(\frac{18}{2} - \frac{0,81}{2} \right) = 62,7 \text{ см}^3.$$

Для опасного сечения, где Q_y и M_z имеют наибольшие значения, построим эпюры σ_x и τ_{yx} . С этой целью найдём характерные значения напряжений и проверим прочность балки по нормальным и касательным напряжениям:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} = \frac{24 \cdot 10^2}{143} =$$

$$= 16,8 \text{ кН/см}^2 = 168 \text{ МПа} < \gamma_c R = 210 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{расч}} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{48 \cdot 81,4}{1290 \cdot 0,51} = 5,93 \text{ кН/см}^2 = 59,3 \text{ МПа} < \gamma_c R_s = 130 \text{ МПа};$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\text{расч}} S_{\pi}}{J_z d} = \frac{48 \cdot 62,7}{1290 \cdot 0,51} = 4,57 \text{ кН/см}^2 = 45,7 \text{ МПа}.$$

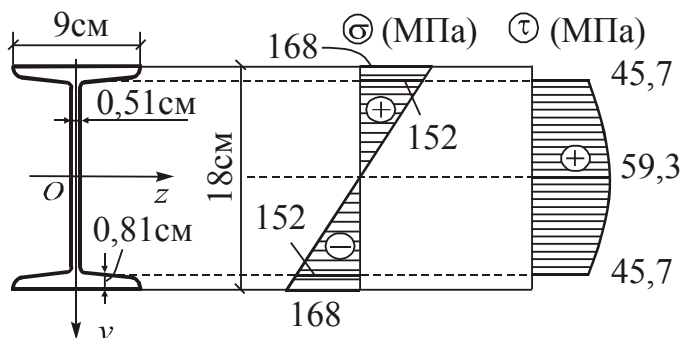


Рис.4.7

Эпюры нормальных напряжений σ_x и касательных напряжений τ_{yx} в стенке двутавра приведены на рис.4.7.

Вычислим значения главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам в опасном сечении балки в стенке двутавра на уровне её сопряжения с полкой ($y = 9 - 0,81 = 8,19$ см) в зоне растяжения.

$$\sigma_x = \frac{M_{\text{расч}}}{J_z} y = \frac{24 \cdot 10^2}{1290} \cdot 8,19 = 15,2 \text{ кН/см}^2 = 152 \text{ МПа}, \quad \tau_{yx} = \tau_1 = 45,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{152}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{152}{2} \right)^2 + 45,7^2} = 76 \pm 88,7,$$

$$\sigma_1 = 164,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -12,7 \text{ МПа};$$

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1} = \frac{45,7}{164,7} = 0,277, \quad \alpha_1 = 15,5^\circ;$$

$$\text{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2} = \frac{45,7}{-12,7} = -3,60, \quad \alpha_2 = -74,5^\circ.$$

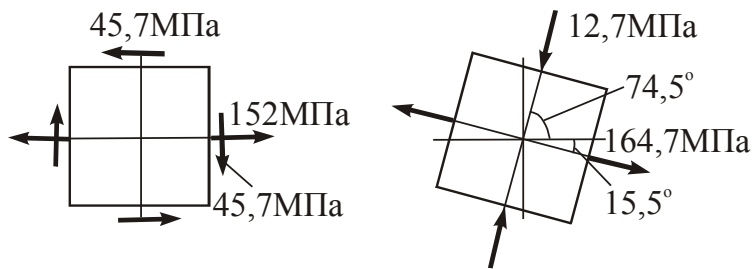


Рис.4.8

На рис.4.8 показаны нормальные, касательные и главные напряжения, действующие на гранях бесконечно малых элементов, выделенных из стенки двутавра на уровне сопряжения с полкой.

Вычисляем значение предельного момента в пластической стадии деформирования. С учётом формул (4.18) и (4.19), имеем

$$M_{\text{пред}} = 2\sigma_T S_{1/2} = 2 \cdot 23 \cdot 81,4 = 3744,4 \text{ кНсм} = 37,4 \text{ кНм}.$$

Пластический шарнир образуется в сечении над опорой B , где действует наибольший изгибающий момент.

Вычислим величину коэффициента запаса

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} = \frac{37,4}{20} = 1,87.$$

Задача 4.2.

Для балки, показанной на рис.4.9, построим эпюры Q_y и M_z , подберём сечение балки в виде стального прокатного двутавра.

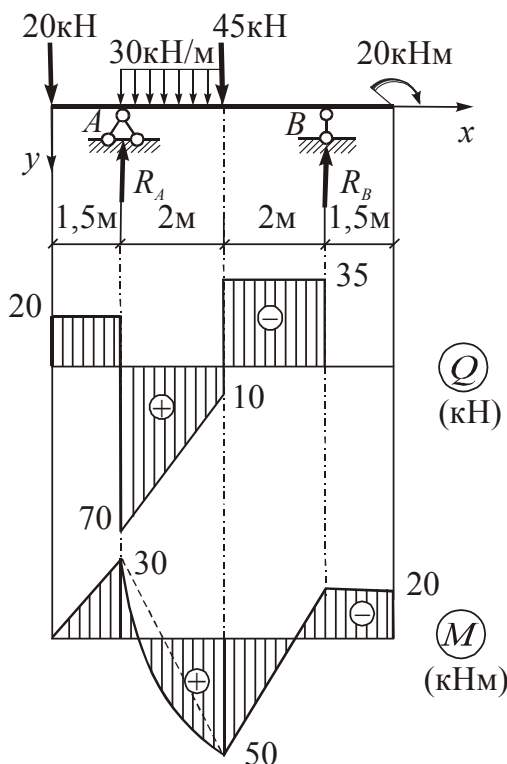


Рис.4.9

В расчётах примем $\gamma_f = 1,2$, $\gamma_c = 0,9$, $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $R_s = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_T = 230 \text{ МПа} = 23 \text{ кН/см}^2$.

Определим опорные реакции и построим эпюры Q_y и M_z :

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot 4 + 20 \cdot 1,5 - 30 \cdot 2 \cdot 1 - 45 \cdot 2 - 20 = 0, \quad R_B = 35 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, \quad -R_A \cdot 4 + 20 \cdot 5,5 + 30 \cdot 2 \cdot 3 + 45 \cdot 2 - 20 = 0, \quad R_A = 90 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad 20 + 30 \cdot 2 + 45 - 90 - 35 = 125 - 125 = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис.4.9. Поперечная сила Q_y имеет наибольшее значение в сечении над опорой A ($x = 1,5 \text{ м}$), а изгибающий момент M_z – в сечении $x = 3,5 \text{ м}$.

Вычислим расчётные значения наибольшего изгибающего момента и поперечной силы для опасного сечения ($x = 3,5 \text{ м}$)

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} \gamma_f = 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ кНм};$$

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} \gamma_f = 35 \cdot 1,2 = 42 \text{ кН}.$$

Требуемый момент сопротивления равен

$$W \geq \frac{M_{\text{расч}}}{\gamma_c R} = \frac{60 \cdot 10^2}{0,9 \cdot 21} = 318 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр $\text{I}27$ и выписываем необходимые геометрические характеристики сечения (рис.4.10,а).

$$h = 27 \text{ см}, \quad b = 12,5 \text{ см}, \quad d = 0,6 \text{ см}, \quad t = 0,98 \text{ см};$$

$$J_z = 5010 \text{ см}^4, \quad W = 371 \text{ см}^3, \quad S_{1/2} = 210 \text{ см}^3.$$

Вычисляем статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси Oz

$$S_{\text{п}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 12,5 \cdot 0,98 \left(\frac{27}{2} - \frac{0,98}{2} \right) = 159,4 \text{ см}^3.$$

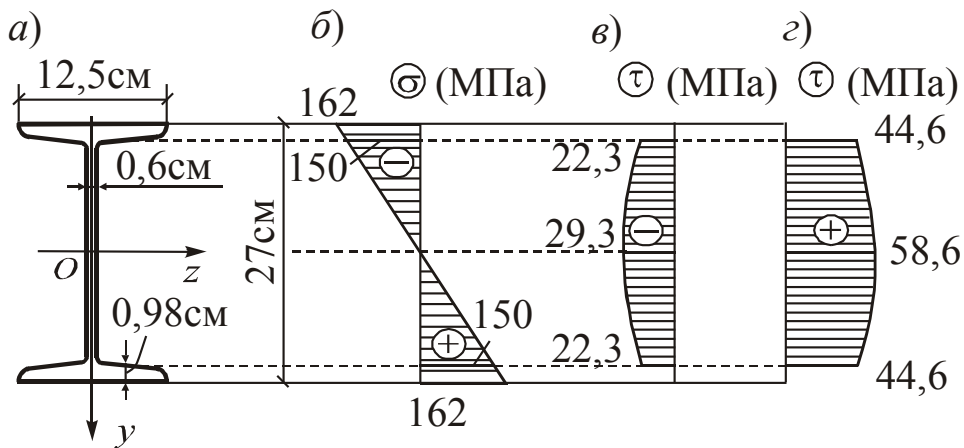


Рис.4.10

Для опасного сечения построим эпюры σ_x и τ_{yx} . Определим наибольшее значение нормальных напряжений и проверим выполнение условия прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W} = \frac{60 \cdot 10^2}{371} = 16,2 \text{ кН/см}^2 = 162 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа};$$

Найдём характерные значения касательных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{расч}} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{42 \cdot 210}{5010 \cdot 0,6} = 2,93 \text{ кН/см}^2 = 29,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{\text{расч}} S_{\text{п}}}{J_z d} = \frac{42 \cdot 159,4}{5010 \cdot 0,6} = 2,23 \text{ кН/см}^2 = 22,3 \text{ МПа}.$$

Эпюры напряжений σ_x и τ_{yx} для опасного сечения ($x = 3,5 \text{ м}$) приведены на рис.4.10,б,в.

Для построения эпюры τ_{yx} в сечении $x = 1,5$ м, где Q_y имеет наибольшее значение, и проверки условия прочности по касательным напряжениям найдём $\tau_{нб}$ и τ_1 . Учитывая, что для этого сечения

$$Q_{расч} = Q_{нб} \gamma_f = 70 \cdot 1,2 = 84 \text{ кН} ,$$

получим

$$\begin{aligned} \tau_{нб} &= \frac{Q_{расч} S_{1/2}}{J_z d} = \frac{84 \cdot 210}{5010 \cdot 0,6} = 5,86 \text{ кН/см}^2 = \\ &= 58,6 \text{ МПа} < \gamma_c R_s = 0,9 \cdot 130 = 117 \text{ МПа} ; \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{Q_{расч} S_{п}}{J_z d} = \frac{84 \cdot 159,4}{5010 \cdot 0,6} = 4,46 \text{ кН/см}^2 = 44,6 \text{ МПа} .$$

Эпюра τ_{yx} для сечения $x = 1,5$ м показана на рис.4.10,з.

Вычислим значения главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам в опасном сечении балки, в стенке, на уровне её сопряжения с полкой ($y = 13,5 - 0,98 = 12,52$ см) в зоне растяжения.

Учитывая, что в этом случае

$$\sigma_x = \frac{M_{расч}}{J_z} y = \frac{60 \cdot 10^2}{5010} \cdot 12,52 = 15,0 \text{ кН/см}^2 = 150 \text{ МПа} , \quad \tau_{yx} = \tau_1 = -22,3 \text{ МПа} ,$$

получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{150}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{150}{2}\right)^2 + (-22,3)^2} = 75 \pm 78,2 ;$$

$$\sigma_1 = 153,2 \text{ МПа} , \quad \sigma_2 = -3,2 \text{ МПа} ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_1} = \frac{-22,3}{153,2} = -0,146 , \quad \alpha_1 = -8,3^\circ ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_2} = \frac{-22,3}{-3,2} = 6,969 , \quad \alpha_2 = 81,7^\circ .$$

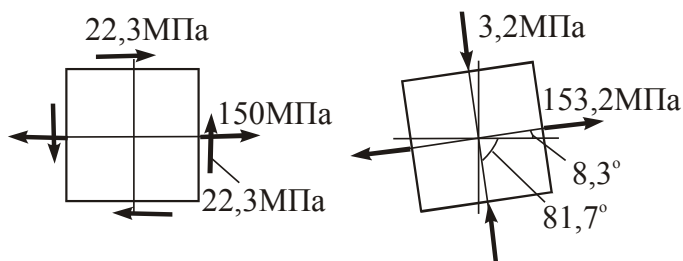


Рис.4.11

На рис.4.11 показаны нормальные, касательные и главные напряжения, действующие на гранях бесконечно малых элементов, выделенных из стенки двутавра на уровне сопряжения с полкой.

Вычисляем значение предельного момента в пластической стадии деформирования.

$$M_{пред} = 2\sigma_T S_{1/2} = 2 \cdot 23 \cdot 210 = 9660 \text{ кНсм} = 96,6 \text{ кНм} .$$

Пластический шарнир образуется в опасном сечении ($x = 3,5$ м) , где действует наибольший изгибающий момент.

Величина коэффициента запаса равна

$$n = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{нб}}} = \frac{96,6}{50} = 1,93.$$

Задача 4.3.

Для стальной балки указанного на рис.4.12,б сечения определим из условия прочности по методу предельных состояний наибольшую допустимую нагрузку q . Построим эпюру σ_x для опасного сечения. В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 0,9$.

Определяем опорные реакции.

$$\Sigma M_A = 0, \quad -q \cdot 5 \cdot 2,5 - 2q \cdot 1 \cdot 5,5 + 5R_B = 0, \quad R_B = 4,7q;$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad q \cdot 5 \cdot 2,5 - 2q \cdot 1 \cdot 0,5 - 5R_A = 0, \quad R_A = 2,3q;$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad q \cdot 5 + 2q \cdot 1 - 2,3q - 4,7q = 7q - 7q = 0.$$

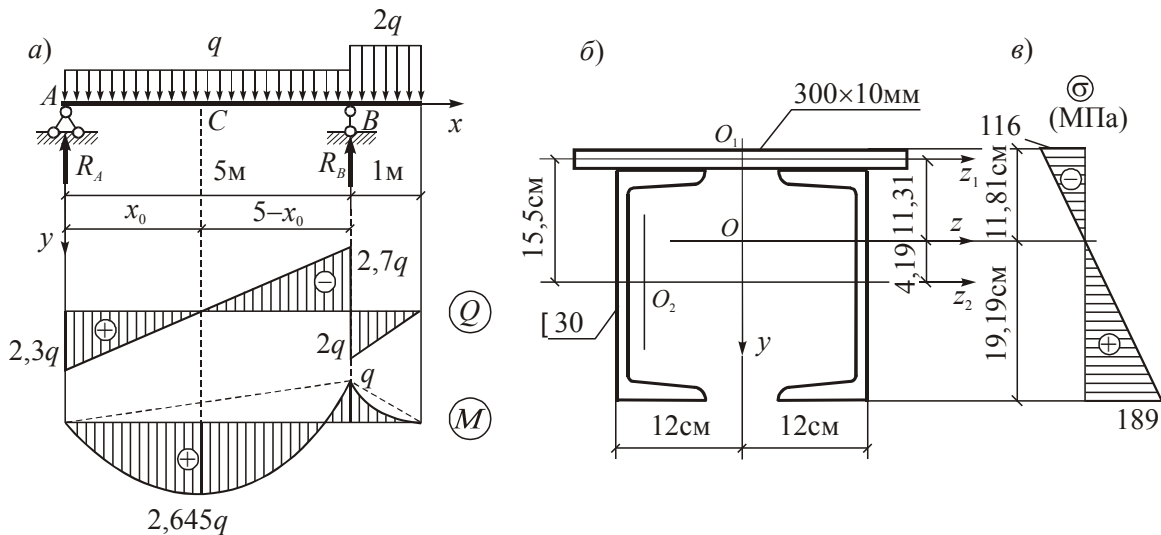


Рис.4.12

Строим эпюры Q_y и M_z (рис.4.12,а). Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете. Из пропорции находим

$$\frac{2,3q}{x_0} = \frac{2,7q}{5 - x_0}, \quad x_0 = 2,3 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = M_z(2,3) = R_A x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = 2,645q.$$

Определяем положение центра тяжести сечения и моменты сопротивления для верхних и нижних волокон балки (рис.4.12,б). Данные для сечения прокатного швеллера [30 берем из сортамента.

$$S_{z_2} = 30 \cdot 1 \cdot (-15,5) = -465 \text{ см}^3;$$

$$y_0 = \frac{S_{z_2}}{F} = -\frac{465}{2 \cdot 40,5 + 30 \cdot 1} = -4,19 \text{ см};$$

$$J_z = 2(5810 + 40,5 \cdot 4,19^2) + \left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot 11,31^2 \right) = 16882 \text{ см}^4;$$

$$W_B = \frac{16882}{11,81} = 1429 \text{ см}^3, \quad W_H = \frac{16882}{19,19} = 880 \text{ см}^3.$$

Поскольку материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($R_p = R_c = R$), то достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности (4.14) в сечении с наибольшим изгибающим моментом (сечение С).

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_H} \leq \gamma_c R.$$

Из этого условия находим

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 2,645 \cdot 10^4 q \leq W_H \gamma_c R = 880 \cdot 21 \cdot 0,9.$$

Отсюда находим наибольшую допустимую нагрузку

$$q = 0,629 \text{ кН/см} = 62,9 \text{ кН/м}.$$

Числовой коэффициент 2,645 в выражении для $M_{\text{расч}}$ имеет размерность м^2 . Поэтому для выражения $M_{\text{расч}}$ в кНсм надо ввести множитель 10^4 .

Определяем значения нормальных напряжений в крайних волокнах балки в сечении С.

$$\sigma_H = \frac{M_C}{W_H} = \frac{2,645 \cdot 10^4 \cdot 0,629}{880} = 18,9 \text{ кН/см}^2 = 189 \text{ МПа} = \gamma_c R = 189 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{M_C}{W_B} = -\frac{2,645 \cdot 10^4 \cdot 0,629}{1429} = -11,6 \text{ кН/см}^2 = -116 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.

Эпюра σ_x для сечения С приведена на рис.4.12,в.

Задача 4.4.

Для балки указанного сечения (рис.4.13) определим наибольшую допустимую нагрузку q из условия прочности по нормальным напряжениям и построим эпюру σ в опасном сечении. В расчетах примем $R = 210 \text{ МПа} = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$.

Определяем опорные реакции.

$$\Sigma M_A = 0, \quad q \cdot 1 \cdot 0,5 - q \cdot 2 \cdot 3 + 4R_B = 0, \quad R_B = 1,375q;$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad q \cdot 1 \cdot 4,5 + q \cdot 2 \cdot 1 - 4R_A = 0, \quad R_A = 1,625q;$$

$$\Sigma Y = 0 \text{ (проверка)}, \quad q \cdot 1 + q \cdot 2 - 1,625q - 1,375q = 3q - 3q = 0.$$

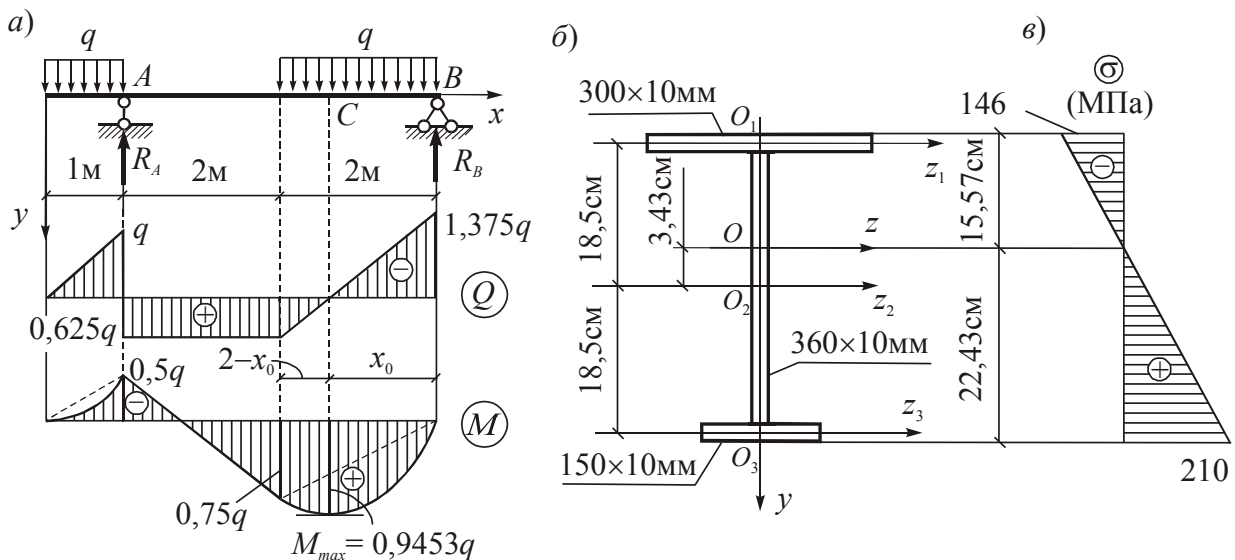


Рис.4.13

Строим эпюры Q_y и M_z (рис.4.13,а). Определяем экстремальное значение изгибающего момента в пролете. Из пропорции находим:

$$\frac{1,375q}{x_0} = \frac{0,625q}{2-x_0}, \quad x_0 = 1,375 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_z(1,375) = R_B x_0 - \frac{q x_0^2}{2} = 0,9453q.$$

Числовые коэффициенты у изгибающих моментов имеют размерность м^2 .

Определяем положение центра тяжести сечения и моменты сопротивления для верхних и нижних волокон сечения (рис.4.13,б).

$$S_{z_2} = 30 \cdot 1 \cdot (-18,5) + 15 \cdot 1 \cdot 18,5 = -277,5 \text{ см}^3;$$

$$y_0 = \frac{S_{z_2}}{F} = -\frac{277,5}{30 \cdot 1 + 36 \cdot 1 + 15 \cdot 1} = -3,43 \text{ см};$$

$$J_z = \frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot (18,5 - 3,43)^2 + \frac{1 \cdot 36^3}{12} + 36 \cdot 3,43^2 + \frac{15 \cdot 1^3}{12} + 15 \cdot (18,5 + 3,43)^2 \cdot 15 = 18364 \text{ см}^4;$$

$$W_B = \frac{J_z}{h_B} = \frac{18364}{15,57} = 1179 \text{ см}^3, \quad W_H = \frac{J_z}{h_H} = \frac{18364}{22,43} = 818,7 \text{ см}^3.$$

Поскольку материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, достаточно обеспечить выполнение одного условия прочности (4.14) в сечении с наибольшим изгибающим моментом

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_H} \leq \gamma_c R;$$

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 0,9453 \cdot 10^4 q \leq W_H \gamma_c R = 818,7 \cdot 21 \cdot 1,0 .$$

Отсюда находим: $q = 1,82 \text{ кН/см} = 182 \text{ кН/м}$. Размерность числового коэффициента у изгибающего момента переведена в сантиметры.

Определяем напряжения в крайних волокнах балки в сечении C .

$$\sigma_H = \frac{M_C}{W_H} = \frac{0,9453 \cdot 10^4 \cdot 1,82}{818,7} = 21 \text{ кН/см}^2 = 210 \text{ МПа} = \gamma_c R = 210 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_B = -\frac{M_C}{W_B} = -\frac{0,9453 \cdot 10^4 \cdot 1,82}{1179} = -14,6 \text{ кН/см}^2 = -146 \text{ МПа} .$$

Прочность балки обеспечена. Эпюра σ_x приведена на рис.4.13,в.

Задача 4.5.

Для чугунной балки указанного поперечного сечения (рис.4.14) определим грузоподъемность и построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. Допускаемые напряжения чугуна при растяжении и сжатии равны $[\sigma_p] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$, $[\sigma_c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН/см}^2$.

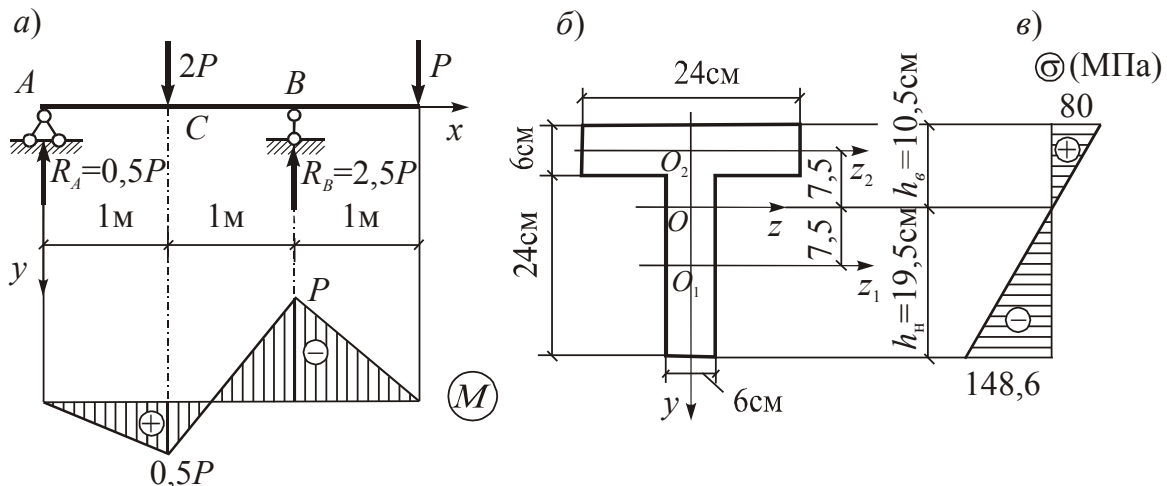


Рис.4.14

Используя уравнения статики, определяем опорные реакции

$$R_A = 0,5 P , \quad R_B = 2,5 P ,$$

и строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис.4.14,а).

Используя в качестве вспомогательной ось O_1z_1 , проходящую через центр тяжести нижнего прямоугольника (рис.4.14,б), определим положение центра тяжести сечения

$$y_0 = \frac{S_z}{F} = \frac{24 \cdot 6 \cdot 15}{2 \cdot 24 \cdot 6} = 7,5 \text{ см} .$$

Вычислим осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси Oz и моменты сопротивления для нижних и верхних волокон:

$$J_z = \frac{6 \cdot 24^3}{12} + \frac{24 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 7,5^2 = 23544 \text{ см}^4 ;$$

$$W_H = \frac{J_z}{h_H} = \frac{23544}{19,5} = 1207 \text{ см}^3, \quad W_B = \frac{J_z}{h_B} = \frac{23544}{10,5} = 2242 \text{ см}^3.$$

Для определения величины наибольшей допустимой силы P используем условия прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям для двух сечений балки – сечения C , где действует наибольший изгибающий момент $M_C = 0,5P$, растягивающий нижние волокна, и сечения B , где действует наибольший изгибающий момент $M_B = P$, растягивающий верхние волокна.

В сечении C наибольшие растягивающие напряжения в нижних волокнах равны (рис.4.14,в)

$$\sigma_{нб} = \frac{M_C}{W_H} = \frac{0,5P \cdot 100}{W_H} = \frac{50P}{W_H}.$$

Из условия прочности

$$\sigma_{нб} = \frac{M_C}{W_H} \leq [\sigma_p]$$

находим $50P \leq [\sigma_p] W_H, \quad P \leq \frac{8 \cdot 1207}{50} = 193,1 \text{ кН}.$

Проверка прочности по наибольшим сжимающим напряжениям не требуется, так как в сечении C $|\sigma_B| < \sigma_H$, а $[\sigma_c] > [\sigma_p]$.

В сечении B наибольшие растягивающие напряжения возникают в верхних волокнах

$$\sigma_{нб} = \frac{M_B}{W_B} = \frac{P \cdot 100}{W_B}.$$

Из условия прочности

$$\sigma_{нб} = \frac{M_B}{W_B} \leq [\sigma_p]$$

находим $100P \leq [\sigma_p] W_B, \quad P \leq \frac{8 \cdot 2242}{100} = 179,36 \text{ кН}.$

Наибольшие сжимающие напряжения в нижних волокнах равны

$$\sigma_H = -\frac{M_B}{W_H} = -\frac{P \cdot 100}{W_H}.$$

Из условия прочности

$$|\sigma_H| = \frac{M_B}{W_H} \leq [\sigma_c]$$

находим $100P \leq [\sigma_c] W_H, \quad P \leq \frac{15 \cdot 1207}{100} = 181,05 \text{ кН}.$

Таким образом, более опасным является сечение B , и допустимая величина силы равна $P = 179,36 \text{ кН}.$

Определим напряжения в нижних и верхних волокнах опасного сечения

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{M_B}{W_{\text{н}}} = - \frac{179,36 \cdot 100}{1207} = -14,86 \text{ кН/см}^2 = -148,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{в}} = - \frac{M_B}{W_{\text{в}}} = \frac{179,36 \cdot 100}{2242} = 8 \text{ кН/см}^2 = 80 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений в сечении B приведена на рис.4.14,в.

Задача 4.6.

Для балки указанного поперечного сечения (рис.4.15) определим грузоподъемность и построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. Материал балки – чугун. Допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma_{\text{р}}] = 80$ МПа, при сжатии $[\sigma_{\text{с}}] = 150$ МПа.

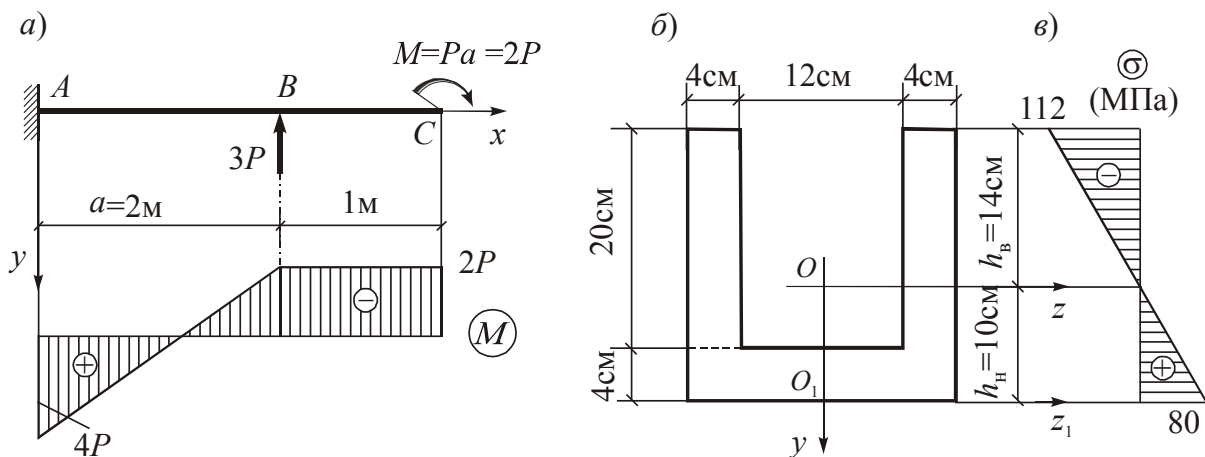


Рис.4.15

Строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис.4.15,а). Числовой коэффициент на эпюре M_z имеет размерность м^2 .

Используя вспомогательную ось O_1z_1 , определим положение центра тяжести сечения (рис.2.10,б)

$$y_0 = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 24 \cdot 12 \cdot 2}{12 \cdot 4 + 4 \cdot 24 \cdot 2} = 10 \text{ см}.$$

Определим осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси Oz и моменты сопротивления для нижних и верхних волокон.

$$J_z = J_{z_1} - F y_0^2 = \frac{12 \cdot 4^3}{3} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 24^3}{3} - (12 \cdot 4 + 4 \cdot 24 \cdot 2) \cdot 10^2 = 13120 \text{ см}^4;$$

$$W_{\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}} = \frac{13120}{10} = 1312 \text{ см}^3, \quad W_{\text{в}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}} = \frac{13120}{14} = 937,1 \text{ см}^3.$$

Для определения несущей способности балки определим из условий прочности по наибольшим растягивающим и наибольшим сжимающим напряжениям параметр нагрузки P .

На участке BC балки растянуты верхние волокна

$$|\sigma_B| = \frac{M_{нб}}{W_B} = \frac{2P \cdot 100}{W_B} = \frac{200P}{W_B}.$$

Из условия прочности

$$|\sigma_B| = \frac{M_{нб}}{W_B} \leq [\sigma_p]$$

находим $200P \leq [\sigma_p] W_B, \quad P = \frac{8 \cdot 937,1}{200} = 37,48 \text{ кН}.$

Проверка прочности по наибольшим сжимающим напряжениям на участке BC балки не требуется, так как $|\sigma_n| < \sigma_B$, а $[\sigma_c] > [\sigma_p]$.

В сечении A растянуты нижние волокна

$$\sigma_n = \frac{M_A}{W_n} = \frac{4P \cdot 100}{W_n} = \frac{400P}{W_n}.$$

Из условия прочности

$$\sigma_n = \frac{M_A}{W_n} \leq [\sigma_p]$$

находим $400P \leq [\sigma_p] W_n, \quad P = \frac{8 \cdot 1312}{400} = 26,24 \text{ кН}.$

Наибольшие сжимающие напряжения в верхних волокнах равны

$$|\sigma_B| = \frac{M_A}{W_B} = \frac{4P \cdot 100}{W_B} = \frac{400P}{W_B}.$$

Из условия прочности

$$|\sigma_B| = \frac{M_A}{W_B} \leq [\sigma_c]$$

получим $400P \leq [\sigma_c] W_B, \quad P = \frac{15 \cdot 937,1}{400} = 35,14 \text{ кН}.$

Таким образом, более опасным является сечение A . Допустимая величина параметра нагрузки равна $P = 26,24 \text{ кН}$.

Определим нормальные напряжения в нижних и верхних волокнах опасного сечения

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{M_A}{W_n} = \frac{4 \cdot 26,24 \cdot 100}{1312} = 8 \text{ кН/см}^2 = 80 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= -\frac{M_A}{W_B} = -\frac{4 \cdot 26,24 \cdot 100}{937,1} = -11,2 \text{ кН/см}^2 = -112 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис.4.15,в.