

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчётно-графических работ по сопротивлению материалов, основам строительной механики (для специальностей ВиВ, ТГВ и СТ) и теории упругости и пластичности.

Пособие состоит из 3-х частей и 14 глав по темам расчётно-графических работ. Каждая глава содержит краткое изложение теории, где приведены основные формулы и уравнения, и примеры решения задач, аналогичных задачам в расчётно-графических работах.

В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней – уголков, двутавров и швеллеров.

В третьей части пособия приведены главы, соответствующие учебному материалу 3-го семестра изучения сопротивления материалов – напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела, плоская задача теории упругости, изгиб прямоугольных и кольцевых пластин, решение задач по теории упругости, термоупругости и изгибу пластин.

Пособие написано профессорами кафедры сопротивления материалов МГСУ.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила – P , площадь поперечного сечения стержня – F . Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

Наименование величины	Е д и н и ц а		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1\text{Н} \approx 0,1\text{ кгс}$ $1\text{кН} \approx 0,1\text{ тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1\text{Н/м} \approx 0,1\text{ кгс/м}$ $1\text{кН/м} \approx 0,1\text{ тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	$1\text{Нм} \approx 0,1\text{ кгс}\cdot\text{м}$ $1\text{кНм} \approx 0,1\text{ тс}\cdot\text{м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1\text{Па} \approx 0,1\text{ кгс/м}^2$ $1\text{МПа} \approx 10\text{ кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1\text{ кН/см}^2 = 10\text{ МПа}$).

ГЛАВА 11

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА

11.1. Основные понятия и формулы

Под действием нагрузок, приложенных к телу, в нем возникают внутренние силы, которые определяются величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке тела. Совокупность напряжений, действующих на различных площадках, проведенных через точку тела, характеризует напряженное состояние в окрестности данной точки.

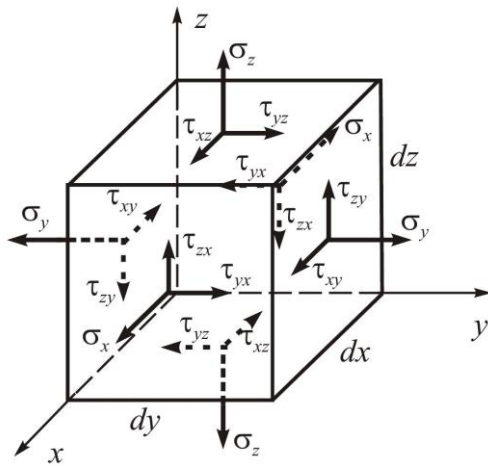


Рис.11.1

На рис.11.1 показаны нормальные $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ напряжения, действующие на гранях бесконечно малого (элементарного) параллелепипеда, выделенного в окрестности произвольной точки тела.

Совокупность этих величин представляет собой тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

В силу закона парности касательных напряжений ($\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$) имеем шесть различных компонент тензора, которые полностью определяют напряженное состояние в окрестности точки тела. Это означает, что, зная эти шесть величин, можно определить напряжения на любой наклонной по отношению к осям Ox, Oy, Oz площадке, проходящей через данную точку.

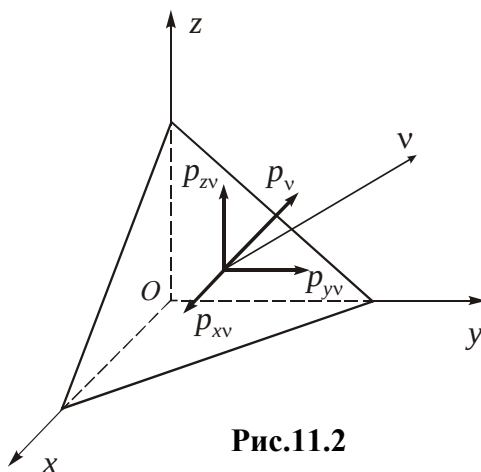


Рис.11.2

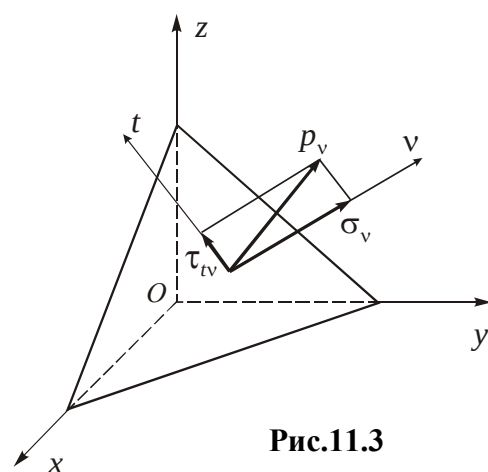


Рис.11.3

Полное напряжение p_v , действующее на наклонной площадке с нормалью v , положение которой определяется направляющими косинусами $l = \cos(x, v), m = \cos(y, v), n = \cos(z, v)$, можно разложить по осям координат (рис.11.2). Эти составляющие можно выразить через компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Если точка, в окрестности которой рассматривается напряженное состояние, находится на поверхности тела, то величины p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} представляют собой компоненты распределенной поверхностной нагрузки. В этом случае формулы (11.2) можно использовать в качестве статических граничных условий.

Нормальное напряжение на наклонной площадке σ_v и касательное напряжение τ_{tv} , действующее в плоскости площадки по направлению t с направляющими косинусами l_1 , m_1 , n_1 (рис.11.3), определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl; \\ \tau_{tv} &= \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m_1 n) + \tau_{zx}(nl_1 + n_1 l). \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Напряжения p_v , σ_v и τ_{tv} действуют в одной плоскости. Величина τ_{tv} является полным касательным напряжением в плоскости наклонной площадки, и она может быть определена по формуле

$$\tau_{tv} = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2 - \sigma_v^2}. \quad (11.4)$$

При изменении положения наклонной площадки, то есть при изменении углов между нормалью v и осями координат, напряжения σ_v и τ_{tv} также изменяются. В любой точке нагруженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Такие площадки называются главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения – главными напряжениями. Они обозначаются через σ_1 , σ_2 , σ_3 , при этом принимается, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Главные напряжения являются экстремальными величинами по отношению к углам наклона площадок.

На рис.11.4,а показан элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками, а нормали к ним – главными осями напряженного состояния 1, 2, 3.

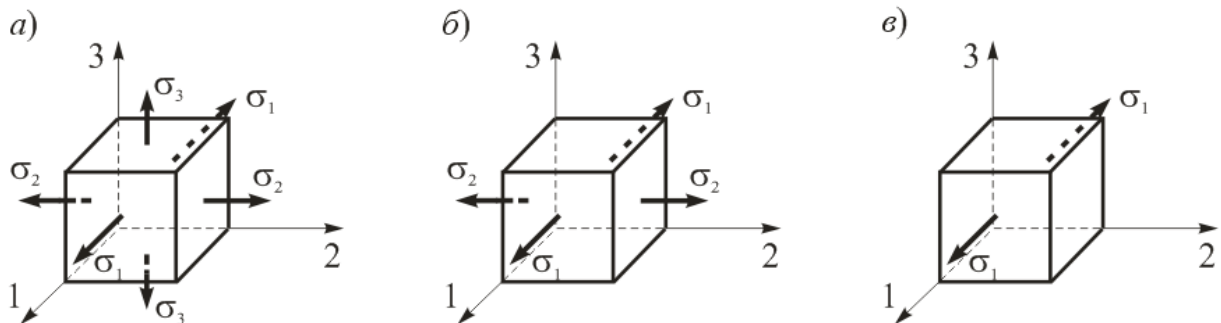


Рис.11.4

Существуют три основных вида напряженного состояния: трехосное, при котором все три главных напряжения отличны от нуля (рис.11.4,*а*), двухосное, при котором одно из главных напряжений равно нулю (рис.11.4,*б*), и одноосное, при котором только одно из главных напряжений отлично от нуля (рис.11.4,*в*).

Величины главных напряжений определяются из кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (11.5)$$

Коэффициенты этого уравнения называются инвариантами тензора напряжений и выражаются через компоненты последнего по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Эти величины являются постоянными для данной точки и не зависят от углов наклона площадок. В силу этого инварианты тензора напряжений можно выразить через главные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

После определения из уравнения (11.5) главных напряжений σ_i ($i=1,2,3$) можно найти положение каждой из трех главных площадок, т. е. определить направляющие косинусы l_i, m_i, n_i нормалей к главным площадкам по формулам

$$l_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_i}, \quad m_i = \frac{\Delta_{2i}}{D_i}, \quad n_i = \frac{\Delta_i}{D_i}, \quad (11.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1i} &= -(\sigma_y - \sigma_i)\tau_{zx} + \tau_{xy}\tau_{yz}; \\ \Delta_{2i} &= -(\sigma_x - \sigma_i)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{zx}; \\ \Delta_i &= (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2; \\ D_i &= \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение действует на площадках, наклоненных под углами 45° к главным осям 1 и 3 и равно

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (11.10)$$

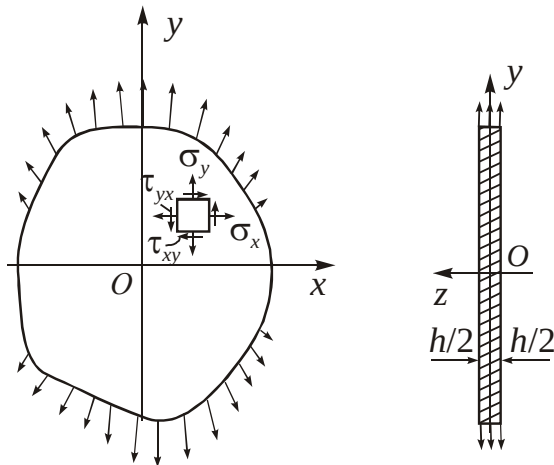


Рис.11.5

Рассмотрим двухосное или плоское напряженное состояние, которое возникает, например, в тонкой пластине, нагруженной по внешнему контуру силами, параллельными плоскости Oxy и равномерно распределенными по толщине h (рис.11.5). На внешних ненагруженных плоскостях пластины при $z = \pm h/2$ нормальные и касательные напряжения равны нулю ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). Так как

толщина пластины мала, можно считать, что и во внутренних точках пластины на площадках, параллельных плоскости Oxy , эти напряжения отсутствуют, и указанные площадки являются главными.

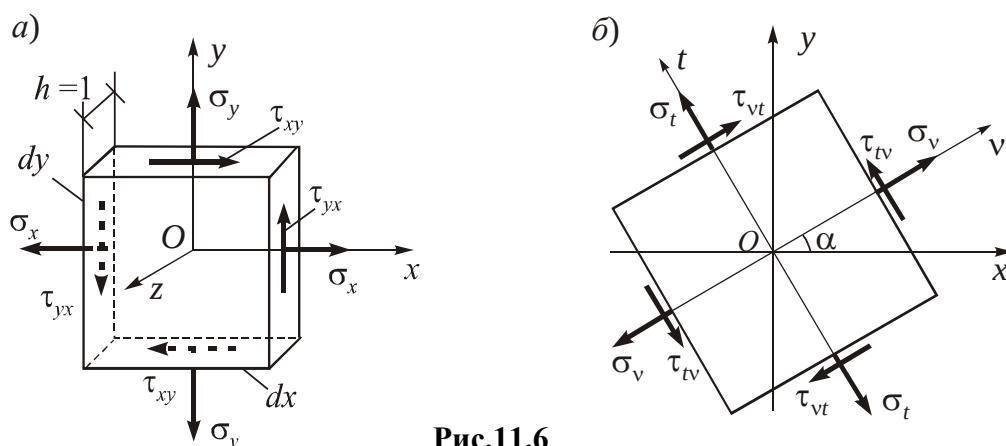


Рис.11.6

На рис.11.6,а показаны нормальные и касательные напряжения σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, действующие на гранях элементарного параллелепипеда со сторонами dx , dy и толщиной, равной единице, выделенного в окрестности произвольной точки пластины. На рис.11.6,б показаны напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных наклонных площадках, выделенных в окрестности той же точки. Эти напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{tv} &= \tau_{vt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Величины главных напряжений при двухосном напряженном состоянии в плоскости Oxy определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (11.12)$$

а углы наклона нормалей 1 и 2 к главным площадкам (рис.11.7) – по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}. \quad (11.13)$$

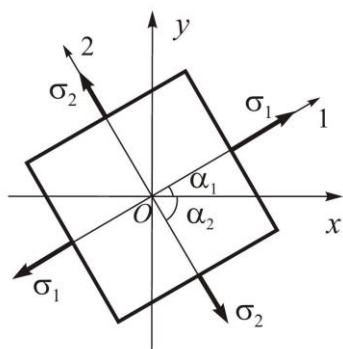


Рис.11.7

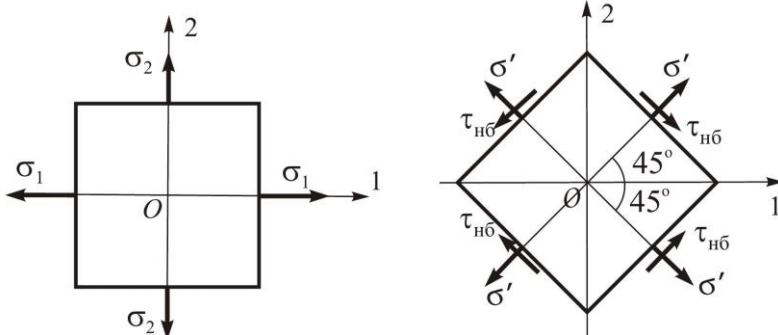


Рис.11.8

Третье главное напряжение равно нулю: $\sigma_3 = \sigma_z = 0$.

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам (рис.11.8). При этом величина наибольшего касательного напряжения в плоскости Oxy равна

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (11.14)$$

Нормальные напряжения на этих площадках равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (11.15)$$

Под действием внешних сил происходит деформирование тела и перемещение его точек в пространстве. При этом рассматриваются только те перемещения, которые связаны с деформированием тела. В большинстве задач перемещения точек тела считаются малыми величинами по сравнению с его размерами.

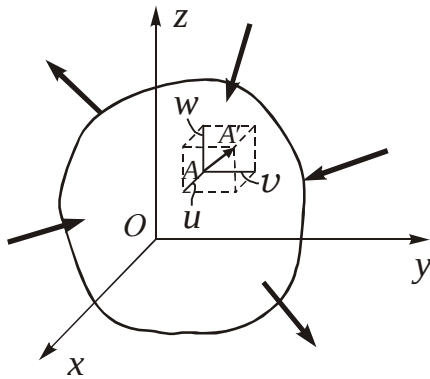


Рис.11.9

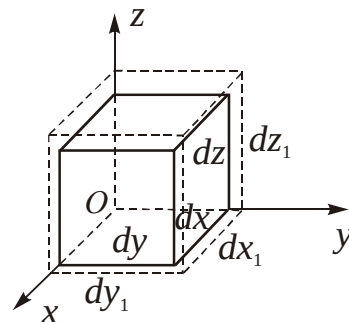


Рис.11.10

Обозначим составляющие вектора полного перемещения AA' произвольной точки A (рис.11.9) по осям Ox , Oy , Oz соответственно через u , v , w . В соответствии с положением о сплошности тела перемещения его точек являются непрерывными функциями координат x , y , z .

Для исследования деформаций в окрестности точки тела рассматривается элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz (рис.11.10). В результате различия перемещений точек параллелепипеда его ребра удлиняются или укорачиваются, а первоначально прямые углы между ребрами искажаются. В соответствии с этим различают два основных вида деформаций – линейные и угловые.

Линейные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z представляют собой относительные удлинения или укорочения ребер элементарного параллелепипеда (рис.11.10).

$$\epsilon_x = \frac{dx_1 - dx}{dx}, \quad \epsilon_y = \frac{dy_1 - dy}{dy}, \quad \epsilon_z = \frac{dz_1 - dz}{dz}. \quad (11.16)$$

Деформации удлинения считаются положительными, а укорочения – отрицательными.

Угловые деформации или деформации сдвига γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} характеризуют искажения прямых углов между ребрами элементарного параллелепипеда

(рис.11.11). При этом индексы показывают, в какой плоскости происходит угловая деформация.

Совокупность линейных и угловых деформаций в окрестности точки тела называется тензором деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

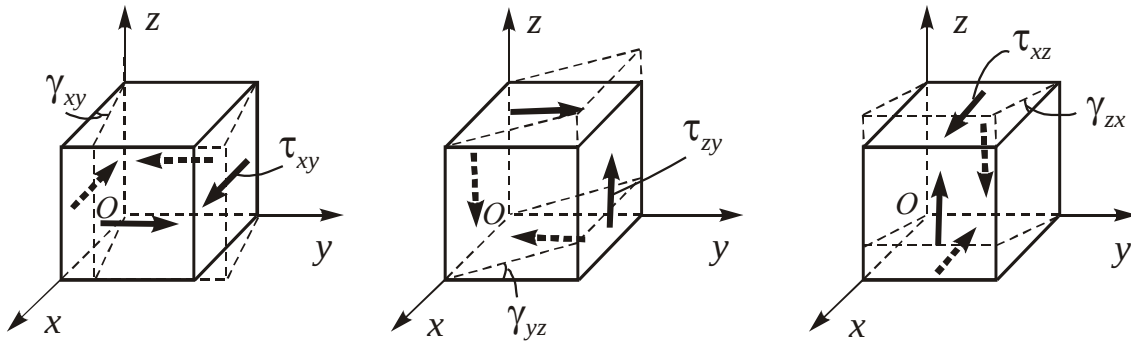


Рис.11.11

Деформации сдвига, так же как и касательные напряжения, обладают свойством взаимности $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Вследствие этого имеем шесть деформаций, которые полностью определяют деформированное состояние в окрестности рассматриваемой точки тела. Зная эти шесть величин, можно определить линейную деформацию ε_v в произвольном направлении v и угловую деформацию γ_{tv} , определяющую изменение прямого угла между направлениями v и t , по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl; \\ \gamma_{tv} &= 2(\varepsilon_x ll_1 + \varepsilon_y mm_1 + \varepsilon_z nn_1) + \gamma_{xy}(lm_1 + l_1 m) + \\ &\quad + \gamma_{yz}(mn_1 + m_1 n) + \gamma_{zx}(nl_1 + n_1 l). \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Тензоры напряжений и деформаций и выражения (11.3) и (11.18) имеют аналогичную структуру и могут быть получены одни из других с помощью следующих формальных замен:

$$\sigma_i \leftrightarrow \varepsilon_i, \quad \tau_{ij} \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{ij} \quad (i, j = x, y, z, t, v). \quad (11.19)$$

Среди множества осей, проведенных через точку тела, существуют три взаимно перпендикулярные оси, в системе которых отсутствуют угловые деформации. Эти оси называются главными осями деформированного состояния, а соответствующие им линейные деформации – главными деформациями. Главные деформации обозначаются через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, при этом принимается, что $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

В изотропном теле главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают.

Относительная объемная деформация в окрестности точки (относительное изменение объема элементарного параллелепипеда) с точностью до величин второго и третьего порядков малости равна сумме трех линейных деформаций

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (11.20)$$

Для линейно упругих и изотропных тел связь между напряжениями и деформациями в окрестности точки тела называется обобщенным законом Гука. Обобщенный закон Гука может быть записан в прямой форме

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

и в обратной форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + \lambda e, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + \lambda e, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda e, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

Последние три формулы в (11.21) и (11.22) выражают закон Гука при сдвиге, а величины μ и λ называются постоянными Ляме. Они связаны с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν формулами

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (11.23)$$

где G – модуль сдвига.

В случае двухосного напряженного состояния в формулах (11.21) и (11.22) необходимо положить $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. В результате прямые и обратные формулы закона Гука преобразуются соответственно к виду

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (11.24)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \quad (11.25)$$

При деформировании тела в нем происходит накопление потенциальной энергии деформации. Энергия, накапливаемая в единице объема тела, называется удельной энергией.

Удельную потенциальную энергию можно выразить через напряжения по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1+\nu}{E}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (11.26)$$

Полную энергию U_0 можно представить в виде суммы двух слагаемых: энергии изменения объема $U_0^{\text{об}}$ и энергии изменения формы $U_0^{\text{ф}}$:

$$U_0 = U_0^{\text{об}} + U_0^{\text{ф}}.$$

Такое разделение энергии необходимо, поскольку прочность материала определяется в основном энергией формоизменения. Энергия изменения объема на прочность существенно не влияет.

Составляющие полной энергии выражаются через напряжения по формулам

$$U_0^{\text{об}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_0^2; \quad (11.27)$$

$$U_0^{\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (11.28)$$

где величины

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{e}{3} \quad (11.29)$$

представляют собой среднее напряжение и среднюю деформацию в окрестности точки тела.

Выражения (11.26) и (11.28) более просто записываются через главные напряжения

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]; \quad (11.30)$$

$$U_0^{\text{ф}} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (11.31)$$

Для двухосного напряженного состояния формулы (11.26) и (11.28) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2]; \\ U_0^{\text{ф}} &= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Расчет на прочность элементов конструкций, испытывающих трехосное и двухосное напряженные состояния, производится с использованием той или иной теории прочности в зависимости от свойств материала. Для элементов конструкций из пластичного материала чаще всего применяются две теории прочности: теория наибольших касательных напряжений и энергетическая теория удельной потенциальной энергии формоизменения.

По теории наибольших касательных напряжений условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \gamma_c R, \quad (11.33)$$

где σ_1 и σ_3 – наибольшее и наименьшее главные напряжения.

По энергетической теории

$$\sigma_i = \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq \gamma_c R,$$

или через главные напряжения

$$\sigma_i = \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.34)$$

Для двухосного напряженного состояния $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, и условие прочности (11.34) принимает вид

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.35)$$

11.2. Примеры решения задач

Задача 11.1.

В окрестности точки тела известны компоненты тензора напряжений $\sigma_x = -30$ МПа, $\sigma_y = -50$ МПа, $\sigma_z = 20$ МПа, $\tau_{xy} = 40$ МПа, $\tau_{yz} = -20$ МПа, $\tau_{zx} = -20$ МПа (рис.11.12). Материал – сталь. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, (модуль сдвига $G \approx 0,8 \cdot 10^5$ МПа), расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

Исследуем напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела.

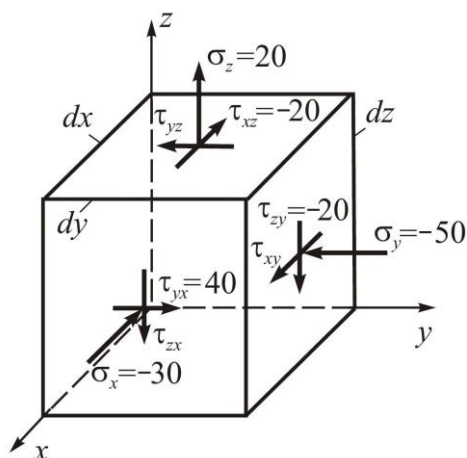


Рис.11.12

По формулам (11.6) определим инварианты тензора напряжений.

$$I_1 = -30 - 50 + 20 = -60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = 30 \cdot 50 - 50 \cdot 20 - 20 \cdot 30 - 40^2 -$$

$$- 20^2 - 20^2 = -2500 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = 30 \cdot 50 \cdot 20 + 30 \cdot 20^2 + 50 \cdot 20^2 - 20 \cdot 40^2 +$$

$$+ 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 20 = 62000 \text{ (МПа)}^3.$$

Величины главных напряжений определяются из кубического уравнения (11.5)

$$\sigma^3 + 60\sigma^2 - 2500\sigma - 62000 = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$\sigma' = -18,92, \quad \sigma'' = 40,28, \quad \sigma''' = -81,36.$$

Учитывая, что в соответствии с обозначениями главных напряжений принимается $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получим

$$\sigma_1 = 40,28 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -18,92 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -81,36 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности вычислений определим значения инвариантов тензора напряжений по формулам (11.7)

$$I_1 = 40,28 - 18,92 - 81,36 = -60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = -40,28 \cdot 18,92 + 18,92 \cdot 81,36 - 81,36 \cdot 40,28 = -2500 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = 40,28 \cdot 18,92 \cdot 81,36 = 62004 \text{ (МПа)}^3.$$

Эти величины практически совпадают с полученными значениями по формулам (11.6).

Определим направляющие косинусы l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) нормалей к главным площадкам с помощью формул (11.8) и (11.9). Для первой главной площадки ($i = 1$) получим

$$\Delta_{11} = -(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{zx} + \tau_{xy}\tau_{yz} = -(-50 - 40,28)(-20) + 40(-20) = -2605,6 \text{ (МПа)}^2;$$

$$\Delta_{21} = -(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{zx} = -(-30 - 40,28)(-20) + 40(-20) = -2205,6 \text{ (МПа)}^2;$$

$$\Delta_1 = (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2 = (-30 - 40,28)(-50 - 40,28) - 40^2 = 4744,9 \text{ (МПа)}^2;$$

$$D_1 = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{(-2605,6)^2 + (-2205,6)^2 + 4722,9^2} = 5845,3 \text{ (МПа)}^2;$$

$$l_1 = \frac{\Delta_{11}}{D_1} = \frac{-2605,6}{5845,3} = -0,446;$$

$$m_1 = \frac{\Delta_{21}}{D_1} = \frac{-2205,6}{5845,3} = -0,377;$$

$$n_1 = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{4744,9}{5845,3} = 0,812.$$

Аналогично для второй ($i = 2$) и третьей ($i = 3$) главных площадок получим

$$l_2 = 0,660, \quad m_2 = 0,474, \quad n_2 = 0,583,$$

$$l_3 = -0,605, \quad m_3 = 0,795, \quad n_3 = 0,038.$$

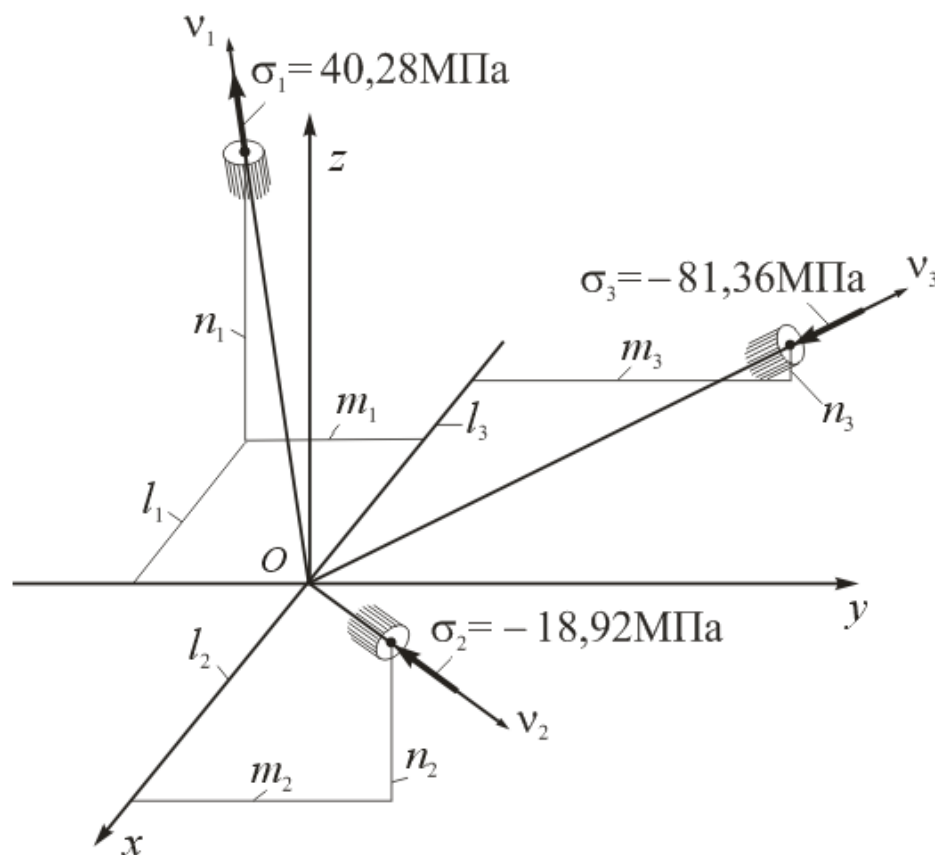


Рис.11.13

Вычисленные значения направляющих косинусов должны удовлетворять условиям ортогональности главных площадок

$$l_i l_k + m_i m_k + n_i n_k = 0, \quad (i \neq k), \quad (11.36)$$

$$-0,446 \cdot 0,660 - 0,376 \cdot 0,474 + 0,812 \cdot 0,583 = 8,12 \cdot 10^{-4};$$

$$-0,660 \cdot 0,605 + 0,474 \cdot 0,795 + 0,583 \cdot 0,038 = -5,49 \cdot 10^{-4};$$

$$0,605 \cdot 0,446 - 0,795 \cdot 0,377 + 0,038 \cdot 0,812 = 6,46 \cdot 10^{-4}.$$

Условия ортогональности главных площадок выполняются с малой погрешностью.

На рис.11.13 по найденным значениям l_i, m_i, n_i построены единичные векторы нормалей к главным площадкам и показаны направления v_i главных напряжений.

По формуле (11.10) определим наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение, действующее на площадке, наклоненной под углом 45° к главным осям 1 и 3 напряженного состояния

$$\tau_{\text{но}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{40,28 - (-81,36)}{2} = 60,82 \text{ МПа}.$$

Исследуем деформированное состояние тела в окрестности рассматриваемой точки. По формулам обобщенного закона Гука (11.21) определим линейные и угловые деформации в исходных осях Ox, Oy, Oz .

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [-30 - 0,3(-50 + 20)] = -1 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \frac{40}{0,8 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [-50 - 0,3(20 - 30)] = -2,238 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{-20}{0,8 \cdot 10^5} = -2,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [20 - 0,3(-30 - 50)] = 2,095 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{zx} = \frac{-20}{0,8 \cdot 10^5} = -2,5 \cdot 10^{-4}.$$

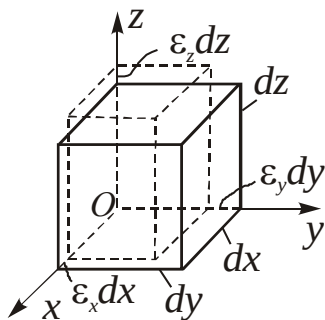


Рис.11.14

Относительная объемная деформация определяется по формуле (11.20)

$$e = (-1 - 2,238 + 2,095) \cdot 10^{-4} = -1,143 \cdot 10^{-4}.$$

На рис.11.14 показаны линейные деформации ребер элементарного параллелепипеда, а на рис.11.15 – угловые деформации в плоскостях Oxy, Oyz, Ozx .

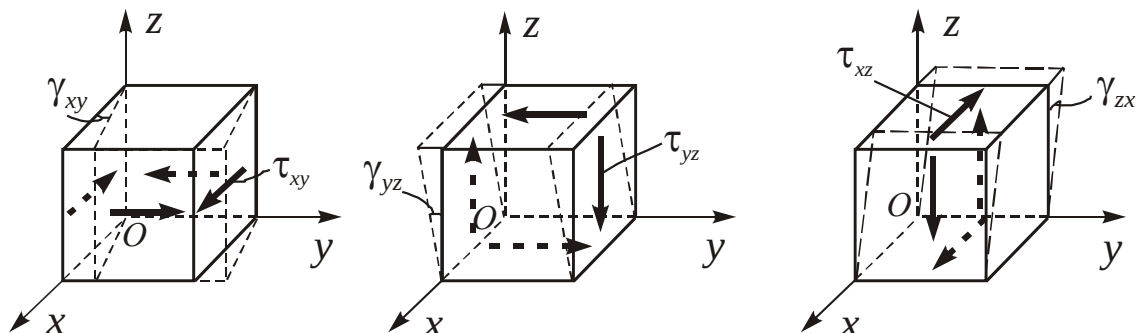


Рис.11.15

Определим по формулам (11.30) и (11.31) полную удельную потенциальную энергию деформации и удельную потенциальную энергию формоизменения

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [40,28^2 + 18,92^2 + 81,36^2 - 2 \cdot 0,3(-40,28 \cdot 18,92 + 18,92 \cdot 81,36 - 81,36 \cdot 40,28)] = 0,02405 \text{ МПа};$$

$$U_0^\Phi = \frac{1+0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [(40,28 + 18,92)^2 + (-18,92 + 81,36)^2 + (-81,36 - 40,28)^2] = 0,02290 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность в окрестности рассматриваемой точки тела. По энергетической теории прочности согласно условию прочности (11.34) получим

$$\sigma_i = \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-30 + 50)^2 + (-50 - 20)^2 + (20 + 30)^2 + 6(40^2 + 20^2 + 20^2)} =$$

$$= 105,4 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Задача 11.2.

В окрестности точки тела известны компоненты тензора напряжений $\sigma_x = -50 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 100 \text{ МПа}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 60 \text{ МПа}$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ (рис.11.16,а). Материал – сталь. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, расчетное сопротивление $R = 210 \text{ МПа}$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

Исследуем напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела. Поскольку касательные напряжения $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, площадки, нормальные к оси Oz , являются главными. Так как при этом главное напряжение $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, то напряженное состояние является двухосным.

Величины двух других главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам определим по формулам (11.12) и (11.13).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-50 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50 - 100}{2}\right)^2 + 60^2};$$

$$\sigma_1 = 121,05 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -71,05 \text{ МПа};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{60}{121,05 - 100} = 2,850, \quad \alpha_1 = 70,7^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{60}{-71,05 - 100} = -0,350, \quad \alpha_2 = -19,3^\circ.$$

Положение главных площадок показано на рис.11.16,б.

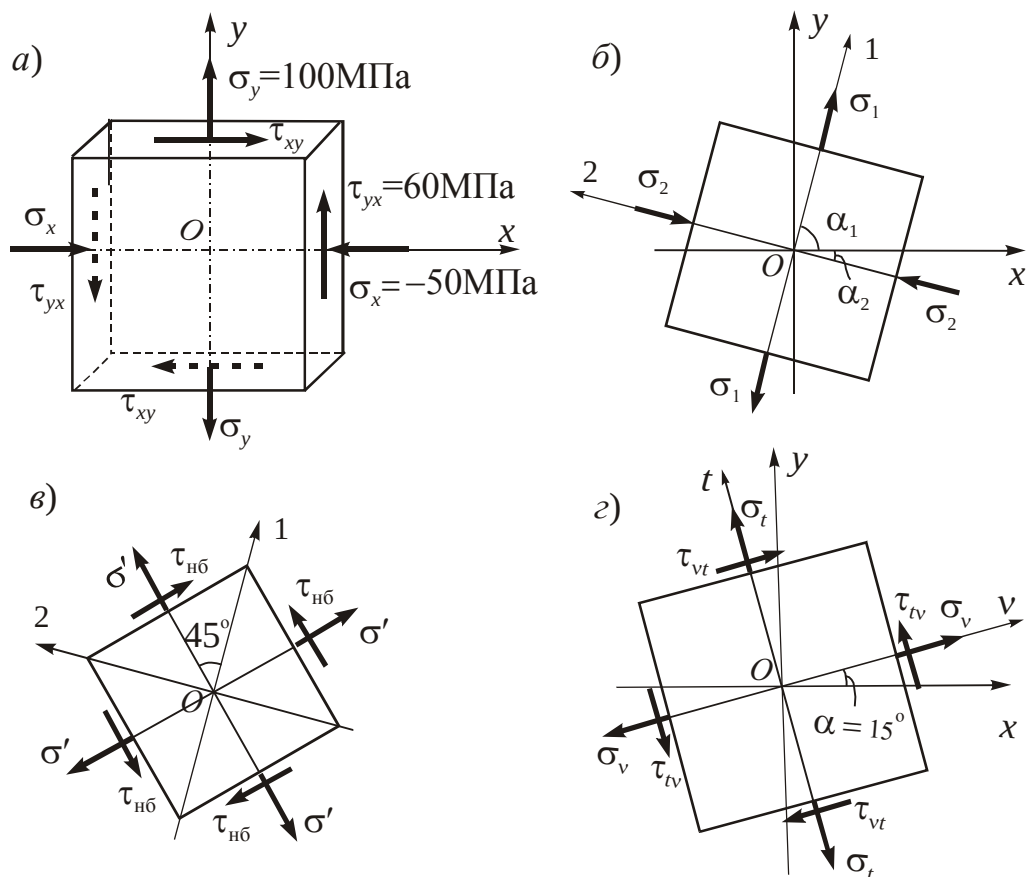


Рис.11.16

Для контроля правильности вычислений сделаем проверку

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 121,05 - 71,05 = \sigma_x + \sigma_y = -50 + 100 = 50 \text{ МПа};$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 70,7^\circ + 19,3^\circ = 90^\circ.$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках является постоянной величиной, и главные оси напряженного состояния взаимно перпендикулярны.

Определим по формуле (11.14) величину наибольших касательных напряжений, которые действуют на площадках, наклоненных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам (рис.11.16,в)

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{121,05 - (-71,05)}{2} = 96,05 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения на этих площадках согласно формуле (11.15) равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{121,05 - 71,05}{2} = 25,0 \text{ МПа}.$$

Определим по формулам (11.11) напряжения на взаимно перпендикулярных площадках с нормальми v и t . Угол наклона нормали v к оси Ox $\alpha = 15^\circ$ (рис.11.16,з)

$$\sigma_v = -50 \cos^2 15^\circ + 100 \sin^2 15^\circ + 60 \sin 30^\circ = -9,95 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = -50 \sin^2 15^\circ + 100 \cos^2 15^\circ - 60 \sin 30^\circ = 59,95 \text{ МПа};$$

$$\tau_{tv} = \tau_{vt} = -\frac{-50 - 100}{2} \sin 30^\circ + 60 \cos 30^\circ = 89,46 \text{ МПа}.$$

Найденные значения напряжений и углы наклона нормалей к площадкам, на которых они действуют, могут быть также определены графически с помощью круга Мора. Круг Мора для напряжений (рис.11.17) строится аналогично кругу инерции для моментов инерции с той разницей, что положительные касательные напряжения при выбранном на рис.11.16,*a* направлении координатных осей Ox и Oy откладываются вниз. Величины напряжений измеряются с помощью принятого масштаба, а углы наклона – по транспортиру. Результаты аналитического и графического расчетов совпадают.

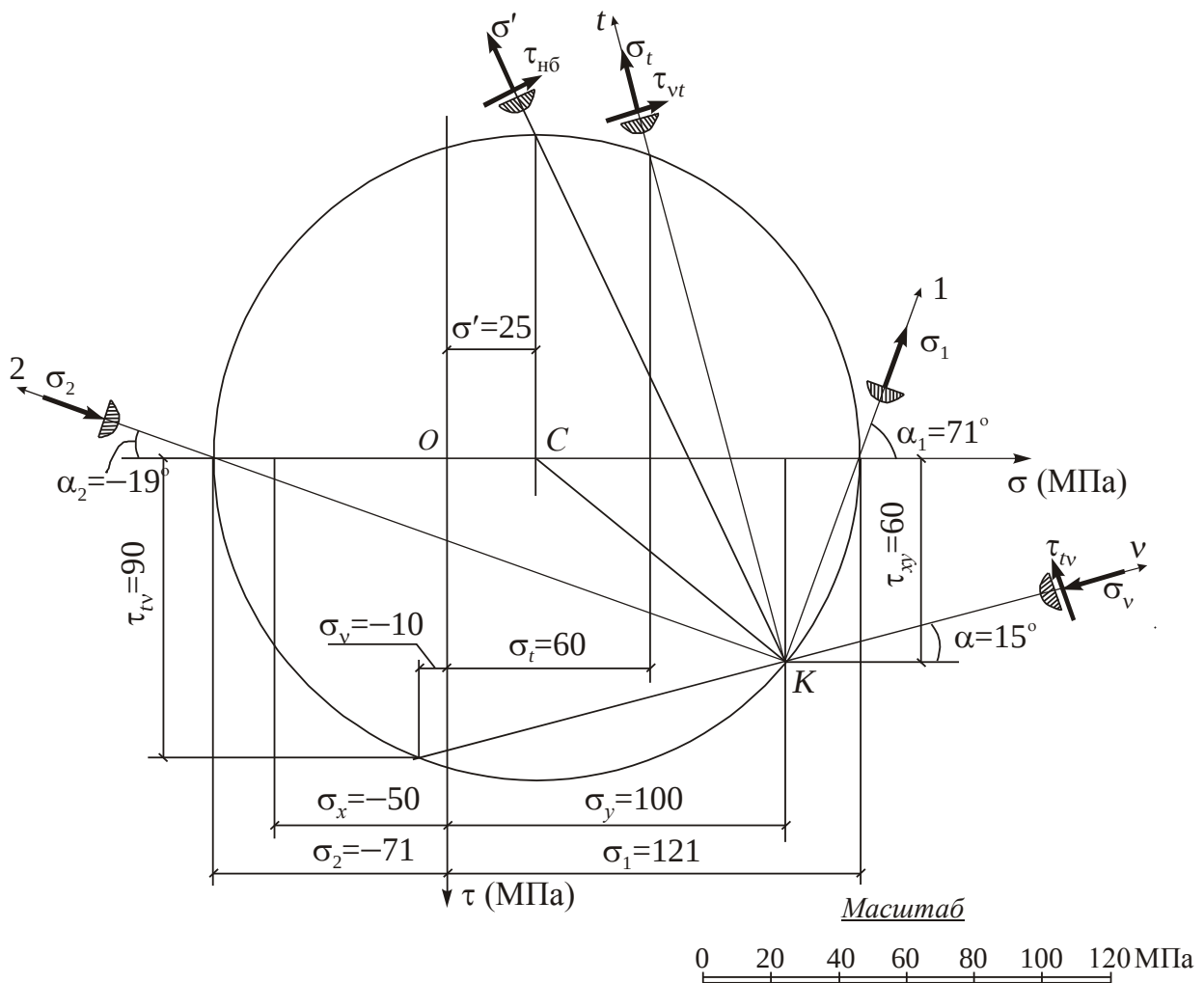


Рис.11.17

Исследуем деформированное состояние тела в окрестности рассматриваемой точки. Определим с помощью закона Гука (11.24) линейные, угловые и объемную деформации.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-50 - 0,3 \cdot 100) = -3,81 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (100 + 0,3 \cdot 50) = 5,476 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,3}{2,1 \cdot 10^5}(-50 + 100) = -0,714 \cdot 10^{-4};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{1}{0,8 \cdot 10^5} \cdot 60 = 7,50 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-3,81 + 5,476 - 0,714) \cdot 10^{-4} = 0,952 \cdot 10^{-4}.$$

Характер деформаций элементарного параллелепипеда показан на рис.11.18. Рёбра параллелепипеда, параллельные осям Ox , Oz , испытывают деформацию укорочения, ребро, параллельное оси Oy – деформацию удлинения. Объем элементарного параллелепипеда увеличивается. В плоскостях, параллельных плоскости Oxy , происходит искажение прямого угла на величину γ_{xy} .

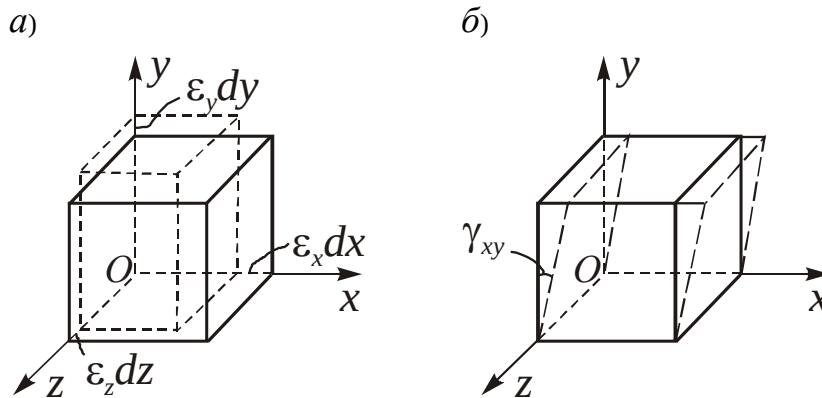


Рис.11.18

Определим по формулам (11.32) полную удельную потенциальную энергию деформации и энергию изменения формы в окрестности рассматриваемой точки тела.

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [50^2 + 100^2 - 2 \cdot 0,3(-50) \cdot 100 + 2(1 + 0,3) \cdot 60^2] = 0,0592 \text{ МПа};$$

$$U_0^\phi = \frac{1 + 0,3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [50^2 + 100^2 - (-50) \cdot 100 + 3 \cdot 60^2] = 0,0584 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность в окрестности рассматриваемой точки тела. По энергетической теории прочности согласно условию прочности (35) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} &= \sqrt{50^2 + 100^2 - (-50)(100) + 3 \cdot 60^2} = \\ &= 168,2 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется.

ГЛАВА 12

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

12.1. Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

Различают два вида плоской задачи – плоскую деформацию и плоское напряжённое состояние.

Плоская деформация имеет место в призматическом или цилиндрическом теле, нагруженном на боковой поверхности самоуравновешенной равномерно распределённой по длине нагрузкой, нормальной к продольной оси Oz . При этом предполагается, что торцы тела закреплены так, что их точки могут свободно перемещаться в своей плоскости и не могут перемещаться в направлении оси Oz .

При указанных ограничениях все поперечные сечения тела при деформации остаются плоскими и не перемещаются в направлении оси Oz .

Таким образом, плоская деформация характеризуется следующими равенствами:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \sigma_z \neq 0. \quad (12.1)$$

В качестве примера плоской деформации можно привести плотину, нагруженную гидростатическим давлением воды и силами собственного веса (рис.12.1).

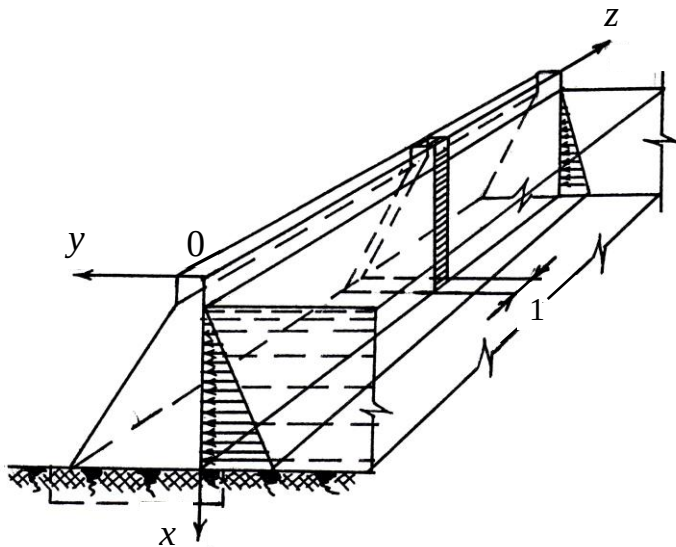


Рис.12.1

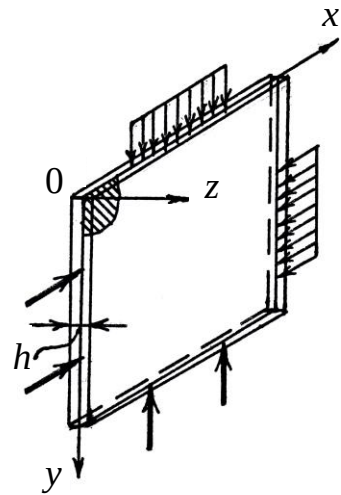


Рис.12.2

Плоским напряженным состоянием называется такое состояние тела, при котором во всех его точках одно из главных напряжений равно нулю, например $\sigma_z = \sigma_3 = 0$. При этом площадки, перпендикулярные к оси Oz являются главными.

Таким образом, плоское напряженное состояние характеризуется следующими равенствами:

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (12.2)$$

Плоское напряженное состояние возникает, например, в тонкой пластине, нагруженной по внешнему контуру силами, параллельными плоскости Oxy и равномерно распределёнными по толщине h (рис.12.2).

Полная система уравнений плоской задачи включает в себя:

– два уравнения равновесия Навье

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

где F_x, F_y – проекции удельных объемных сил на оси координат;

– три соотношения Коши

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (12.4)$$

– три уравнения закона Гука в прямой и обратной формах, которые для плоско-го напряженного состояния имеют следующий вид:

в прямой форме

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad (12.5)$$

в обратной форме

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (12.6)$$

Деформация ε_z определяется из равенства

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (12.7)$$

Уравнения закона Гука для плоской деформации могут быть получены путём замен в формулах (12.5) и (12.6) постоянных упругости E и ν приведенными постоянными упругости

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad G_1 = G. \quad (12.8)$$

Напряжение σ_z для плоской деформации определяется по формуле

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (12.9)$$

Из шести уравнений совместности деформаций в плоской задаче теории упругости остается только одно уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (12.10)$$

При решении плоской задачи в напряжениях на боковой поверхности тела должны быть заданы граничные условия

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = p_{xv}, \quad \tau_{yx} l + \sigma_y m = p_{yv}. \quad (12.11)$$

При решении плоской задачи в напряжениях систему уравнений (12.3), (12.5) и (12.10) можно свести к системе трёх уравнений. При постоянных или равных нулю объемных силах эта система включает в себя два уравнения равновесия (12.3) и уравнение совместности деформаций, выраженное в напряжениях

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (12.12)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа:
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (12.13)$$

Уравнение (12.12) называется уравнением Мориса Леви.

Систему трёх уравнений (12.3) и (12.12) можно свести к одному уравнению, если ввести так называемую функцию напряжений Эри $\varphi(x, y)$, через которую напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - yF_x - xF_y. \quad (12.14)$$

Подстановка этих выражений в уравнения равновесия (12.3) обращает их в тождества, а подстановка в уравнение Мориса Леви (12.12) приводит к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (12.15)$$

В развернутом виде это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (12.16)$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к нахождению функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению и граничным условиям на поверхности тела.

При решении плоской задачи с помощью функции напряжений применяются различные методы: полуобратный метод с использованием алгебраических полиномов или тригонометрических рядов и другие методы.

Сущность полуобратного метода решения в полиномах состоит в том, что функцию $\varphi(x, y)$ принимают в виде алгебраических полиномов целых положительных степеней. Коэффициенты полинома подбираются так, чтобы удовлетворялось бигармоническое уравнение (12.16) и граничные условия.

Полиномы степени ниже четвертой тождественно удовлетворяют уравнению (12.16) при любых значениях коэффициентов, а полиномы четвертой и более высоких степеней имеют только четыре независимых коэффициента.

С помощью метода полиномов могут быть решены некоторые практически важные плоские задачи теории упругости.

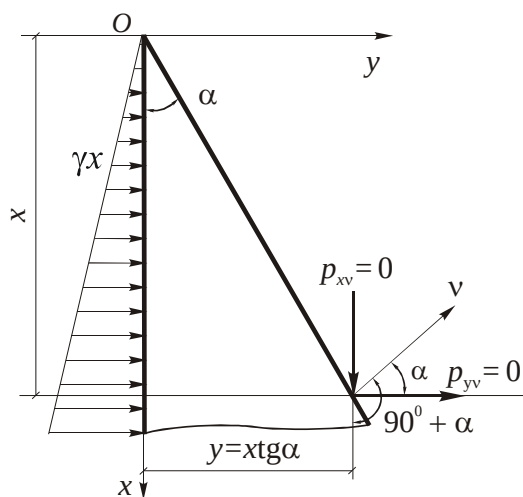


Рис.12.3

В качестве примера рассмотрим расчет плотины треугольного поперечного сечения (рис.12.3). На вертикальную напорную грань плотины действует гидростатическое давление воды, которое на глубине x равно γx (γ – объемный вес воды). Объемные силы равны $F_x = \gamma_1$, $F_y = 0$, где γ_1 – объемный вес материала плотины.

Решение данной задачи может быть получено с помощью функции напряжений в виде полинома третьей степени, удовлетворяющего бигармоническому уравнению (12.16) при любых значениях коэффициентов

$$\varphi = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3. \quad (12.17)$$

По формулам (12.14) определим напряжения.

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \quad \tau_{xy} = -b_3 x - c_3 y - \gamma_1 y. \quad (12.18)$$

Входящие в эти формулы постоянные определим из граничных условий на вертикальной и наклонной гранях.

На вертикальной грани имеем

$$y = 0, \quad \sigma_y = -\gamma x, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Используя формулы (12.18), найдем $a_3 = -\gamma$, $b_3 = 0$.

С учетом этого получим

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = -\gamma x; \quad \tau_{xy} = -(c_3 + \gamma_1)y. \quad (12.19)$$

Постоянные c_3 и d_3 определим из граничных условий (12.11) на ненагруженной наклонной грани, на которой составляющие поверхностной нагрузки $p_{xv} = p_{yv} = 0$.

Направляющие косинусы нормали v к наклонной грани равны

$$l = \cos(x, v) = \cos(90 + \alpha) = -\sin \alpha; \quad m = \cos(y, v) = \cos \alpha.$$

При этом равенства (12.11) принимают вид

$$-\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha = 0; \quad -\tau_{yx} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha = 0.$$

Подставляя в эти равенства выражения для напряжений (12.19) и учитывая, что уравнение наклонной грани $y = x \operatorname{tg} \alpha$, получим

$$-(c_3 + d_3 \operatorname{tg} \alpha)x \sin \alpha - (c_3 + \gamma_1)x \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$(c_3 + \gamma_1)x \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \gamma x \cos \alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$c_3 = \gamma \operatorname{tg}^2 \alpha - \gamma_1; \quad d_3 = \gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha.$$

Запишем окончательные выражения для напряжений.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1)x + (\gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha)y; \\ \sigma_y &= -\gamma x; \quad \tau_{xy} = -\gamma y \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

Сравним полученные результаты с решением по формулам сопротивления материалов. Для этого выделим из плотины полосу шириной $b = 1$ (рис.12.4) и рассмотрим ее как консольную балку переменного сечения. В поперечном сечении балки, находящемся на расстоянии x от свободного конца, возникают три внутренних усилия:

поперечная сила, равная площади треугольной эпюры гидростатического давления

$$Q = \frac{1}{2} \gamma x^2;$$

продольная сила, равная весу треугольной призмы

$$N = -\frac{1}{2} \gamma_1 x^2 \operatorname{tg} \alpha;$$

изгибающий момент, равный сумме моментов двух сил – силы $P_1 = Q$, приложенной в центре тяжести треугольной эпюры давления, и силы $P_2 = |N|$, приложенной в центре тяжести треугольной призмы с эксцентриситетом $e = \frac{1}{6} x \operatorname{tg} \alpha$ относительно центра тяжести рассматриваемого сечения (заштриховано на рис.12.4).

$$M_z = -P_1 \frac{x}{3} + P_2 e = -\frac{1}{6} \gamma x^3 + \frac{1}{12} \gamma_1 x^3 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Согласно формулам сопротивления материалов

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y^*; & \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{QS_z^{\text{отс}}(y^*)}{J_z b}, \end{aligned} \quad (12.21)$$

где y^* – переменная, отсчитываемая от центральной оси Oz поперечного сечения, F , J_z и $S_z^{\text{отс}}(y^*)$ – соответственно площадь, момент инерции сечения и статический момент отсеченной площади.

$$\begin{aligned} F &= bh = x \operatorname{tg} \alpha; & J_z &= \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha; \\ S_z^{\text{отс}}(y^*) &= \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - (y^*)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (y^*)^2 \right]. \end{aligned}$$

Координаты y и y^* произвольной точки сечения связаны между собой соотношением

$$y^* = y - \frac{1}{2} x \operatorname{tg} \alpha.$$

С учетом полученных соотношений формулы (12.21) для напряжений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1) x + (\gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2 \gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha) y; \\ \sigma_y &= 0; & \tau_{xy} &= 3 \gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha \left(y \operatorname{tg} \alpha - \frac{y^2}{x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

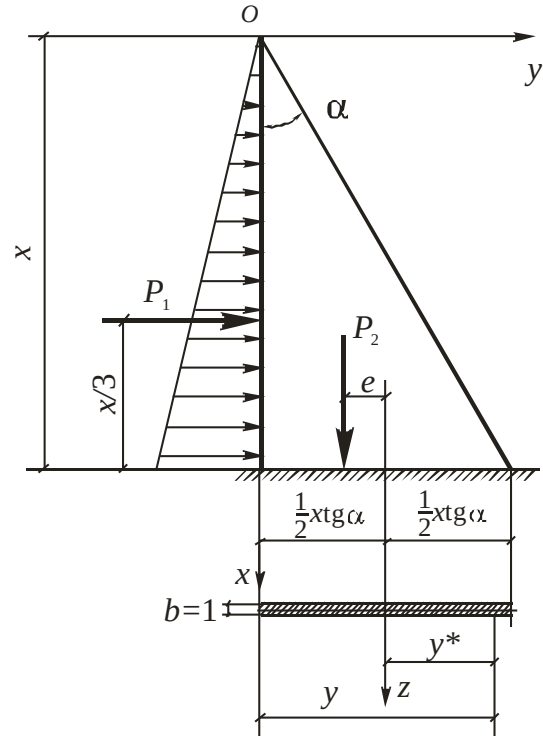


Рис.12.4

Сравнивая формулы (12.20) и (12.22) и соответствующие им эпюры, построенные на рис.12.5,*а* и 12.5,*б* для частного случая $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$, $\gamma_1 = 20 \text{ кН/м}^3$, приходим к следующим выводам. Формулы для напряжений σ_x в обоих решениях совпадают. Напряжения σ_y , которые в сопротивлении материалов не учитываются, имеют одинаковый порядок с напряжениями σ_x . Эпюры касательных напряжений τ_{yx} , полученные по формулам теории упругости (рис.12.5,*а*) и сопротивления материалов (рис.12.5,*б*), отличаются между собой не только количественно, но и качественно.

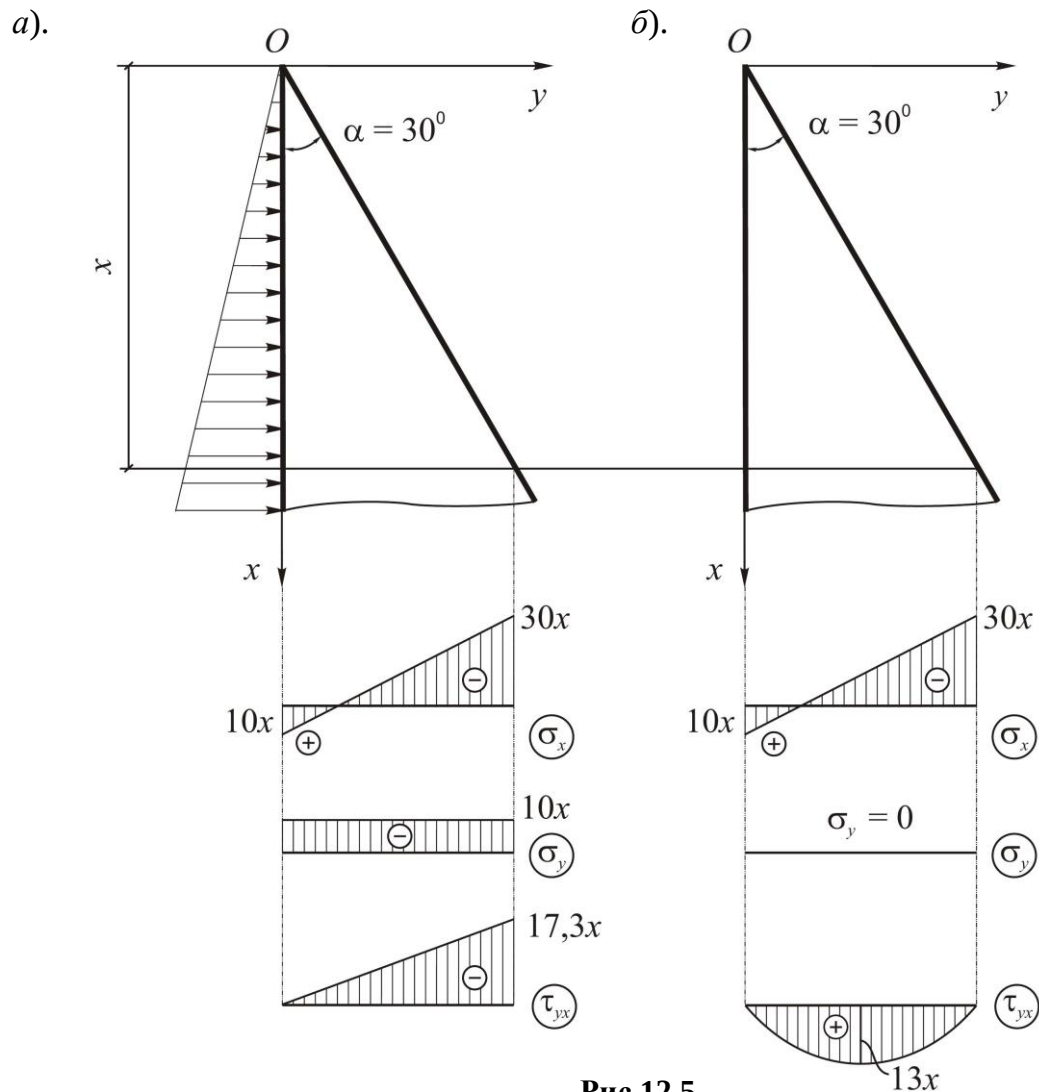


Рис.12.5

12.2. Полярно-симметричная плоская задача теории упругости

Полярно-симметричным называется такое напряженно-деформированное состояние, при котором напряжения, деформации и перемещения в теле не зависят от полярного угла θ . Такое напряженно-деформированное состояние возникает, например, в толстостенном цилиндре, нагруженном внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 (рис.12.6).

На гранях элемента, выделенного из цилиндра, действуют радиальные σ_r ,

и кольцевые (окружные) σ_θ нормальные напряжения, а касательные напряжения $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ вследствие полярной симметрии равны нулю.

При плоском напряженном состоянии осевое нормальное напряжение $\sigma_z = 0$, а осевая деформация $\varepsilon_z \neq 0$. В случае плоской деформации $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \neq 0$, $\varepsilon_z = 0$.

Запишем основные уравнения полярно-симметричной плоской задачи.

Уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0, \quad (12.23)$$

где F_r – радиальная составляющая объемной силы.

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (12.24)$$

где u – перемещение произвольной точки тела в направлении радиуса, называемое радиальным перемещением; ε_r и ε_θ – линейные деформации в направлении радиуса и в направлении, перпендикулярном к радиусу, называемые радиальной и окружной деформациями. Окружное перемещение v и угловая деформация $\gamma_{r\theta}$, вследствие полярной симметрии, равны нулю.

Закон Гука. Для плоского напряженного состояния прямые и обратные уравнения закона Гука аналогично формулам (12.5) и (12.6) записываются в виде

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r); \quad (12.25)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r). \quad (12.26)$$

Соответствующие уравнения для плоской деформации можно получить из (12.25) и (12.26) с помощью замен (12.8).

Рассмотрим толстостенный цилиндр со свободными ненагруженными торцами, находящийся под действием равномерного внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений (рис.12.6). Система уравнений (12.23) ÷ (12.26) может быть решена в напряжениях или в перемещениях. В результате для напряжений и радиальных перемещений получим следующие выражения:

$$\sigma_r = 2C_1 + \frac{C_2}{r^2}; \quad \sigma_\theta = 2C_1 - \frac{C_2}{r^2}; \quad u = 2C_1 \frac{1-\nu}{E} r - C_2 \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r}. \quad (12.27)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий на внутренней и внешней поверхностях цилиндра:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_1, \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = -p_2.$$

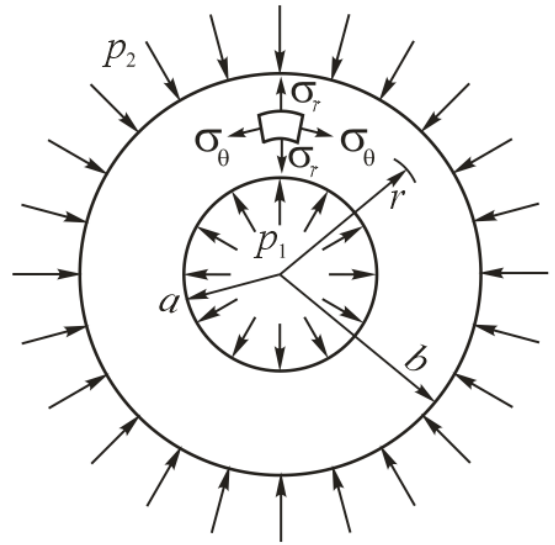


Рис.12.6

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в (12.27), получим следующие формулы для напряжений и радиального перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 k^2 - p_2}{1 - k^2} + \frac{(p_2 - p_1)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 k^2 - p_2}{1 - k^2} - \frac{(p_2 - p_1)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{(1 - \nu)(p_1 k^2 - p_2)b}{E(1 - k^2)} \rho - \frac{(1 + \nu)(p_2 - p_1)ak}{E(1 - k^2)} \cdot \frac{1}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (12.28)$$

где $\rho = \frac{r}{b}, \quad a \leq r \leq b, \quad k = \frac{a}{b}. \quad (12.29)$

Интересно отметить, что сумма нормальных напряжений σ_r и σ_θ во всех точках цилиндра одинакова:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \frac{p_1 k^2 - p_2}{1 - k^2} = \text{const}. \quad (12.30)$$

Выполним числовой расчет при $k = a/b = 0,6$, $m = p_1/p_2 = 1,8$ и $\nu = 0,3$.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2(mk^2 - 1)}{1 - k^2} + \frac{p_2(1 - m)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \left(-0,55 - 0,45 \cdot \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot p_2; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_2(mk^2 - 1)}{1 - k^2} - \frac{p_2(1 - m)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \left(-0,55 + 0,45 \cdot \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot p_2; \\ u &= \left[\frac{0,7(mk^2 - 1)}{1 - k^2} \rho - \frac{1,3(1 - m)k^2}{1 - k^2} \frac{1}{\rho} \right] \frac{p_2 b}{E} = \left(-0,385 \rho + 0,585 \frac{1}{\rho} \right) \frac{p_2 b}{E}. \end{aligned}$$

Эпюры напряжений и радиальных перемещений приведены на рис.12.7.

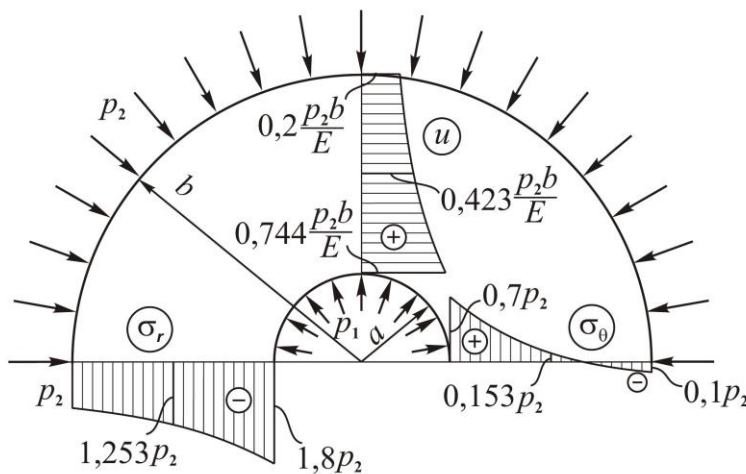


Рис.12.7

Выполним проверку по сумме напряжений в точках внутренней, срединной и внешней поверхностей:

при $\rho = 0,6$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -1,8p_2 + 0,7p_2 = -1,1p_2;$$

при $\rho = 0,8$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -1,253p_2 + 0,153p_2 = -1,1p_2;$$

при $\rho = 1$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -p_2 - 0,1p_2 = -1,1p_2.$$

В точках внутренней и внешней поверхностей могут быть заданы перемещения u_1 и u_2 (рис.12.8). В этом случае произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_1, & \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = -p_2. \\ \text{при } r = a \quad u = u_1, & \quad \text{при } r = b \quad u = u_2. \end{aligned}$$

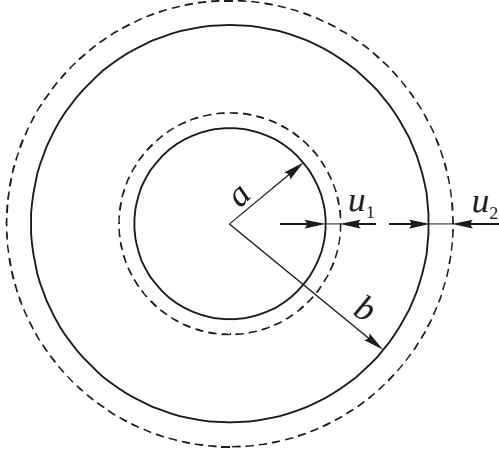


Рис.12.8

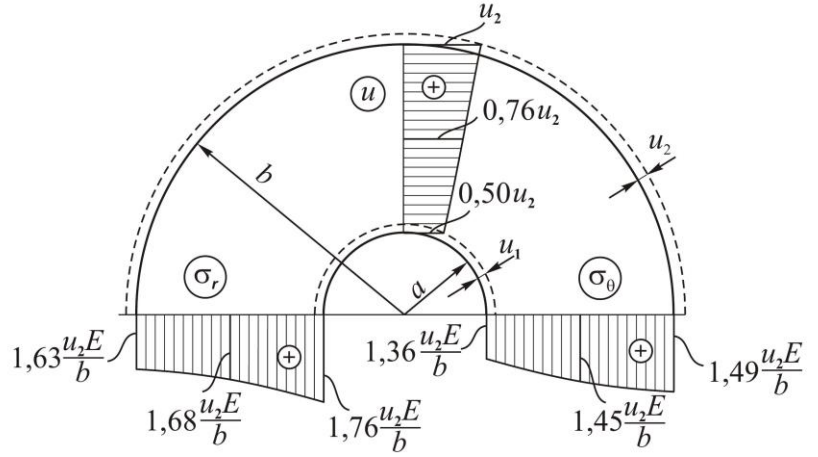


Рис.12.9

В результате получим следующие формулы для напряжений и радиально-го перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{u_2 - u_1 k}{(1-k^2)b} + \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{(u_2 k - u_1)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{u_2 - u_1 k}{(1-k^2)b} - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{(u_2 k - u_1)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{u_2 - u_1 k}{1-k^2} \rho - \frac{u_2 k - u_1}{1-k^2} \cdot \frac{k}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (12.31)$$

Выполним числовой расчет при $k = a/b = 0,6$, $n = u_1/u_2 = 0,5$ и $\nu = 0,3$.

$$\sigma_r = \frac{Eu_2}{0,7} \cdot \frac{1-nk}{(1-k^2)b} + \frac{Eu_2}{1,3} \cdot \frac{(k-n)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \left(1,563 + 0,072 \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot \frac{Eu_2}{b};$$

$$\sigma_\theta = \frac{Eu_2}{0,7} \cdot \frac{1-nk}{(1-k^2)b} - \frac{Eu_2}{1,3} \cdot \frac{(k-n)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \left(1,563 - 0,072 \frac{1}{\rho^2} \right) \cdot \frac{Eu_2}{b};$$

$$u = \frac{u_2(1-nk)}{1-k^2} \rho - \frac{u_2(k-n)k}{1-k^2} \cdot \frac{1}{\rho} = \left(1,094 \rho - 0,094 \frac{1}{\rho} \right) \cdot u_2.$$

Эпюры напряжений и радиальных перемещений приведены на рис.12.9.

На рис.12.10 рассмотрен случай, когда на внутренней поверхности заданы перемещения u_1 , а внешняя поверхность нагружена равномерным давлением p_2 . Используя граничные условия

$$r = a \quad u = u_1, \quad r = b \quad \sigma_r = -p_2,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{u_1 k E / b - (1 + \nu) p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} - \frac{u_1 k E / b + (1 - \nu) p_2 k^2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{u_1 k E / b - (1 + \nu) p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} + \frac{u_1 k E / b + (1 - \nu) p_2 k^2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{(1 - \nu) u_1 k - (1 - \nu^2) p_2 b / E}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \rho + \frac{(1 + \nu) u_1 k + (1 - \nu^2) p_2 a k / E}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

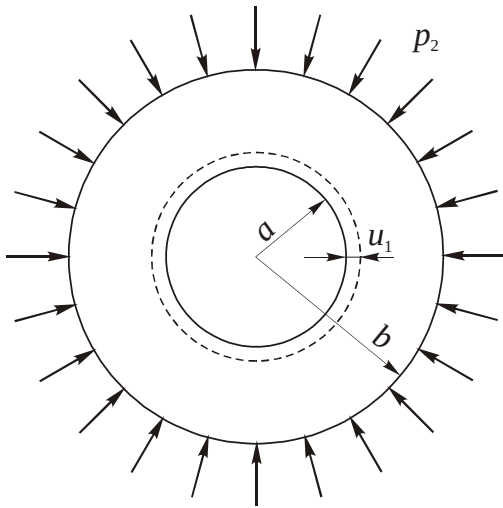


Рис.12.10

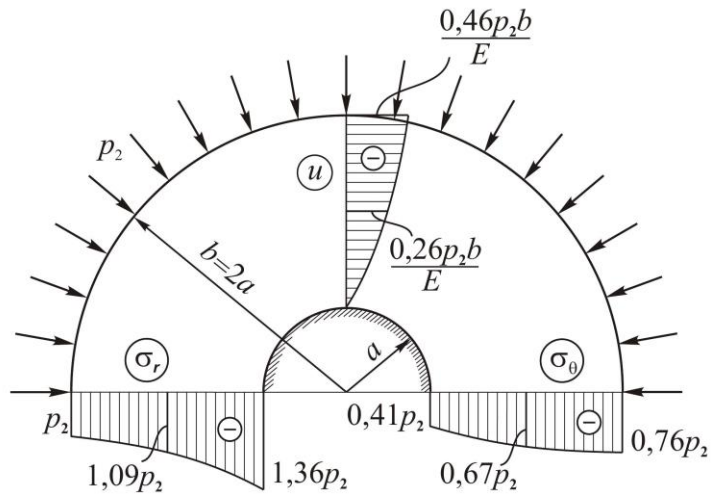


Рис.12.11

В качестве примера рассмотрим цилиндр, на внутренней поверхности которого радиальные перемещения u равны нулю (рис.12.11). Полагая в формулах (12.32) $u_1 = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{k^2}{\rho^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{-p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \left[(1 + \nu) - (1 - \nu) \frac{k^2}{\rho^2} \right]; \\ u &= \frac{(1 - \nu^2) p_2 / E}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \left(-b\rho + a \frac{k}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

На рис.12.11 приведены эпюры распределения напряжений и перемещений по толщине стенки цилиндра для случая $k = 0,5$, $\nu = 0,3$.

В случае нагружения цилиндра внутренним давлением p_1 и смещении точек внешней поверхности в радиальном направлении на заданную величину u_2 (рис.12.12) постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$r = a \quad \sigma_r = -p_1, \quad r = b \quad u = u_2.$$

Формулы для напряжений и перемещений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{u_2 E / b - (1 + \nu) p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} - \frac{u_2 E k^2 / b + (1 - \nu) p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{u_2 E / b - (1 + \nu) p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} + \frac{u_2 E k^2 / b + (1 - \nu) p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{(1 - \nu) u_2 - (1 - \nu^2) p_1 b k^2 / E}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \rho + \frac{(1 + \nu) u_2 k^2 + (1 - \nu^2) p_1 a k / E}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \cdot \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

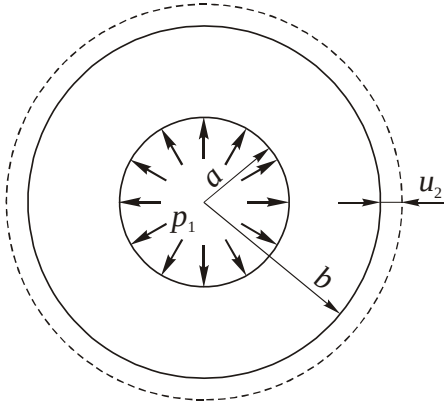


Рис.12.12

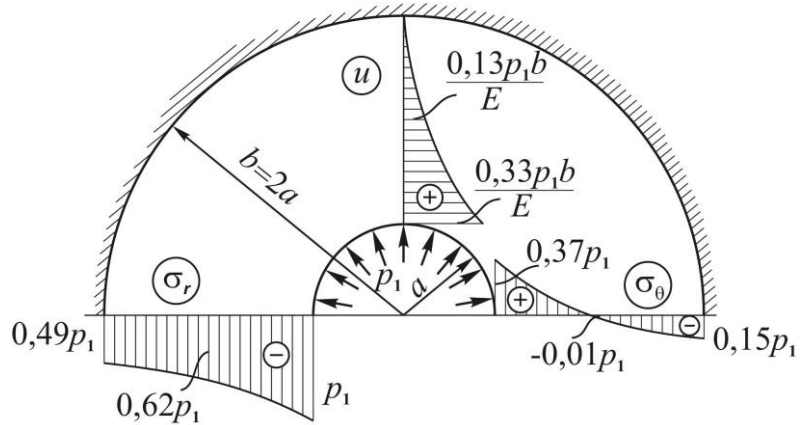


Рис.12.13

В качестве примера рассмотрим толстостенный цилиндр, нагруженный внутренним давлением p_1 , на внешней поверхности которого радиальные перемещения равны нулю (рис.12.13).

В этом случае в формулах (12.34) положим $u_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \left(1 + \nu + \frac{1 - \nu}{\rho^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{-p_1 k^2}{(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)} \left(1 + \nu - \frac{1 - \nu}{\rho^2} \right); \\ u &= \frac{(1 - \nu^2) p_1 k}{[(1 + \nu) k^2 + (1 - \nu)] E} \left(-b k \rho + \frac{a}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

Результаты расчета при $k = 0,5$ и $\nu = 0,3$ приведены на рис.12.13.

ГЛАВА 13

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

13.1. Основные понятия и формулы

Тонкими пластинами или тонкими плитами (рис.13.1) принято называть конструктивные элементы, у которых один размер (толщина h) значительно

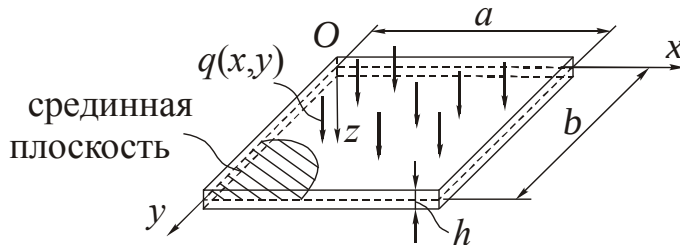


Рис.13.1

меньше двух других характерных размеров (длины сторон пластины). Поперечная нагрузка $q(x, y)$ вызывает изгиб пластины, который сопровождается появлением поперечных перемещений или прогибов $w(x, y)$. Задача расчета пластин при изгибе в большинстве слу-

чаев сводится к определению прогибов при выполнении соответствующих граничных (краевых) условий.

Наиболее просто задача расчета пластин решается в рамках так называемой технической теории, которая используется при следующих соотношениях:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{10} \div \frac{1}{80}, \quad w_{\text{нб}} \leq \frac{h}{4},$$

где a – длина меньшей из сторон пластины.

Техническая теория изгиба пластин базируется на упрощающих расчет гипотезах, которые по существу являются обобщением известных из сопротивления материалов гипотез теории изгиба стержней.

Основным уравнением технической теории изгиба пластин является уравнение Софи Жермен – Лагранжа, которое в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = q(x, y) \quad (13.1)$$

или

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (13.2)$$

где D – жесткость пластины при изгибе, определяемая по формуле:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (13.3)$$

В общем случае изгиба в пластине возникают пять внутренних усилий – изгибающие моменты M_x, M_y , крутящий момент $M_{xy} = M_{yx} = H$ и поперечные силы Q_x, Q_y (рис.13.2).

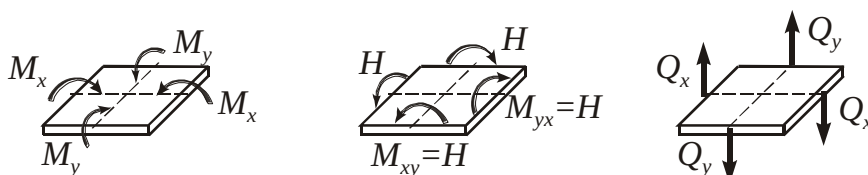


Рис.13.2

Внутренние усилия определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ H &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Внутренние усилия относятся к единице длины координатных линий. При этом изгибающие и крутящий моменты имеют размерность кНсм/см, а поперечные силы – кН/см.

Внутренние усилия и распределенная нагрузка $q(x,y)$ связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= Q_y, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Внутренние усилия являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений в сечениях пластины, перпендикулярных к срединной плоскости (рис.13.3). Нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ изменяются по толщине пластины по линейному закону и имеют наибольшие значения при $z = \pm h/2$. Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} изменяются по толщине по закону квадратной параболы и имеют наибольшие значения в точках на уровне срединной плоскости ($z = 0$). Эпюры напряжений приведены в задаче 13.1.

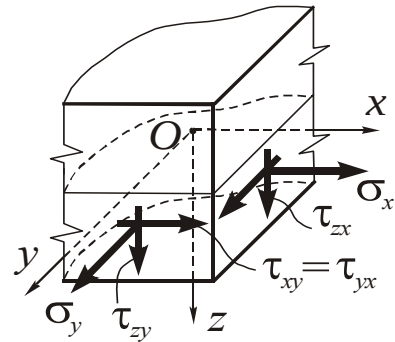


Рис.13.3

Напряжение σ_z , характеризующее взаимное давление между продольными слоями пластины, в большинстве случаев значительно меньше остальных напряжений и в силу этого не учитывается.

Функция прогиба пластины должна удовлетворять граничным условиям, которые зависят от характера закрепления пластины. Рассмотрим три основных типа граничных условий в случае прямоугольных пластин.

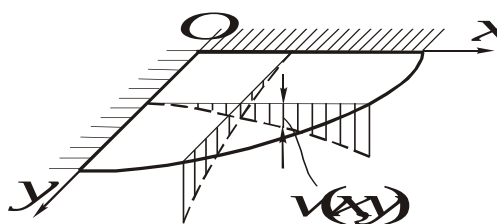


Рис.13.4

Жестко защемленные края (рис.13.4)

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad w=0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ y=0, \quad w=0, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

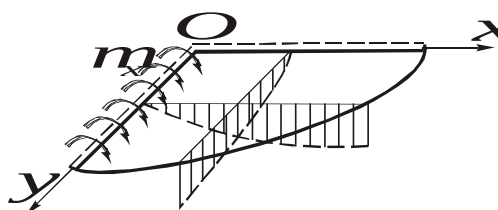


Рис.13.5

Шарнирно опертые края (рис.13.5)

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad w=0, \quad M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_x, \\ y=0, \quad w=0, \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

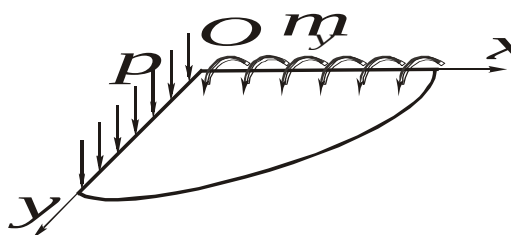


Рис.13.6

Свободные от закреплений края (рис.13.6)

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \\ V_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -p, \\ y=0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = m_y, \\ V_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

В приведенных формулах φ_x и φ_y – углы наклона нормали к деформированной срединной плоскости пластины, V_x , V_y – приведенные поперечные силы и m_x , m_y , p – распределенные краевые нагрузки.

Расчет пластин на прочность производится в точках верхней и нижней поверхностей пластины при $z = \pm h/2$, где напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} имеют наибольшие значения. Влияние на прочность напряжений τ_{zx} , τ_{zy} и σ_z , как правило, не учитывается. Условие прочности по энергетической теории имеет следующий вид:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \gamma_c R. \quad (13.9)$$

При расчете пластин на жесткость требуется выполнение следующего условия:

$$\frac{w_{нб}}{a} \leq \frac{1}{100} \div \frac{1}{200},$$

где a – меньший из размеров пластины в плане.

При расчете круглых и кольцевых пластин удобно использовать полярную систему координат (рис.13.7). Дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет следующий вид:

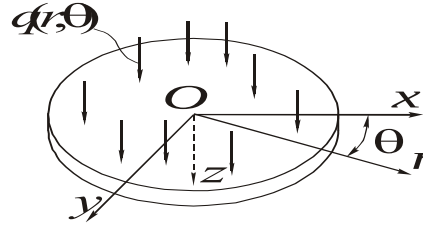


Рис.13.7

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (13.10)$$

Наиболее просто решаются задачи осесимметричного изгиба круглых и кольцевых пластин, при котором нагрузка и условия закрепления не зависят от полярного угла θ . В этом случае дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет вид:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q(r). \quad (13.11)$$

Общее решение этого уравнения определяется по формуле:

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + w^*(r), \quad (13.12)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 – постоянные интегрирования, а $w^*(r)$ – частное решение дифференциального уравнения (13.11), определяемое по формуле

$$w^*(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (13.13)$$

Для равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ оно имеет следующий

вид:
$$w^*(r) = \frac{qr^4}{64D}. \quad (13.14)$$

При осесимметричном изгибе в пластине возникают только три внутренних усилия – радиальный и кольцевой (окружной) изгибающие моменты M_r, M_θ и радиальная поперечная сила Q_r (рис.13.8).

Внутренние усилия определяются по формулам

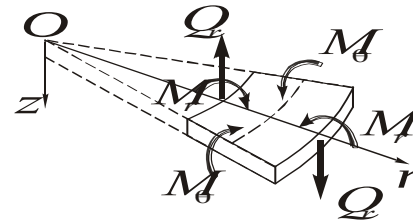


Рис.13.8

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\theta &= -D \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Эти внутренние усилия являются равнодействующими напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{rz} = \tau_{rz}$. Характер изменения этих напряжений по толщине пластины показан на рис.13.15 к задаче 13.3.

13.2. Примеры решения задач

Задача 13.1.

Стальная прямоугольная шарнирно опертая пластина находится под действием распределенной поперечной нагрузки, изменяющейся по закону

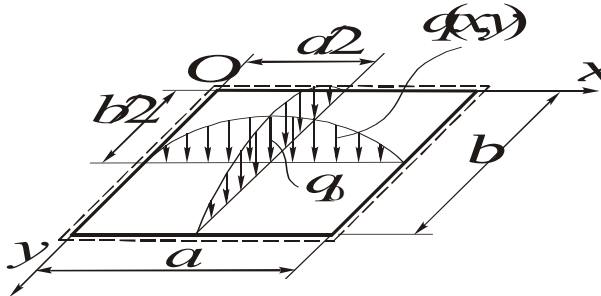


Рис.13.9

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (\text{рис.13.9}).$$

Определим внутренние усилия и напряжения в пластине и построим их эпюры. Определим толщину пластины из условий прочности и жесткости. В расчетах примем $\nu = 0,3$, $q_0 = 0,01 \text{ кН/см}^2$, $a = 150 \text{ см}$, $b = 120 \text{ см}$, $R = 21 \text{ кН/см}^2$, $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,0$, $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $w_{\text{нб}}/b \leq 1/200$ (b – длина меньшей стороны).

Под действием заданной нагрузки прогиб пластины также изменяется по одной полуволне синусоиды вдоль координатных линий:

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При этом граничные условия шарнирного опирания выполняются точно:

$$\begin{aligned} x=0, \quad x=a, \quad w=0, \quad M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ y=0, \quad y=b, \quad w=0, \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Подставив выражения для прогиба и нагрузки в дифференциальное уравнение изгиба пластины (13.2), получим:

$$w_0 = \frac{q_0}{D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Определим внутренние усилия в пластине:

$$\begin{aligned} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= \frac{q_0 \left(\frac{1}{b^2} + \nu \frac{1}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \end{aligned}$$

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} ;$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -\frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} ;$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -\frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} .$$

Характер эюр прогиба и внутренних усилий показан на рис.13.10.

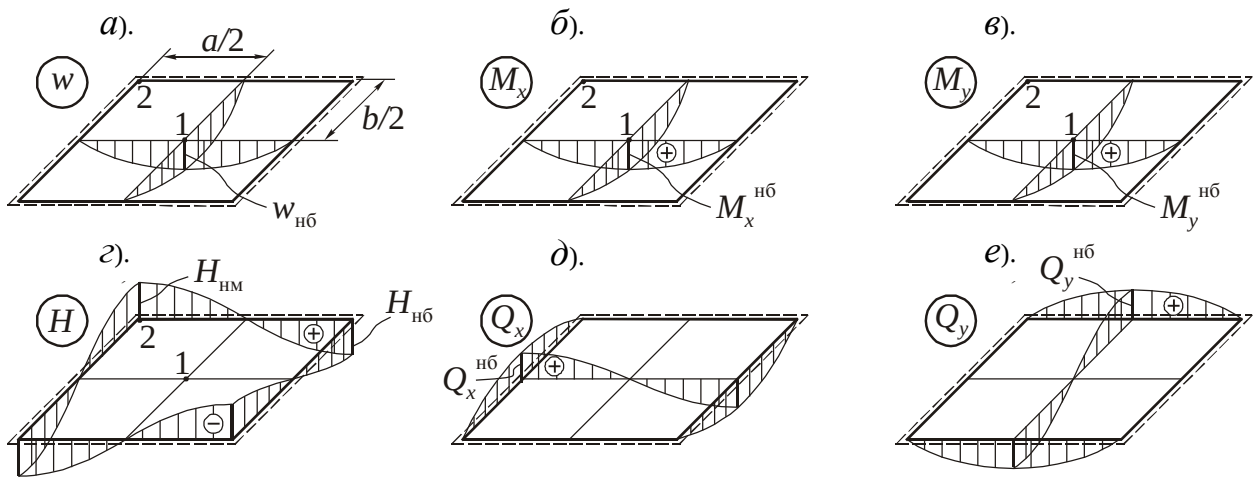


Рис.13.10

Наибольшие значения прогиб и изгибающие моменты имеют в середине пластины ($x = a/2, y = b/2$), а крутящий момент – в угловых точках. Поперечные силы имеют наибольшие значения в серединах сторон.

Определим числовые значения наибольших внутренних усилий.

$$M_x^{\text{нб}} = \frac{0,01 \left(\frac{1}{150^2} + 0,3 \frac{1}{120^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 5,1 \text{ кНсм/см} ;$$

$$M_y^{\text{нб}} = \frac{0,01 \left(\frac{1}{120^2} + 0,3 \frac{1}{150^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 6,47 \text{ кНсм/см} ;$$

$$H_{\text{нб}} = |H_{\text{нм}}| = \frac{0,01 \cdot (1-0,3)}{\pi^2 \cdot 150 \cdot 120 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2} \cdot 1 \cdot 1 = 3,04 \text{ кНсм/см} ;$$

$$Q_x^{\text{нб}} = \frac{0,01}{\pi \cdot 150 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)} \cdot 1 \cdot 1 = 0,186 \text{ кН/см};$$

$$Q_y^{\text{нб}} = \frac{0,01}{\pi \cdot 120 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)} \cdot 1 \cdot 1 = 0,233 \text{ кН/см}.$$

Определим толщину пластины h из условия прочности по энергетической теории. Опасными в смысле прочности являются точки 1 и 2. В этих точках изгибающие и крутящий моменты имеют наибольшие значения, а поперечные силы равны нулю.

Выразив наибольшие значения напряжений σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ через M_x , M_y и H и используя формулу (13.9), получим:

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R \cdot \gamma_c} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3H^2}} \quad (13.16)$$

Подставив в (13.10) наибольшие значения внутренних усилий, находим

Точка 1 ($x = a/2, y = b/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{5,1^2 + 6,47^2 - 5,1 \cdot 6,47}} = 1,3 \text{ см}.$$

Точка 2 ($x = 0, y = 0$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{3 \cdot 3,04^2}} = 1,23 \text{ см}.$$

Определим толщину пластины из условия жесткости, согласно которому наибольший прогиб $w_{\text{нб}}$ в середине пластины не должен превышать величину $b/200$, где b – меньший из размеров сторон пластины.

$$w_{\text{нб}} = w_0 = \frac{q_0}{D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \leq \frac{b}{200} = 0,6 \text{ см}.$$

Учитывая выражение (13.3) для жесткости, получим

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12(1 - 0,3^2) \cdot 0,01}{2,1 \cdot 10^4 \cdot \pi^4 \cdot 0,6 \left(\frac{1}{150^2} + \frac{1}{120^2} \right)^2}} = 1,899 \text{ см}.$$

Примем с округлением большую толщину $h = 1,9 \text{ см}$.

Определим напряжения в точке с координатами $x = a/4, y = b/4$. В этой точке все внутренние усилия отличны от нуля и равны половине наибольших. Наибольшие значения напряжений равны:

$$\sigma_x^{\text{нб}} = \frac{6M_x}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 5,1}{1,9^2} = 4,24 \text{ кН/см}^2 = 42,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{\text{нб}} = \frac{6M_y}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 6,47}{1,9^2} = 5,38 \text{ кН/см}^2 = 53,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy}^{нб} = \frac{6H}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 3,04}{1,9^2} = 2,53 \text{ кН/см}^2 = 25,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zx}^{нб} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,5 \cdot 0,186}{1,9} = 0,073 \text{ кН/см}^2 = 0,73 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zy}^{нб} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,5 \cdot 0,233}{1,9} = 0,092 \text{ кН/см}^2 = 0,92 \text{ МПа};$$

Эпюры напряжений в данной точке приведены на рис.13.11

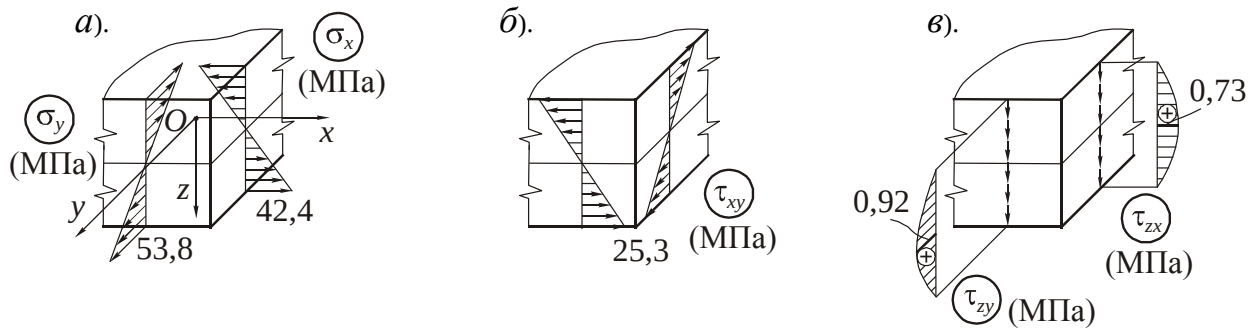


Рис.13.11

Задача 13.2.

Стальная прямоугольная шарнирно опертая пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ (рис.13.12).

Определим внутренние усилия и напряжения в пластине и выполним расчет пластины на прочность и жесткость.

В расчетах примем: $a = 50\text{см}$, $b = 80\text{см}$, $q = 0,02\text{кН/см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\nu = 0,3$, $\gamma_c = 1,0$, $\gamma_f = 1,0$, $R = 21\text{кН/см}^2$, $w_{нб} / a \leq 1/200$ (a – длина меньшей стороны пластины).

При действии на шарнирно опертую прямоугольную пластину произвольных поперечных нагрузок задачу расчета можно решить с помощью двойных тригонометрических рядов.

Искомый прогиб пластины необходимо представить в виде ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (13.17)$$

Такое представление прогиба обеспечивает точное выполнение граничных условий шарнирного опирания.

Произвольная распределенная поперечная нагрузка должна быть также разложена в двойной тригонометрический ряд по синусам.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (13.18)$$

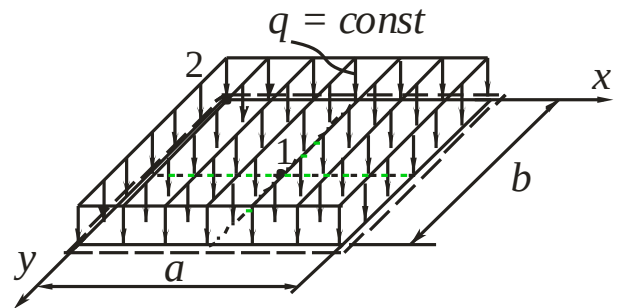


Рис.13.12

При распределении нагрузки по всей площади пластины имеем:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy . \quad (13.19)$$

После подстановки выражений (13.17) и (13.18) в дифференциальное уравнение изгиба пластины (13.2) получим формулу для коэффициентов w_{mn} :

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} . \quad (13.20)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ индексы m и n могут быть только нечетными числами ($m, n = 1, 3, 5, \dots$). После интегрирования по формуле (13.19) получим:

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn} . \quad (13.21)$$

Таким образом, прогиб пластины а также внутренние усилия выражаются в виде бесконечных тригонометрических рядов. Сходимость ряда для прогиба является достаточно хорошей при действии любой поперечной нагрузки, в том числе и сосредоточенной или распределенной по линии (полосовая нагрузка). Сходимость рядов для внутренних усилий хуже, чем сходимость ряда для прогиба. В точках приложения сосредоточенных сил ряды для внутренних усилий становятся расходящимися.

Выполним числовой расчет данного примера, используя четыре члена ряда ($m = 1, 3, n = 1, 3$). Определим наибольший прогиб пластины в ее середине при $x = a/2$ и $y = b/2$.

$$\begin{aligned} w_{\text{нб}} &= \frac{16qa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\ &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^4}{D\pi^6} \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{(-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \frac{(-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = \frac{1035,4}{D} , \end{aligned}$$

где $k = a/b = 50/80 = 0,625$.

Наибольшие изгибающие моменты в середине пластины равны

$$\begin{aligned} M_x^{\text{нб}} &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{(m^2 + \nu k^2 n^2) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2 n^2)^2} = \\ &= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{(1^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{(3^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot (-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \frac{(3^2 + 0,3 \cdot 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot (-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 4,24 \text{ кНсм/см}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y^{\text{нб}} &= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{(vm^2 + k^2n^2) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + k^2n^2)^2} = \\
&= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{(0,3 \cdot 1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{(0,3 \cdot 3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2) \cdot (-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(0,3 \cdot 1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot 1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \frac{(0,3 \cdot 3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2) \cdot (-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 2,36 \text{ кНсм/см};
\end{aligned}$$

Крутящий момент имеет наибольшее значение в углах пластины при $x = 0, y = 0$ и $x = a, y = b$.

$$\begin{aligned}
H_{\text{нб}} = |H_{\text{нм}}| &= \frac{16q(1-\nu)ka^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(m^2 + k^2n^2)^2} = \\
&= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot (1-0,3) \cdot 0,625 \cdot 50^2}{\pi^4} \left[\frac{1}{(1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \frac{1}{(3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} + \frac{1}{(3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)^2} \right] = 2,1 \text{ кНсм/см};
\end{aligned}$$

Поперечные силы имеют наибольшие значения в серединах сторон пластины.

$$\begin{aligned}
Q_x^{\text{нб}} &= \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n(m^2 + k^2n^2)} = \\
&= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 50}{\pi^3} \left[\frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \frac{1}{1 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)}{3 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} \right] = 0,374 \text{ кН/см};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_y^{\text{нб}} &= \frac{16qka}{\pi^3} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m(m^2 + k^2n^2)} = \\
&= \frac{16 \cdot 0,02 \cdot 0,625 \cdot 50}{\pi^3} \left[\frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 1^2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 \cdot (1^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} + \frac{(-1)}{3 \cdot (3^2 + 0,625^2 \cdot 3^2)} \right] = 0,283 \text{ кН/см}.
\end{aligned}$$

Определим толщину пластины из условия прочности по энергетической теории.

Точка 1 ($x = a/2, y = b/2, z = \pm h/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R \cdot \gamma_c} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y}} = \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{4,24^2 + 2,36^2 - 4,24 \cdot 2,36}} = 1,03 \text{ см}.$$

Точка 2 ($x = 0, y = 0, z = \pm h/2$)

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R \cdot \gamma_c}} \sqrt{3H^2} = \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0}} \sqrt{3 \cdot 2,1^2} = 1,02 \text{ см.}$$

Потребуем выполнения условия жесткости пластины.

$$w_{\text{нб}} = \frac{1035,4}{D} = \frac{12(1 - \nu^2) \cdot 1035,4}{Eh^3} \leq \frac{a}{200} = 0,25 \text{ см.}$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{12(1 - 0,3^2) \cdot 1035,4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,25}} = 1,29 \text{ см.}$$

Примем с округлением большую толщину $h = 1,3 \text{ см.}$

Задача 13.3.

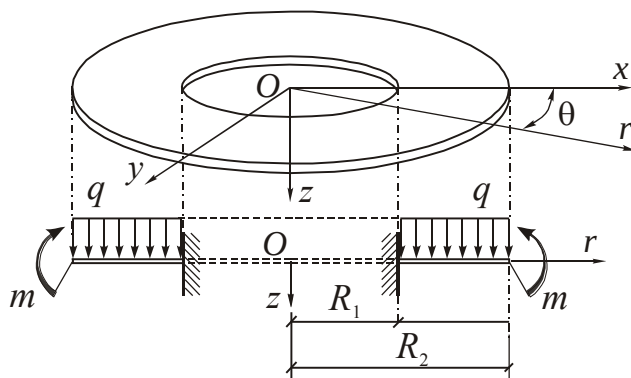


Рис.13.13

Для стальной кольцевой пластины, находящейся в условиях осесимметричного изгиба под действием показанной на рис.13.13 распределенной нагрузки, построим эпюры внутренних усилий и прогиба. Определим толщину пластины из условий прочности и жесткости. Построим эпюры напряжений в одном из опасных сечений.

В расчетах примем: $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\nu = 0,3$, $\gamma_c = \gamma_f = 1,0$, $R = 21 \text{ кН/см}^2$, $R_1 = 30 \text{ см}$, $R_2 = 60 \text{ см}$, $q = 0,01 \text{ кН/см}^2$, $m = 3 \text{ кНсм/см}$, $w_{\text{нб}} \leq R_1/100$.

Прогиб, угол поворота нормали и внутренние усилия в пластине определяются по формулам:

$$\begin{aligned} w(r) &= C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}, \\ \varphi_r &= \frac{dw}{dr} = C_2 \frac{1}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2 \ln r + 1) + \frac{qr^3}{16D}, \\ M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[-C_2(1 - \nu) \frac{1}{r^2} + 2C_3(1 + \nu) + \right. \\ &\quad \left. + 2C_4(1 + \nu) \ln r + C_4(3 + \nu) + \frac{qr^2}{16D}(3 + \nu) \right]; \\ M_\theta &= -D \left(\nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[C_2(1 - \nu) \frac{1}{r^2} + 2C_3(1 + \nu) + \right. \\ &\quad \left. + 2C_4(1 + \nu) \ln r + C_4(1 + 3\nu) + \frac{qr^2}{16D}(1 + 3\nu) \right]; \end{aligned}$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \nabla^2 w = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left(4C_4 \frac{1}{r} + \frac{qr}{2D} \right).$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия:

$$r=R_1, \quad w=0, \quad \varphi_r=0;$$

$$r=R_2, \quad M_r=m, \quad Q_r=0.$$

Вначале используем граничное условие относительно поперечной силы.

$$Q_r(R_2) = -D \left(4C_4 \frac{1}{R_2} + \frac{qR_2}{2D} \right) = 0; \quad C_4 = -\frac{qR_2^2}{8D} = -\frac{4,5}{D}.$$

Для определения постоянных C_2 и C_3 используем граничные условия относительно φ_r и M_r .

$$\varphi_r(R_1) = C_2 \frac{1}{R_1} + 2C_3 R_1 + C_4 R_1 (2 \ln R_1 + 1) + \frac{qR_1^3}{16D} = 0,$$

$$M_r(R_2) = -D \left[-C_2(1-\nu) \frac{1}{R_2^2} + 2C_3(1+\nu) + 2C_4(1+\nu) \ln R_2 + \right. \\ \left. + C_4(3+\nu) + \frac{qR_2^2}{16D}(3+\nu) \right] = m.$$

Подставив выражение для C_4 и числовые значения R_1 , R_2 , q , m и ν , получим систему двух алгебраических уравнений относительно C_2 и C_3 :

$$\left. \begin{aligned} D(33,3 \cdot 10^{-3} C_2 + 60 C_3) &= 1036; \\ D(0,194 \cdot 10^{-3} C_2 - 2,6 C_3) &= -52,33. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим

$$C_2 = -\frac{4525}{D}; \quad C_3 = \frac{19,79}{D}.$$

Запишем окончательные выражения для радиального и кольцевого (окружного) изгибающих моментов и радиальной поперечной силы.

$$M_r = -\frac{3167}{r^2} + 11,7 \ln r - 2,06 \cdot 10^{-3} r^2 - 36,6;$$

$$M_\theta = \frac{3167}{r^2} + 11,7 \ln r - 1,19 \cdot 10^{-3} r^2 - 42,9;$$

$$Q_r = \frac{q(R_2^2 - r^2)}{2r} = \frac{5 \cdot 10^{-3} (3600 - r^2)}{r}.$$

Определим числовые значения внутренних усилий в сечениях пластины с шагом $a = \frac{1}{4}(R_2 - R_1) = 7,5$ см.

Результаты расчета приведены в табл.13.1

Таблица 13.1

r , см	M_r , кНсм/см	M_θ , кНсм/см	Q_r , кН/см	$w \circ D$
30	-2,181	-0,654	0,45	0
37,5	0,653	0,088	0,293	29,96
45	2,198	0,799	0,175	27,61
52,5	2,909	1,319	0,080	-91,86
60	3,0	1,610	0	-363,9

Для определения постоянной C_1 используем граничное условие относительно прогиба на внутреннем жестко защемленном крае пластины.

$$w(R_1) = C_1 + C_2 \ln R_1 + C_3 R_1^2 + C_4 R_1^2 \ln R_1 + \frac{q R_1^4}{64D} = 0.$$

Отсюда находим

$$C_1 = \frac{11230}{D}.$$

Запишем окончательное выражение для прогиба.

$$w(r) = \frac{1}{D} (11230 - 4525 \ln r + 19,79 r^2 - 4,5 r^2 \ln r + 1,56 \cdot 10^{-4} r^4).$$

Значения прогиба, умноженные на жесткость D , приведены в таблице. Эпюры внутренних усилий и прогиба приведены на рис.13.14.

Определим толщину пластины h из условий прочности и жесткости. Опасным в смысле прочности является кольцевое сечение на внешнем крае пластины, где M_r и M_θ имеют наибольшие значения. Используем энергетическую теорию прочности. Условие прочности в точках при $z = \pm h/2$ имеет следующий вид

$$\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} \leq \gamma_c R.$$

Подставив выражения наибольших напряжений через изгибающие моменты, получим

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R \cdot \gamma_c} \sqrt{M_r^2 + M_\theta^2 - M_r M_\theta}} = \sqrt{\frac{6}{21 \cdot 1,0} \sqrt{3^2 + 1,61^2 - 3 \cdot 1,61}} = 0,86 \text{ см}.$$

Поставим условие жесткости на внешнем контуре пластины

$$|w_{\text{нб}}| = \frac{363,9}{D} \leq \frac{R_1}{100} = 0,3 \text{ см}.$$

Использував формулу для жесткости пластины, определим требуемую толщину

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{363,9 \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot 0,3}} = \sqrt[3]{\frac{363,9 \cdot 12(1 - 0,3^2)}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 0,3}} = 0,86 \text{ см}.$$

Принимаем с округлением $h = 0,9$ см.

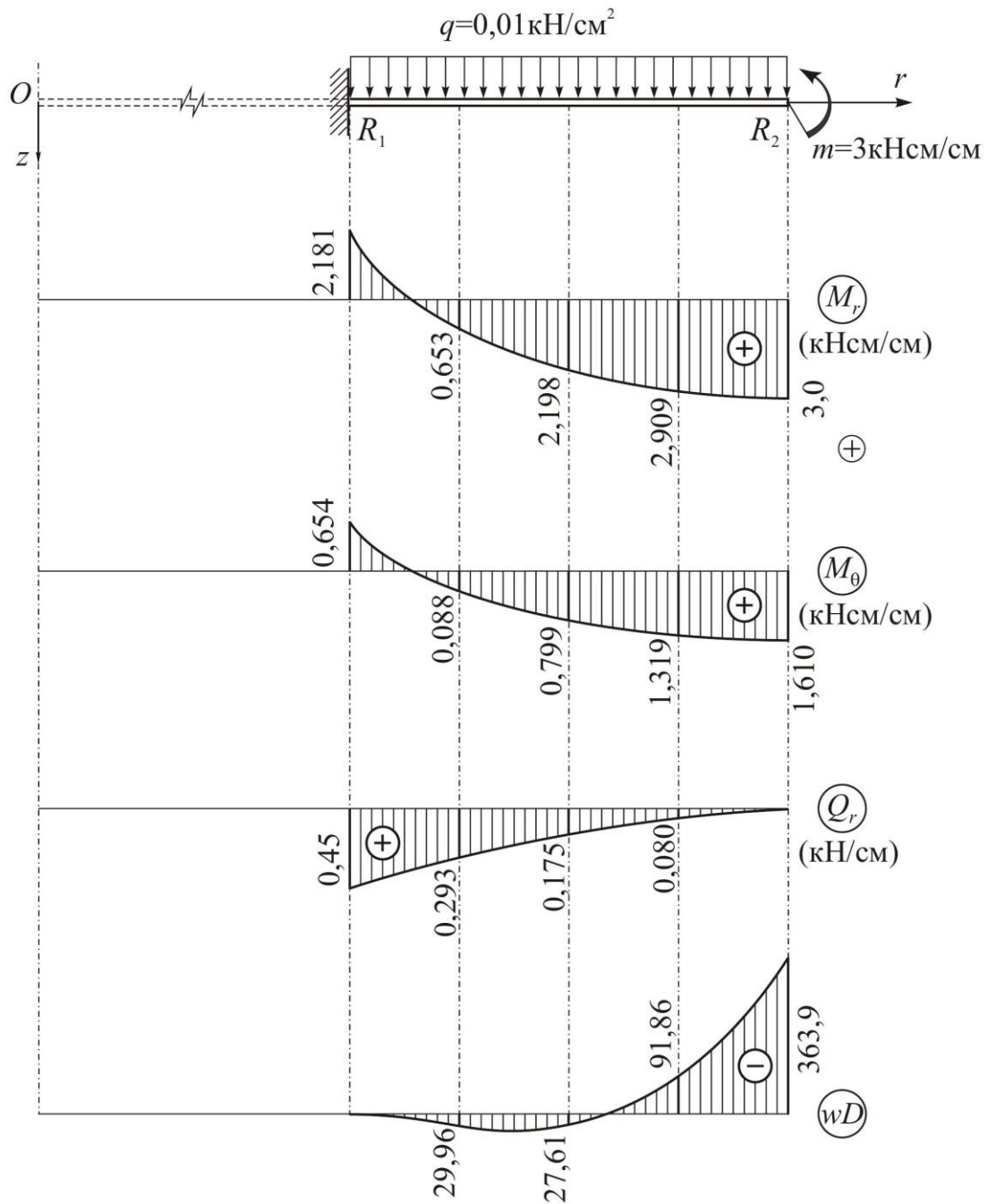


Рис.13.14

Определим наибольшие нормальные и касательные напряжения в пластине.

Сечение $r = R_2$

$$\sigma_r^{\text{нб}} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 3}{0,9^2} = 22,2 \text{ кН/см}^2 = 222 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta^{\text{нб}} = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,61}{0,9^2} = 11,9 \text{ кН/см}^2 = 119 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zr} = 0.$$

Сечение $r = R_1$

$$\tau_{zr}^{\text{нб}} = \frac{3 Q_r}{2 h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,45}{0,9} = 0,75 \text{ кН/см}^2 = 7,5 \text{ МПа};$$

Эпюры напряжений приведены на рис.13.15.

а). Сечение $r = R_2$

б). Сечение $r = R_1$

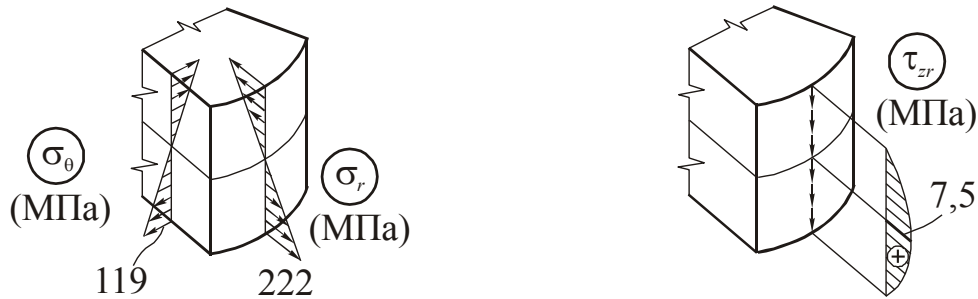


Рис.13.15

Для кольцевых пластин, закрепленных по обоим краям, определение постоянных интегрирования является более громоздким, так как необходимо решать систему алгебраических уравнений с тремя или четырьмя неизвестными. Отметим, что для расчета пластин при любых нагрузках и условиях закрепления имеются программные комплексы для ПК.

ГЛАВА 14

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИЗГИБУ ПЛАСТИН

14.1. Основные уравнения пространственной задачи теории упругости в декартовых координатах

Уравнения равновесия Навье:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции удельных объемных сил.

Соотношения Коши:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Закон Гука в прямой и обратной формах:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3,a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3,б)$$

В равенствах (14.3,a) и (14.3,б)

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (14.4)$$

Граничные условия:

а) на поверхности заданы перемещения

$$u = \varphi_1(x, y, z); \quad v = \varphi_2(x, y, z); \quad w = \varphi_3(x, y, z). \quad (14.5)$$

б) на поверхности заданы силовые воздействия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= p_{xv}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= p_{yv}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= p_{zv}. \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

14.2. Постановка задачи теории упругости в перемещениях

Уравнения Ляме

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_x &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + F_y &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Граничные условия:

а) зависимости (14.5), если на границе заданы перемещения.

б) зависимости (14.6) в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} \lambda e l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) &= p_{xv}; \\ \lambda e m + \mu \frac{\partial v}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) &= p_{yv}; \\ \lambda e n + \mu \frac{\partial w}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) &= p_{zv}, \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

если на границе заданы силовые воздействия.

14.3. Постановка задачи теории упругости в напряжениях

Уравнения равновесия Навье (14.1).

Уравнения Бельтрами-Митчелла:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \end{aligned} \right\} \quad (14.9,a)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}; \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}; \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} &= -\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (14.9,б)$$

где $s = J_1$ – первый инвариант тензора напряжений.

Граничные условия (14.6).

14.4. Основные уравнения пространственной задачи теории упругости в цилиндрических координатах

Уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

где F_r, F_θ, F_z – проекции удельных объемных сил.

Связь между деформациями и перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Связь между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_r, & \tau_{r\theta} &= \mu \gamma_{r\theta}; \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_\theta, & \tau_{\theta z} &= \mu \gamma_{\theta z}; \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{rz} &= \mu \gamma_{rz}. \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

Оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (14.13)$$

14.5. Основные уравнения пространственной задачи теории упругости в сферических координатах

Уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{r\varphi}}{r} + F_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\tau_{r\theta} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} + F_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

Связь между деформациями и перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \operatorname{ctg} \varphi + u \right), & \gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi \right); \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right), & \gamma_{\varphi r} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

Связь между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_r, & \tau_{r\theta} &= \mu \gamma_{r\theta}; \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_\theta, & \tau_{\theta\varphi} &= \mu \gamma_{\theta\varphi}; \\ \sigma_\varphi &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_\varphi, & \tau_{\varphi r} &= \mu \gamma_{\varphi r}. \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

14.6. Осесимметричные задачи теории упругости

Уравнения равновесия при отсутствии объёмных сил:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.17)$$

Связь между деформациями и перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

Связь между напряжениями и деформациями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_r, & \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_\theta, & \tau_{zr} &= \mu \gamma_{zr}. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Уравнения совместности деформаций

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_\theta + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial r \partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

где $s = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = J_1$.

Решение осесимметричной задачи с помощью функции Лява:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(v \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); & \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(v \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2-v) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1-v) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

Функция Лява удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (14.22)$$

14.7. Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Уравнения совместности:

– для плоского напряжённого состояния

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+v) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right); \quad (14.24,a)$$

– для плоской деформации

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-v} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right). \quad (14.24,b)$$

Граничные условия

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = p_{xv}; \quad \tau_{yx} l + \sigma_y m = p_{yv}. \quad (14.25)$$

Принимая $F_x = F_y = 0$ и вводя функцию напряжений Эри по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (14.26)$$

получим относительно функции φ бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (14.27)$$

Функция φ должна удовлетворять граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m = p_{xv}, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m = p_{yv}. \quad (14.28)$$

14.8. Плоская задача теории упругости в полярных координатах

Уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

Уравнение совместности деформаций

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (14.30)$$

Бигармоническое уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (14.31)$$

Выражения для напряжений через функцию напряжений φ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.32)$$

14.9. Плоская задача термоупругости

Закон Дюгамеля-Неймана в случае плоского напряжённого состояния:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad (14.33)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения, T – температура.

Закон Дюгамеля-Неймана в случае плоской деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) + \alpha T; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x) + \alpha T; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \quad (14.34)$$

Уравнения равновесия (14.23), при $F_x = F_y = 0$, остаются без изменения.

Уравнения совместности деформаций принимают вид:

в случае плоского напряжённого состояния:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha \nabla^2 T = 0, \quad (14.35)$$

а в случае плоской деформации

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{E\alpha}{1-\nu} \nabla^2 T = 0, \quad (14.36)$$

14.10. Примеры решения задач

Задача 14.1. Толстостенный сферический сосуд, находящийся под действием равномерного внутреннего и внешнего давления.

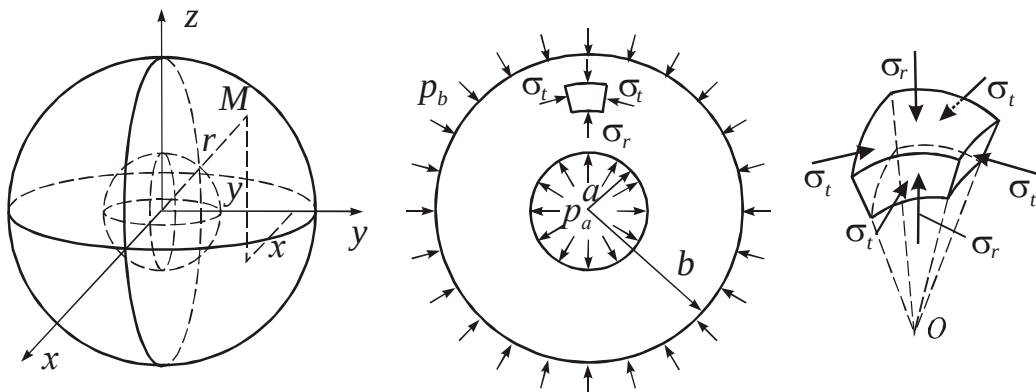


Рис.14.1

Пусть сферический сосуд с внутренним радиусом a и внешним радиусом b нагружен внутренним давлением p_a и внешним давлением p_b . Объёмные силы принимаем равными нулю ($F_x = F_y = F_z = 0$).

Деформированное состояние является симметричным относительно центра сосуда, в котором поместим начало координат $Oxyz$. Искомые перемещения представим в форме

$$u = \varphi(r)x, \quad v = \varphi(r)y, \quad w = \varphi(r)z, \quad (14.37)$$

где
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (14.38)$$

Для нахождения неизвестной функции $\varphi(r)$ воспользуемся уравнениями Ляме (14.7) в постановке задачи теории упругости в перемещениях, рассмотренной в §14.2.

Граничные условия имеют вид:

$$r = a \quad \sigma_r = -p_a, \quad r = b \quad \sigma_r = -p_b. \quad (14.39)$$

Для подстановки выражений (14.37) в уравнения Ляме (14.7) найдём частные производные u, v и w .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \varphi, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{xy}{r} \frac{d\varphi}{dr}, & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{xz}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{xy}{r} \frac{d\varphi}{dr}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{y^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \varphi, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{yz}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{xz}{r} \frac{d\varphi}{dr}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{yz}{r} \frac{d\varphi}{dr}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{z^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14.40)$$

С учётом этих равенств найдём

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3\varphi + r \frac{d\varphi}{dr}, \quad (14.41)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = x \left(\frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right). \quad (14.42)$$

Нетрудно получить аналогичные выражения для $\frac{\partial e}{\partial y}$ и $\frac{\partial e}{\partial z}$.

Преобразуем оператор Лапласа
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (14.43)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \varphi \right) = \frac{3xr^2 - x^3}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{x^3}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{xr^2 - xy^2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{xy^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xz}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{xr^2 - xz^2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{xz^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.44)$$

Подставляя выражения (14.44) в (14.43), получим

$$\nabla^2 u = \frac{5xr^2 - xr^2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{xr^2}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} = x \left(\frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \right). \quad (14.45)$$

Аналогичные выражения можно получить и для операторов $\nabla^2 v$ и $\nabla^2 w$.

Подставляя найденные выражения в уравнения Ляме (14.7) с учётом отсутствия объёмных сил, получим уравнение относительно функции $\varphi(r)$

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (14.46)$$

Решение этого уравнения найдём следующим образом

$$\varphi = r^n, \quad \frac{d\varphi}{dr} = nr^{n-1}, \quad \frac{d^2 \varphi}{dr^2} = n(n-1)r^{n-2}.$$

Подставив эти выражения в (14.46), получим характеристическое уравнение

$$n^2 + 3n = 0, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = -3.$$

Следовательно, общее решение уравнения (14.46) имеет вид:

$$\varphi(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^3}. \quad (14.47)$$

Легко также получить

$$e = 3C_1 + \frac{3C_2}{r^3} - \frac{3C_2}{r^3} = 3C_1. \quad (14.48)$$

Постоянные C_1 и C_2 найдём из граничных условий (14.39). Для этого преобразуем выражение для напряжений

$$\sigma_r = \lambda e + 2\mu \frac{du}{dr}, \quad (14.49)$$

где u – перемещение произвольной точки в радиальном направлении.

Единичный вектор $\vec{r}$ имеет координаты $\vec{r} = \{l, m, n\}$, где

$$l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \quad n = \frac{z}{r} \quad (14.50)$$

направляющие косинусы вектора $\vec{r}$.

Вектор перемещений $\vec{u}$ имеет составляющие $\vec{u} = \{u, v, w\}$.

Составим скалярное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{u}$.

$$\vec{r} \cdot \vec{u} = ul + vm + wn = |\vec{r}| \text{Пр}_r \vec{u} = u.$$

Из этого равенства, с учётом (14.50), имеем

$$u = \frac{ux + vy + wz}{r}. \quad (14.51)$$

Подставляя (14.51) и (14.48) в (14.49), получим

$$\sigma_r = 3\lambda C_1 + 2\mu \frac{d}{dr}(r\varphi) = (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu C_2}{r^3}. \quad (14.52)$$

Используя граничные условия (14.39), получаем

$$C_1 = \frac{p_b b^3 - p_a a^3}{(3\lambda + 2\mu)(a^3 - b^3)}, \quad C_2 = \frac{a^3 b^3 (p_b - p_a)}{4\mu(a^3 - b^3)}.$$

Подставляя эти значения в (14.52), получаем окончательное выражение для напряжений в радиальном направлении

$$\sigma_r = \frac{p_b b^3 - p_a a^3}{(a^3 - b^3)} - \frac{a^3 b^3 (p_b - p_a)}{(a^3 - b^3) r^3}. \quad (14.53)$$

Найдём нормальное напряжение на любой площадке, плоскость которой проходит через центр сферического сосуда. Обозначим его через σ_t .

Если обозначить единичный вектор нормали этой площадки через $\vec{t} = \{l_1, m_1, n_1\}$, то направляющие косинусы этого вектора будут удовлетворять условию

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0,$$

или внося сюда (14.50) получим другое условие

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0. \quad (14.54)$$

Нормальное напряжение σ_t найдём по формуле

$$\sigma_t = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1. \quad (14.55)$$

По закону Гука, с учётом (14.40), имеем

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \left(\varphi + \frac{x^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad \tau_{xy} = 2\mu \frac{xy}{r} \frac{d\varphi}{dr};$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \left(\varphi + \frac{y^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad \tau_{yz} = 2\mu \frac{yz}{r} \frac{d\varphi}{dr};$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \left(\varphi + \frac{z^2}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad \tau_{zx} = 2\mu \frac{zx}{r} \frac{d\varphi}{dr}.$$

Подставляя эти выражения в (14.55), получим

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (\lambda e + 2\mu \varphi)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + \frac{2\mu}{r} (x^2 l_1^2 + y^2 m_1^2 + z^2 n_1^2) + \\ &+ \frac{4\mu}{r} \frac{d\varphi}{dr} (xyl_1 m_1 + yzm_1 n_1 + zxn_1 l_1) = \lambda e + 2\mu \varphi + \\ &+ \frac{2\mu}{r} \frac{d\varphi}{dr} (l_1 x + m_1 y + n_1 z)^2 = \lambda e + 2\mu \varphi = (3\lambda + 2\mu)C_1 + \frac{2\mu C_2}{r^3}. \end{aligned}$$

Внося сюда значения C_1 и C_2 , получаем окончательное выражение для нормальных напряжений в направлении t .

$$\sigma_t = \frac{p_b b^3 - p_a a^3}{(a^3 - b^3)} + \frac{a^3 b^3 (p_b - p_a)}{(a^3 - b^3) r^3}.$$

Задача 14.2. Чистый изгиб балки.

Предположим, что балка (не обязательно прямоугольного сечения) изгибается двумя равными и противоположно направленными моментами M , приложенными к её концам (рис.14.2). Объёмные силы отсутствуют.

Проверим, можно ли удовлетворить уравнениям теории упругости, если принять, что

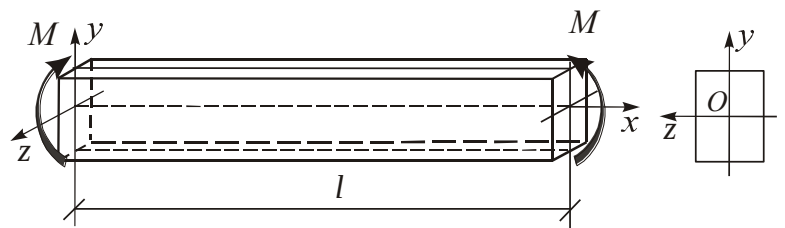


Рис.14.2

распределение напряжений такое же, которое известно из курса сопротивления материалов.

Итак, примем:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (14.56)$$

Воспользуемся постановкой задачи теории упругости в напряжениях, рассмотренной в п.14.3.

Уравнения равновесия (14.1) и уравнения совместности в напряжениях (14.9,a) и (14.9,b), при условии $F_x = F_y = F_z = 0$, удовлетворяются. Удовлетворяются также и граничные условия (14.5) на ненагруженных боковых поверхностях балки. На торцевых плоскостях второе и третье равенства из граничных условий (5) выполняются. Подставляя в первое условие $l = \cos(\nu, x) = 1$, получим $f_x = \sigma_x$. На основании этого заключаем, что решение (14.56) является точным, если к концевым сечениям приложены внешние силы, распределённые так же, как и напряжения σ_x . Если же на торцах выполняется интегральное граничное условие

$$\iint_F \sigma_x y dF = M, \quad (14.57)$$

то согласно принципу Сен-Венана решение (14.56) удовлетворяет уравнениям теории упругости только на некотором удалении от торцов балки.

Определим перемещения с помощью формул теории упругости.

Деформации согласно формулам (14.3,a) равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (14.58)$$

Используя соотношения Коши (14.2), перейдём от деформаций к перемещениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{M_z}{EJ_z} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_z}{EJ_z} y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{M_z}{EJ_z} y; \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (14.59)$$

Интегрируя первые три равенства, получим

$$u = \frac{M_z}{EJ_z} xy + f_1(y, z), \quad v = -\nu \frac{M_z}{2EJ_z} y^2 + f_2(x, z), \quad w = -\nu \frac{M_z}{EJ_z} yz + f_3(x, y). \quad (14.60)$$

Для определения неизвестных функций f_1, f_2, f_3 используем последние три равенства (14.59):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{M_z}{EJ_z} x + \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad -\nu \frac{M_z}{EJ_z} z + \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0. \quad (14.61)$$

Для нахождения функции f_1 продифференцируем первое уравнение по y , а третье – по z . В результате получим

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0.$$

Из этих равенств следует, что функция f_1 содержит переменные y и z в первой степени:

$$f_1(y, z) = ay + bz + c. \quad (14.62)$$

Аналогично из второго и третьего уравнений получим

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 0.$$

$$f_3(x, y) = dx + ey + f. \quad (14.63)$$

Наконец, из первого и второго уравнений имеем

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{M_z}{EJ_z} = 0, \quad -v \frac{M_z}{EJ_z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0.$$

$$f_2(x, z) = -\frac{M_z}{2EJ_z} x^2 + gx + v \frac{M_z}{2EJ_z} z^2 + hz + i. \quad (14.64)$$

Выражения (14.62), (14.63), (14.64) содержат 9 постоянных. Эти постоянные должны быть связаны некоторыми соотношениями. Чтобы найти эти соотношения, подставим функции в уравнения (14.61). В результате получим

$$g + a = 0, \quad e + h = 0, \quad b + d = 0.$$

Отсюда получим

$$g = -a, \quad e = -h, \quad b = -d.$$

Таким образом имеем

$$f_1(y, z) = ay + bz + c;$$

$$f_2(x, z) = -\frac{M_z}{2EJ_z} x^2 - ax + v \frac{M_z}{2EJ_z} z^2 - ez + i;$$

$$f_3(x, y) = -bx + ey + f.$$

Теперь имеем только 6 произвольных постоянных: a, b, c, e, i, f .

Перемещения по формулам (14.60) равны

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M_z}{EJ_z} xy + ay + bz + c; \\ v &= -v \frac{M_z}{2EJ_z} y^2 - \frac{M_z}{2EJ_z} x^2 - ax + v \frac{M_z}{2EJ_z} z^2 - ez + i; \\ w &= -v \frac{M_z}{EJ_z} yz - bx + ey + f. \end{aligned} \right\} \quad (14.65)$$

Произвольные постоянные найдём из условий закрепления балки. Предположим, что середина левого конца неподвижна. Тогда при $x = y = z = 0$ должно быть

$$u = v = w = 0. \quad (14.66)$$

Далее поставим условие, что поворот элемента оси балки у левого конца вокруг осей Oy и Oz отсутствует. Это даст при $x = y = z = 0$ условия

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (14.67)$$

Устраним вращение балки вокруг оси Ox . Для этого закрепим, например, элемент dy оси Oy против поворота в плоскости Oyz , т.е. поставим условие, что при $x = y = z = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (14.68)$$

Используя условия (14.66), (14.67) и (14.68), получим

$$a = b = c = e = i = f = 0. \quad (14.69)$$

Получаем следующие окончательные выражения для перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M_z}{EJ_z} xy; \\ v &= -\frac{M_z}{2EJ_z} [x^2 + v(y^2 - z^2)]; \\ w &= -v \frac{M_z}{EJ_z} yz. \end{aligned} \right\} \quad (14.70)$$

Уравнение изогнутой оси получим, если в формулах (14.70) подставим $y = z = 0$:

$$v = -\frac{M_z}{2EJ_z} x^2, \quad u = w = 0.$$

Этот результат совпадает с формулой, которая выводится в сопротивлении материалов.

Задача 14.3. Напряжения во вращающемся диске

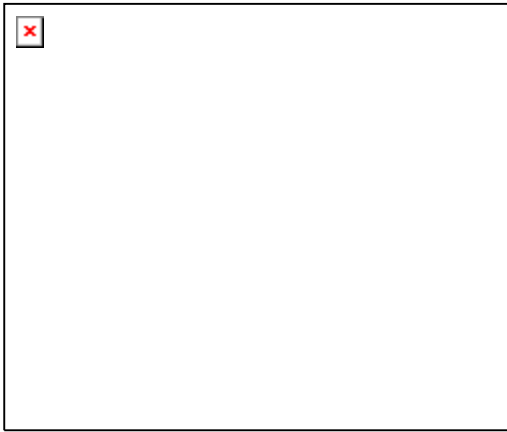


Рис.14.3

Рассмотрим напряжённое состояние круглого диска радиуса a толщиной $2c$, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси (рис.14.3). Будем пользоваться постановкой осесимметричной задачи теории упругости в цилиндрических координатах, приведенной в п.14.6. Дифференциальные уравнения равновесия получаются в этом случае с помощью введения в уравнения (14.17) центробежных сил

$$F_x = \rho \omega^2 x, \quad F_y = \rho \omega^2 y, \quad F_z = 0, \quad (14.71)$$

в результате чего получаем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} = 0, \quad (14.72)$$

где ρ – масса единицы объёма тела.

Уравнения совместности (14.20) также следует изменить с учётом наличия объемных сил (14.71):

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \sigma_r + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu}; \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \sigma_\theta + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = -\frac{2\rho\omega^2}{1-\nu}; \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -\frac{2\nu\rho\omega^2}{1-\nu}; \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 s}{\partial r \partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.73)$$

Сначала найдём частное решение уравнений (14.72) и (14.73). Затем на это частное решение наложим решение в форме полиномов и подберём постоянные в этих полиномах таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям задачи. Примем частные решения в следующем виде:

$$\sigma'_r = Br^2 - Dz^2, \quad \sigma'_z = Ar^2, \quad \sigma'_\theta = Cr^2 - Dz^2, \quad \tau'_{rz} = 0. \quad (14.74)$$

Нетрудно убедиться, что эти выражения удовлетворяют второму из уравнений (14.72) и четвёртому из уравнений (14.73). Остаётся определить постоянные A, B, C, D таким образом, чтобы удовлетворить четырём оставшимся уравнениям, а именно, первому из уравнений (14.72) и первым трём из уравнений (14.34). Подставляя в эти уравнения выражения (14.74), находим

$$A = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu}, \quad B = -\frac{\rho\omega^2}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)}.$$

Частные решения при этом принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 - \frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2, \quad \sigma'_z = \frac{\rho\omega^2(1+3\nu)}{6\nu} r^2; \\ \sigma'_\theta &= -\frac{\rho\omega^2(1+2\nu)(1+\nu)}{6\nu(1-\nu)} z^2, \quad \tau'_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.75)$$

На решение (14.75) налагаем распределение напряжений, получаемое с помощью функции Лява, удовлетворяющей уравнениям (14.72) при отсутствии объемных сил. Напряжения через функцию Лява определяются с помощью следующих формул

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right); \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.76)$$

Функция Лява φ является бигармонической функцией.

В нашем случае в качестве бигармонической функции можно взять полином пятой степени

$$\varphi = a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b^5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z). \quad (14.77)$$

С помощью равенств (14.76) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r'' &= -a_5(180r^2 - 240z^2) + b_5[(36 - 54\nu)r^2 + (1 + 18\nu)6z^2]; \\ \sigma_z'' &= -a_5(-240r^2 + 480z^2) + b_5[(-102 + 54\nu)r^2 + (96 - 108\nu)z^2]; \\ \sigma_\theta'' &= a_5(-60r^2 - 240z^2) + b_5[(12 - 54\nu)r^2 + (6 + 108\nu)z^2]; \\ \tau_{rz}'' &= 480a_5rz - b_5(96 - 108\nu)rz. \end{aligned} \right\} \quad (14.78)$$

Суммируя эти напряжения с напряжениями, определяемыми по формулам (14.75), и определяя постоянные a_5 и b_5 таким образом, чтобы обратились в нуль результирующие напряжений τ_{rz} и σ_z , получаем

$$\sigma_r = -\rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right], \quad \sigma_\theta = -\rho\omega^2 \left[\frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} z^2 \right]. \quad (14.79)$$

Чтобы снять результирующее радиальное сжатие вдоль границы, т.е. добиться выполнения условия

$$\left(\int_{-c}^c \sigma_r dz \right)_{r=a} = 0,$$

наложим на напряжения (14.79) однородное радиальное растяжение равное

$$\frac{\rho\omega^2}{8} (3+\nu)a^2 + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \frac{c^2}{3}.$$

Тогда окончательные формулы для напряжений примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right]; \\ \sigma_\theta &= \rho\omega^2 \left[\frac{3+\nu}{8} a^2 - \frac{(1+3\nu)}{8} r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{6(1-\nu)} (c^2 - 3z^2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.80)$$

В случае тонкого диска соответствующие напряжения малы, а их результирующая по толщине диска равна нулю. Если контур диска свободен от внешних сил, решение (14.80) представляет напряжённое состояние в частях диска на некотором расстоянии от края.

Задача 14.4. Изгиб консольной балки при одновременном действии равномерно распределённой нагрузки q по всей длине, сосредоточенной силы P и изгибающего момента M в торцевом сечении.

Рассмотрим консольную балку с сечением в виде узкого прямоугольника, к концу которой приложена сила P и момент M , а к верхней грани – равномерно

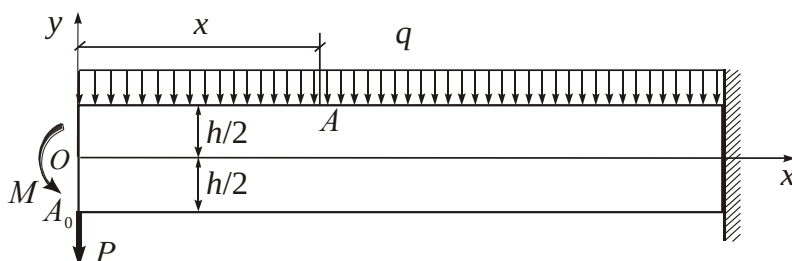


Рис.14.4

распределённая нагрузка q (рис.14.4). Все указанные нагрузки будем считать отнесёнными к единице ширины балки.

При строгой постановке задачи следовало бы задать распределение нормальных и

касательных внешних сил на левом торце, а на правом заделанном торце потребовать равенство перемещений нулю.

Решение такой задачи весьма сложно. Поэтому потребуем строгого выполнения граничных условий только на верхней и нижней гранях балки, а на торцах зададим лишь главные векторы и главные моменты приложенных внешних сил. При такой постановке задачи она имеет не единственное решение, однако, по принципу Сен-Венана в точках балки, достаточно удалённых от её торцов, все эти решения будут давать практически одинаковые напряжения. Поэтому из возможных решений целесообразно найти наиболее простое.

Задачу будем решать в напряжениях с помощью функции напряжений Эри. В этом случае плоская задача теории упругости сводится к решению бигармонического уравнения (14.27) с граничными условиями (14.28), при этом напряжения через функцию Эри определяются с помощью формул (14.26).

Составим граничные условия для функции напряжений φ на верхней и нижней гранях балки.

Пусть в точке $A_0(0, -h/2)$ функция φ и её производные по x и по y равны нулю. В точке A верхней грани значение φ равно взятому с обратным знаком моменту относительно точки A всех внешних сил, приложенных к участку A_0A контура, а производная $\partial\varphi/\partial y$ равна взятой с обратным знаком проекции главного вектора тех же внешних сил на ось Ox .

$$\left. \begin{aligned} \text{Следовательно, при } y = \frac{h}{2} \quad \varphi = -\left(M + Px + \frac{1}{2}qx^2\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \text{при } y = -\frac{h}{2} \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.81)$$

Естественно попытаться искать функцию φ в следующем виде:

$$\varphi = f_0(y) + f_1(y)x + \frac{1}{2}f_2(y)x^2. \quad (14.82)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Тогда при } y = \frac{h}{2} \quad f_0 = -M, \quad f_1 = -P, \quad f_2 = -q, \\ \frac{df_0}{dy} = \frac{df_1}{dy} = \frac{df_2}{dy} = 0, \\ \text{при } y = -\frac{h}{2} \quad f_0 = f_1 = f_2 = 0, \\ \frac{df_0}{dy} = \frac{df_1}{dy} = \frac{df_2}{dy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.83)$$

Функция φ должна удовлетворять бигармоническому уравнению (14.27):

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 2 \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{d^4 f_0}{dy^4} + \frac{d^4 f_1}{dy^4} x + \frac{1}{2} \frac{d^4 f_2}{dy^4} x^2 = 0.$$

Это равенство должно удовлетворяться при всех значениях x , поэтому

$$2 \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{d^4 f_0}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_1}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2}{dy^4} = 0. \quad (14.84)$$

Интегрируя эти выражения с учётом граничных условий (14.83), находим сначала f_1 и f_2 , а затем f_0 :

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\frac{1}{2} M \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right) - \frac{1}{80} q h y \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)^2; \\ f_1 &= -\frac{1}{2} P \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right); \quad f_2 = -\frac{1}{2} q \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (14.85)$$

и, следовательно,

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left(M + Px + \frac{1}{2} qx^2 \right) \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right) - \frac{1}{80} q h y \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)^2. \quad (14.86)$$

Напряжения в балке определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{12y}{h^3} \left(M + Px + \frac{1}{2} qx^2 \right) - q \left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right); \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} q \left(1 + 3 \frac{y}{h} - 4 \frac{y^3}{h^3} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{3}{2h} (P + qx) \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.87)$$

Напряжение σ_x состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое не отличается от выражения для σ_x , которое получается по формулам сопротивления материалов. Второе слагаемое невелико и составляет по абсолютной величине при $y = \pm h/2$ всего $q/5$, тогда как при $x \gg h$ первый член, как правило, значительно больше q .

Напряжение σ_y вообще не рассматривается в элементарной теории. Его наибольшее значение равно q при $y = h/2$.

Наконец, формула для τ_{xy} совпадает с выводимой в курсе сопротивления материалов формулой Д.И. Журавского.

Таким образом, в рассмотренном случае подтверждается достаточная для практики точность обычно применяемых элементарных формул расчёта балок на изгиб.

Задача 14.5. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенным моментом.

Рассмотрим плоский клин толщиной $b = 1$ с углом раствора 2α , нагруженный в вершине сосредоточенным моментом M (рис.14.5). Чтобы не рассматривать напряжённо-деформированное состояние клина в области закрепления нижней кромки, будем считать, что клин неограниченно простирается в направлении оси Ox .

Задачу удобно рассматривать в полярной системе координат.

Так как боковые грани клина не нагружены, то граничные условия на этих гранях записываются в следующем виде:

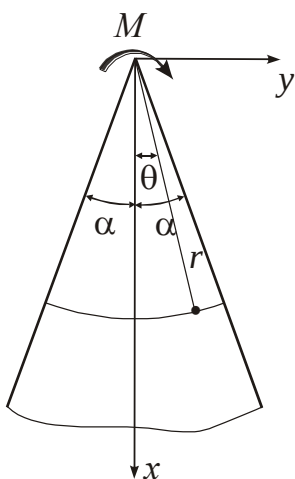


Рис.14.5

$$\text{при } \theta = \pm\alpha \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (14.88)$$

Решение задачи будем искать с помощью функции напряжений Эри, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (14.31). Для отыскания функции φ воспользуемся методом анализа размерностей. Любое уравнение, описывающее некоторый физический процесс, должно быть размерно-однородным, т.е. все слагаемые, входящие в это уравнение, должны иметь одинаковую размерность.

Очевидно, что функция напряжений φ в произвольной точке клина должна зависеть от величины момента M , от координат этой точки r, θ и от угла α :

$$\varphi = \varphi(M, r, \theta, \alpha). \quad (14.89)$$

Установим размерности величин, входящих в (14.89). Для обозначения размерностей (единиц измерения) величин будем ставить их в квадратные скобки. Единицу измерения для длин обозначим через $L = [r] = [b]$. Величины θ и α – безразмерные, т.е. $[\theta] = [\alpha] = 1$.

Обозначим размерность сосредоточенного момента через $m = [M]$. Тогда учитывая, что $M = pd = Pd/b$, где p – распределённая по толщине клина сила, получим $[P] = [M][b]/[d] = m$. Следовательно, в плоской задаче размерность сосредоточенной силы совпадает с размерностью сосредоточенного момента.

Так как напряжения имеют размерность силы, делённой на площадь: $[\sigma] = [P]/[F] = mL^{-2}$, то из формул (14.32) следует, что функция φ имеет размерность

$$[\varphi] = [\sigma][r]^2 = mL^{-2}L^2 = m. \quad (14.90)$$

Чтобы выражение (14.89) удовлетворяло условию размерной однородности, приведём его к безразмерному виду. Из трёх размерных величин φ, M и r , входящих в (14.89), можно составить единственно возможную безразмерную комбинацию

$$\frac{\varphi}{M} = \Phi(\theta, \alpha).$$

Отсюда получим выражение для φ

$$\varphi = M\Phi(\theta, \alpha), \quad (14.91)$$

откуда видно, что φ пропорциональна M и не зависит от r .

Найдём производные функции φ , входящие в бигармоническое уравнение (14.31).

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{M}{r^2} \Phi'', \\ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \varphi &= -\frac{2M}{r^3} \Phi'', \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} \nabla^2 \varphi = \frac{6M}{r^4} \Phi'', \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \nabla^2 \varphi = \frac{M}{r^2} \Phi^{IV} \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (14.31), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции Φ

$$\Phi^{IV} + 4\Phi'' = 0. \quad (14.92)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = C_1 + C_2\theta + C_3\cos 2\theta + C_4\sin 2\theta. \quad (14.93)$$

При этом функция напряжений φ определяется выражением

$$\varphi = M(C_1 + C_2\theta + C_3\cos 2\theta + C_4\sin 2\theta). \quad (14.94)$$

С помощью формул (14.32) для напряжений получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{r^2}(C_3\cos 2\theta + C_4\sin 2\theta), \quad \sigma_\theta = 0, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M}{r^2}(C_2 - 2C_3\sin 2\theta + 2C_4\cos 2\theta). \end{aligned} \right\} \quad (14.95)$$

Очевидно, что напряжения σ_r для рассматриваемой задачи должны удовлетворять условию $\sigma_r(-\theta) = -\sigma_r(\theta)$. Чтобы удовлетворить этому условию в выражениях (14.95) необходимо принять $C_3 = 0$. Кроме этого, напряжения $\tau_{r\theta}$ должны удовлетворять граничным условиям (14.88), что приводит к равенству $C_2 = -2C_4\cos 2\alpha$. С учётом этих равенств выражения (14.95) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4MC_4}{r^2}\sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2MC_4}{r^2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (14.96)$$

Оставшаяся постоянная C_4 определяется из условия равновесия части клина, ограниченной круговым сечением радиуса r .

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} r\tau_{r\theta} r d\theta = 2MC_4 \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) d\theta = 2MC_4(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha) = M.$$

Отсюда определяем постоянную C_4

$$C_4 = \frac{1}{2(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}. \quad (14.97)$$

Подставляя (14.97) в (14.96), получаем окончательные выражения для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2M\sin 2\theta}{r^2(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}, \quad \sigma_\theta = 0, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{r^2(\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (14.98)$$

Это решение можно считать точным решением поставленной задачи, если в вершине клина полученные напряжения приводятся к сосредоточенному моменту M . Однако в вершине клина $r \rightarrow 0$, и напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ стремятся к бесконечности. На самом деле возле вершины напряжения распределены так, что их главный вектор равен нулю, а главный момент равен M . Таким образом согласно принципу Сен-Венана полученное решение можно применять лишь к частям клина, достаточно удалённым от его вершины.

Обратим внимание ещё на одну особенность полученного решения. При приближении угла α к значению, при котором обращается в нуль знаменатель выражений (14.98), $\alpha = \alpha^* \approx 0,715\pi$, напряжения во всех точках клина равно-

мерно стремятся к бесконечности. Это обстоятельство связано с условностью понятия сосредоточенной нагрузки.

Задача 14.6. Температурные напряжения в тонком круглом диске при распределении температуры симметрично относительно центра.

Задачу будем рассматривать в полярной системе координат. Если температура $T = T(r)$ не изменяется по толщине диска, то можем предположить, что напряжения и перемещения, вызванные нагревом, также не изменяются по толщине. В диске возникает плоское напряжённое состояние. Напряжения σ_r и σ_θ удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (14.99)$$

Касательные напряжения $\tau_{r\theta}$ равны нулю в силу симметрии задачи.

Напряжения σ_r и σ_θ выражаются через деформации с помощью формул

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T], \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T]. \quad (14.100)$$

Если через u обозначить радиальное перемещение, то согласно (14.18) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (14.101)$$

С учётом этих соотношений равенства (14.100) примут вид:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T \right], \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} - (1+\nu)\alpha T \right]. \quad (14.102)$$

Подставляя эти выражения в (14.99), получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr}, \quad (14.103)$$

которое можно представить также в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] = (1+\nu)\alpha \frac{dT}{dr}. \quad (14.104)$$

Интегрируя это уравнение два раза, получим

$$u = (1+\nu)\alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (14.105)$$

где нижний предел a интегрирования может быть выбран произвольно. Для диска с отверстием величину a можно положить равной радиусу отверстия.

Напряжения находятся теперь путём подстановки равенства (14.105) в соотношения (14.102). В результате находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \alpha E \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \alpha E T + \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) + C_2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.106)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий.

Например, для кольца с радиусом a внутренней границы и b – внешней границы имеем

при $r = a$ и $r = b$ $\sigma_r = 0$.

Эти условия дают

$$C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{a^2} = 0;$$

$$-\alpha \frac{1}{b^2} \int_a^b T r dr + \frac{1}{1-\nu^2} \left[C_1(1+\nu) - C_2(1-\nu)\frac{1}{b^2} \right] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \alpha(1-\nu) \frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr, \\ C_2 &= \alpha(1+\nu) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr. \end{aligned} \right\} \quad (14.107)$$

Подставляя эти значения в (14.106), получим следующие окончательные формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{r^2} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - \int_a^r T r dr \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{r^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.108)$$

Для сплошного диска полагаем $a = 0$ и, учитывая, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r T r dr \right) = 0,$$

из соотношений (14.105) заключаем, что член с C_2 должен быть отброшен в силу условия $r \rightarrow 0$, $u = 0$. На краю $r = b$ должно выполняться условие $\sigma_r = 0$, откуда, в соответствии с первым выражением (14.106), имеем

$$C_1 = (1-\nu) \frac{\alpha}{b^2} \int_0^b T r dr.$$

Окончательные выражения для напряжений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{r^2} \left(\frac{r^2}{b^2} \int_0^b T r dr - \int_0^r T r dr \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{r^2} \left(\frac{r^2}{b^2} \int_0^b T r dr + \int_0^r T r dr - T r^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.109)$$

В центре диска напряжения, определяемые по этим формулам, конечны, поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right) = \frac{1}{2} T_0,$$

где T_0 – температура в центре диска.

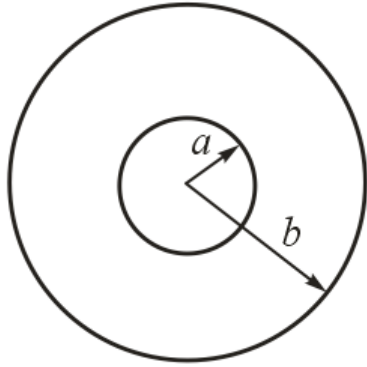


Рис.14.6

Задача 14.7. Изгиб круглой жёстко защемлённой по контуру пластины под действием сосредоточенной силы в центре.

Рассмотрим задачу о расчёте круглой пластины, жёстко защемлённой по контуру и нагруженной в центре сосредоточенной силой P (рис.14.7).

Для получения решения этой задачи воспользуемся основными зависимостями в полярных координатах, приведенными в главе 13 в случае изгиба круглых пластин.

Так как в пластине, кроме одной точки $r = 0$, нагрузка $q = 0$, а прогиб во всех точках имеет конечное значение, то решение рассматриваемой задачи примем в виде, получаемом из (13.12) при $C_2 = 0$ и $w^*(r) = 0$, т.е. в виде

$$w(r) = C_1 + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (14.110)$$

Для определения трёх постоянных C_1 , C_3 и C_4 используем граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} r = R \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \\ Q_r = -\frac{P}{2\pi r} = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.111)$$

При подстановке выражения (14.110) в граничные условия (14.111), первые два условия дают

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 R^2 + C_4 R^2 \ln R &= 0; \\ 2C_3 + C_4 + 2C_4 \ln R &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14.112)$$

а из третьего условия получаем $C_4 = \frac{P}{8\pi D}. \quad (14.113)$

Решая систему (14.112), получаем

$$C_1 = \frac{PR^2}{16\pi D}, \quad C_3 = -\frac{P}{16\pi D} - \frac{P}{8\pi D} \ln R. \quad (14.114)$$

Подставляя выражения (14.113) и (14.114) в (14.110), получим окончательное выражение для прогиба пластины

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(2r^2 \ln \frac{r}{R} + R^2 - r^2 \right). \quad (14.115)$$

Для внутренних усилий имеем

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} + 1 \right]; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = -\frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{r}{R} + \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.116)$$

Эпюра изгибающего момента M_r приведена на рис.14.7. В точке приложения сосредоточенной силы прогиб имеет конечное значение, а внутренние усилия стремятся к бесконечности.

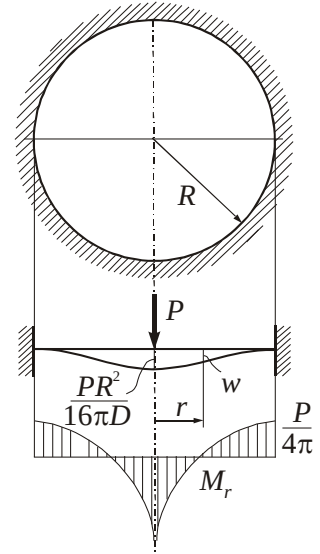


Рис.14.7