



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра сопротивления материалов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

(сложное сопротивление, перемещения,
устойчивость стержней)

Методические указания
к практическим занятиям и самостоятельной работе
для обучающихся по направлению подготовки
08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений

Составители:
А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова, А.Н. Леонтьев

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2024

УДК 624.04
ББК 30.121
С64

Рецензент — доктор технических наук, профессор *О.В. Мкртычев*,
заведующий кафедрой сопротивления материалов НИУ МГСУ

С64 **Сопротивление материалов (сложное сопротивление, перемещения, устойчивость стержней)** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся по направлению подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений / сост.: А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова, А.Н. Леонтьев ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра сопротивления материалов. — Электрон. дан. и прогр. (3,0 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2024. — URL: <http://lib.mgsu.ru>. — Загл. с титул. экрана.

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Сопротивление материалов» включают разделы: «Перемещения в балках и рамах при изгибе», «Сложное сопротивление», «Устойчивость и продольно-поперечный изгиб стержней». Каждый раздел содержит ключевые правила и формулы. Приведены тесты и даны их решения. Все задания сформулированы в соответствии с общими требованиями для тестовых заданий базового уровня. Рассмотрены разнообразные типы задач, даны подробные комментарии к решениям.

Для обучающихся по направлению подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений.

Учебное электронное издание

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Учебное электронное издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
(сложное сопротивление, перемещения,
устойчивость стержней)

Составители: **Ильяшенко** Алла Викторовна, **Астахова** Августина Яковлевна,
Леонтьев Андрей Николаевич

Редактор *Т.Н. Донина*
Корректор *В.К. Чупрова*
Верстка и дизайн титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2010, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 00.00.2024. Объем данных 3,0 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 14-23, (499) 183-91-90, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
Раздел 1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ИЗГИБЕ	6
Ключевые правила и формулы	6
1.1. ПРОГИБЫ И УГЛЫ ПОВОРОТА ПРИ ИЗГИБЕ	11
1.2. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ	13
1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ МЕТОДОМ МОРА	15
1.4. РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ	24
Раздел 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	27
Ключевые правила и формулы	27
2.1. ПЛОСКИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КОСОЙ ИЗГИБ	38
2.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	45
Раздел 3. УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ	50
Ключевые правила и формулы	50
3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ	52
3.2. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ	60
Библиографический список	61

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания позволят обучающимся проверить и расширить свои знания и навыки в освоении теоретического и практического материала по темам «Перемещения в балках и рамах при изгибе», «Сложное сопротивление», «Устойчивость стержней».

С помощью представленных тестов можно подготовиться к прохождению тестирования по соответствующим расчетно-графическим работам. Каждый тест снабжен комментируемым ответом, что позволит учащемуся контролировать уровень своей самоподготовки. К каждому тесту (заданию) предлагаются 5 вариантов ответа. Все ответы помечены символами $\circ$ (кружок) или $\square$ (квадрат). Символом $\circ$ обозначены ответы, из которых только *один* является правильным, а символом $\square$ — ответы, из которых правильными являются *несколько* из пяти предложенных (но не более четырех). Таким образом, тестируемому дается некоторая подсказка, в целом упрощающая задание. В следующих за ответами комментариях дано решение поставленной в тесте задачи и краткие сведения по соответствующему теоретическому материалу. В конце каждого теста указан *правильный ответ*.

При прохождении аудиторного тестирования на кафедре сопротивления материалов действуют такие же принципы. Студенту необходимо ответить на 5 вопросов, включающих 3 задачи и 2 теоретических задания. Время тестирования 15 мин. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно ответить на 3 вопроса из пяти предложенных.

В методических указаниях использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: P (сила), A (площадь поперечного сечения стержня).

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

Раздел 1

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ИЗГИБЕ

КЛЮЧЕВЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

Рассмотрим расчет жестких балок (рис. 1.1), для которых по нормам проектирования отношение наибольшего прогиба к пролету балки изменяется в пределах

$$\frac{v_{\max}}{l} = \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{200} \right).$$

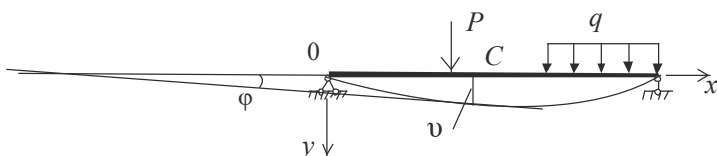


Рис. 1.1. Прогибы и углы поворота балки при изгибе

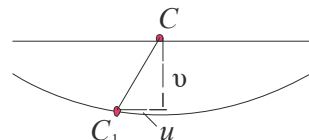


Рис. 1.2. Вертикальное и горизонтальное перемещения точки балки

Вследствие установленных столь малых прогибов жестких балок пренебрегают горизонтальной составляющей u полного перемещения точки оси балки CC_1 (рис. 1.2). Гипотеза плоских сечений гласит: сечение, плоское до деформации, остается плоским после деформации. Поперечное сечение балки при изгибе поворачивается на угол φ (рис. 1.3), равный углу между горизонталью и касательной, проведенной к изогнутой оси балки в рассматриваемой точке.

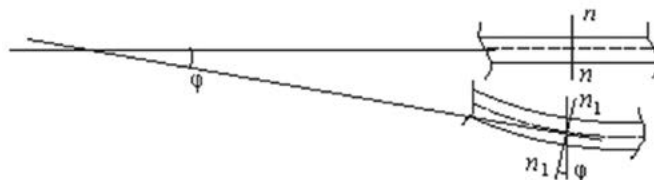


Рис. 1.3. Поворот поперечного сечения балки

Положение любой точки изогнутой оси балки принято характеризовать вертикальной составляющей полного перемещения v и углом поворота сечения φ (см. рис. 1.1).

Правила знаков для прогиба v (рис. 1.4) и **угла поворота сечения φ** (рис. 1.5) установлены в соответствии с выбранным направлением осей координат $0x$, $0y$.

Координаты x любой точки балки имеют положительное значение при расположении начала координат в крайней точке оси.

Если начало координат расположено в крайней левой точке оси, то правила знаков для v и φ соответствуют направлениям, обозначенным на рис. 1.4 и рис. 1.5, а.

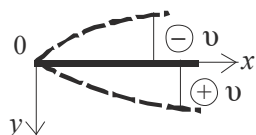


Рис. 1.4. Правило знаков для прогиба балки (для v)

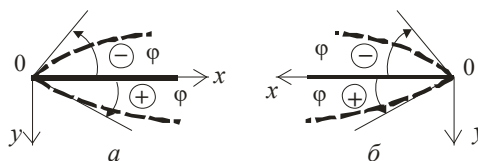


Рис. 1.5. Правило знаков для углов поворота балки (для φ)

При расположении начала координат в крайней правой точке оси балки ось x направляется влево. Тогда правило знаков для v остается прежним (см. рис. 1.4). В результате решения по-

ложительный угол поворота сечения будет соответствовать отклонению касательной от горизонтальной оси против хода часовой стрелки (см. рис. 1.5, б).

При изгибе балки значение прогиба v и угла поворота поперечного сечения φ можно определить из решений дифференциального уравнения:

– второго порядка

$$EJ_z v''(x) = -M(x); \quad (1.1)$$

или из решения дифференциального уравнения

– четвертого порядка:

$$EJ_z v^{IV}(x) = q(x). \quad (1.2)$$

Граничные условия

В заданной для расчета конструкции отмечают точки, в которых известны значения искомых функций. К таким точкам относятся места опирания конструкции, свободный край. Известные значения искомых функций в определенных точках конструкции принимают в качестве граничных условий.

Граничные условия разделяются на три типа:

- 1) статические (известны внутренние усилия M, Q);
- 2) кинематические (известны перемещения v, φ);
- 3) смешанного типа (могут быть известны M, Q, v или φ).

Жесткое защемление характеризуется тем, что точка закреплена от перемещения как в вертикальном направлении $v = 0$, так и в горизонтальном $u = 0$. При этом невозможен угол поворота сечения $\varphi = 0$ (рис. 1.6).

На свободном краю, если он не нагружен, изгибающий момент и поперечная сила равны нулю (см. рис. 1.6).

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.7) препятствует перемещению точки в вертикальном $v = 0$ и в горизонтальном $u = 0$ направлениях. Изгибающий момент в шарнире равен нулю.

Шарнирно-подвижная опора препятствует перемещению точки только в одном направлении, в данном случае — только в вертикальном $v = 0$, изгибающий момент в шарнире также равен нулю (см. рис. 1.7).

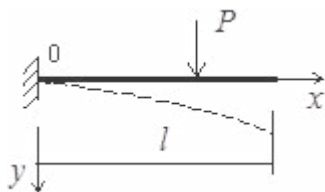


Рис. 1.6. Консольная балка

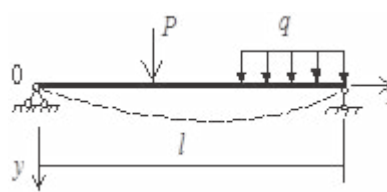


Рис. 1.7. Шарнирно-опертая балка

Запишем граничные условия для следующих балок (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Граничные условия для консольной и шарнирно опертой балки

Консольная балка		Шарнирно-опертая балка	
Жесткое защемление	Свободный край	Шарнирно-неподвижная опора	Шарнирно-подвижная опора
При $x = 0$	При $x = l$	При $x = 0$	При $x = l$
1) $\varphi = 0$	1) $M = 0$	1) $M = 0$	1) $M = 0$
2) $v = 0$	2) $Q = 0$	2) $v = 0$	2) $v = 0$
3) $u = 0$	–	3) $u = 0$	–

Особенностью изгиба балки с промежуточным шарниром (рис. 1.8) является следующее: угол поворота балки слева от шарнира не равен углу поворота балки справа от шарнира, т.е. $\varphi_{\text{лев}} \neq \varphi_{\text{прав}}$. В расчетах промежуточный шарнир характеризуется величиной $\Delta\varphi$, равной разности углов поворота справа и слева: $\Delta\varphi = \varphi_{\text{прав}} - \varphi_{\text{лев}}$.

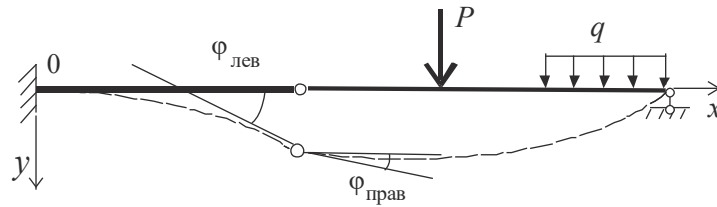


Рис. 1.8. Балка с промежуточным шарниром

Метод начальных параметров

Переход от уравнения (1.1) к уравнению (1.2) осуществляется при последовательном дифференцировании следующих выражений:

$$\text{так как } dM/dx = Q; EJ_z v'''(x) = M'(x) = -Q(x); \quad (1.3)$$

$$\text{так как } dQ/dx = -q(x); EJ_z v^{IV}(x) = -Q'(x) = q(x). \quad (1.4)$$

Имеем дифференциальное соотношение между функцией прогиба и нагрузкой. Решение дифференциального уравнения четвертого порядка (1.2) можно получить, проинтегрировав последовательно однородное уравнение четвертого порядка (1.5), и затем добавить к полученному выражению $v(x)$ частное решение неоднородного уравнения (1.2):

$$EJ_z v^{IV}(x) = 0. \quad (1.5)$$

При последовательном интегрировании запишем следующие соотношения:

$$EJ_z v'''(x) = -Q(x) = C_1; \quad (1.6)$$

$$EJ_z v''(x) = -M_z(x) = C_1 x + C_2; \quad (1.7)$$

$$EJ_z v'(x) = EJ_z \varphi(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \quad (1.8)$$

$$EJ_z v(x) = C_1 \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \quad (1.9)$$

В соотношениях (1.6–1.9) при $x = 0$ константы интегрирования дифференциального уравнения четвертого порядка равны:

$$C_1 = -Q(0); C_2 = -M(0); C_3 = EJ_z \varphi(0); C_4 = EJ_z v(0). \quad (1.10)$$

Величины $Q(0) = Q_0$; $M(0) = M_0$; $\varphi(0) = \varphi_0$; $v(0) = v_0$ называют **начальными параметрами**. Они представлены поперечной силой, изгибающим моментом, углом поворота сечения и прогибом в начале координат (рис. 1.9).

Данный способ интегрирования дифференциального уравнения получил название **метода начальных параметров**.

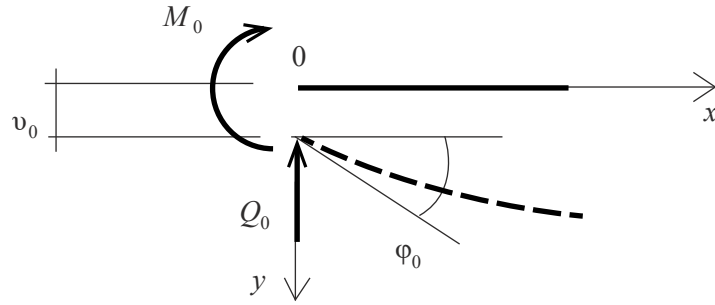


Рис. 1.9. Начальные параметры

В результате полное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (1.2) при использовании обозначения констант интегрирования однородного уравнения через начальные параметры представляют в следующем виде:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ_z} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ_z} + Y_q(x), \quad (1.11)$$

где $Y_q(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (1.2), зависящее от вида нагрузки. Таким образом, решение (1.11) содержит четыре начальных параметра для определения прогиба в любой точке балки. При этом в статически определимых балках некоторые из них известны в начале расчета.

Неизвестные начальные параметры определяют из граничных условий.

Универсальное уравнение для определения прогибов и углов поворота сечений балки

От начала координат балка последовательно разделяется на участки, границей между которыми являются точки приложения нагрузок.

Запишем выражения функций прогибов и углов поворота сечений для балки, находящейся под действием различного вида нагрузок:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ_z} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ_z} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^4}{4! EJ_z} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^4}{4! EJ_z} \Big|_3 - \frac{M(x-c)^2}{2! EJ_z} \Big|_4 + \frac{P(x-d)^3}{3! EJ_z} \Big|_5 + \Delta\varphi(x-k) \Big|_6; \quad (1.12)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{M_0 x}{EJ_z} - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ_z} \Big|_1 + \frac{q(x-a)^3}{3! EJ_z} \Big|_2 - \frac{q(x-b)^3}{3! EJ_z} \Big|_3 - \frac{M(x-c)}{EJ_z} \Big|_4 + \frac{P(x-d)^2}{2! EJ_z} \Big|_5 + \Delta\varphi \Big|_6. \quad (1.13)$$

Промежуточные шарниры, реакции, действующие в опорах, учитываются наравне с внешней нагрузкой (рис. 1.10).

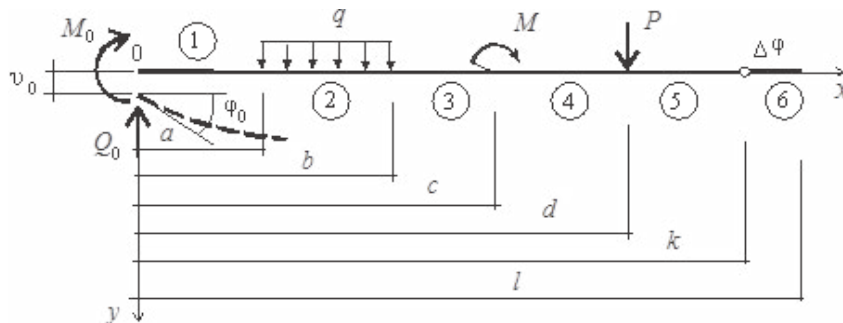


Рис. 1.10. К записи универсального уравнения метода начальных параметров

Выражение прогиба (1.12) или угла поворота сечения (1.13) на участке балки определяется формулами, расположенными слева от вертикальной черты с номером участка.

В выражении прогибов (1.12) каждое слагаемое имеет размерность длины (например сантиметр) и определяет значение прогиба от данного вида нагрузки. Знак перед каждым слагаемым обозначает направление перемещения от этой нагрузки. В соответствии с принятым правилом знаков для $v(x)$ (см. рис. 1.4), если усилие перемещает балку вниз, то перед таким слагаемым в функции прогибов ставят знак «плюс», а если усилие перемещает балку вверх, то перед формулой ставят знак «минус». Положительная поперечная сила Q_0 направлена вверх, стремится переместить точку $x = 0$ вверх, поэтому перед слагаемым $\frac{Q_0 x^3}{3!EJ_z}$ ставим знак «минус».

Направление действия изгибающего момента M определяют, учитывая, что начало координат расположено в крайней левой точке балки, от которой отсчитывается расстояние x . Поэтому в выражении функции прогибов $v(x)$ действие изгибающего момента M рассматривают относительно сечения x , расположенного справа от точки приложения. Тогда получаем, что M_0 стремится переместить балку вверх относительно сечения, расположенного справа от точки приложения M_0 , и перед формулой $\frac{M_0 x^2}{2!EJ_z}$ ставим знак «минус». Изгибающий момент $M(x)$, приложенный в точке $x = c$, также стремится переместить балку вверх относительно точки, расположенной справа от точки $x = c$.

Действие равномерно распределенной нагрузки q на участке от a до b характеризуется двумя слагаемыми. Первое из них выражает прогиб от нагрузки q , действующей на участке длиной $(l - a)$ и направленной вниз. Соответственно, перед первым слагаемым $\frac{q(x - a)^4}{4!EJ_z}$ ставится знак «плюс», при этом x может принимать значение в пределах $a < x \leq l$. Второе слагаемое представляет собой действие компенсирующей нагрузки, равной по величине q , приложенной в точке с координатой $x = b$ и направленной вверх. Поэтому перед вторым слагаемым ставится знак «минус». Значение x в формуле может изменяться в пределах $b < x \leq l$. Начало действия компенсирующей нагрузки соответствует координате конца действия приложенной равномерно распределенной нагрузки q .

Дифференциальное соотношение (1.1) позволяет определить по функции прогибов значения изгибающих моментов и поперечных сил:

$$M(x) = -EJ_z v''(x); Q(x) = M'(x). \quad (1.14)$$

Интегральная формула для определения прогибов и углов поворота сечений балки (метод Мора)

Рассмотрим другой способ определения прогибов и углов поворота сечений при изгибе балки от действия внешней нагрузки. Физический смысл формулы Мора состоит в том, что интеграл выражает работу единичной силы в направлении ее действия:

$$\Delta = \sum_i^n \int \frac{M_P \bar{M}}{EJ_z} dx = \sum_i^n \frac{\omega y_C}{EJ_z}, \quad (1.15)$$

где Δ — обобщенное перемещение в направлении действия единичного усилия (вертикальное v или угол поворота сечения φ); M_P , $\bar{M}$ — эпюры изгибающих моментов в балке соответственно от внешней нагрузки или единичного усилия.

Для определения вертикального v перемещения в рассматриваемой точке прикладывается сосредоточенная единичная сила (рис. 1.11, а). Для определения угла поворота сечения φ в рассматриваемой точке прикладывается сосредоточенный единичный момент (рис. 1.11, б).

Знак «плюс» в результате расчета означает, что перемещение направлено в сторону действия приложенного единичного усилия; знак «минус» — что перемещение направлено в сторону, противоположную действию приложенного усилия.

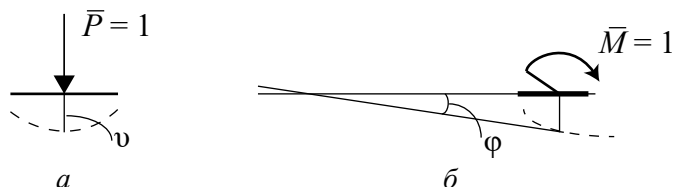


Рис. 1.11. Единичные усилия для определения прогиба (а) и угла поворота (б)

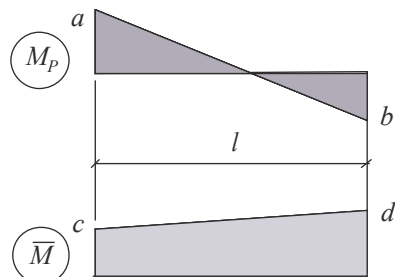


Рис. 1.12. Формула трапеций перемножения двух линейных функций

Вычисление интеграла от произведения двух функций, одна из которых имеет произвольное изменение по длине, предлагается выполнять **по правилу А.К. Верещагина** (1.15). По формуле (1.15) интеграл от произведения криволинейной функции M_P на линейную $\bar{M}$ равен произведению площади ω эпюры $M_P(\omega)$ на ординату y из эпюры $\bar{M}$, расположенную под центром тяжести площади ω .

Правило Верещагина применяют для участка, на котором обе функции (M_P , $\bar{M}$) гладкие и непрерывные. Эпюру M_P , на некотором участке изменяющуюся по параболе, принято разделять на простые элементы: при выделении чистой параболы образуется еще и линейная функция. Площадь чистой параболы равна: $\omega = (ql^3)/12$, ее центр тяжести расположен в середине пролета l .

Произведение двух линейных функций (рис. 1.12) вычисляют по формуле трапеций:

$$\int M_P \bar{M} dx = \frac{l}{6} (2ac - 2bd + ad - bc).$$

Произведение ($\omega \cdot y_C$) принимают со знаком «плюс», если обе эпюры, M_P и $\bar{M}$, расположены с одной стороны от горизонтальной оси, и со знаком «минус», если эпюры расположены по разные стороны от горизонтальной оси.

1.1. ПРОГИБЫ И УГЛЫ ПОВОРОТА ПРИ ИЗГИБЕ

Тест 1.1. Правильными утверждениями для прогибов и углов поворота консольной балки (рис. 1.13) являются:

- ☐ 1) $\varphi_C > 0$;
- ☐ 2) $\varphi_B < 0$;
- ☐ 3) $v_C > 0$;
- ☐ 4) $v_B = 0$;
- ☐ 5) $\varphi_A = 0$.

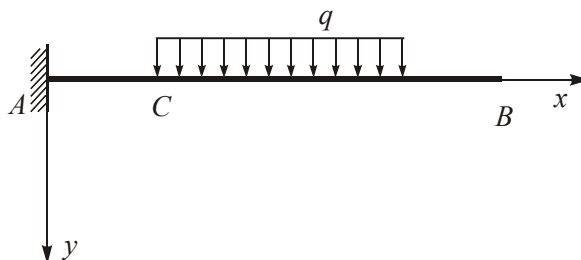


Рис. 1.13. Схема балки

Комментарий. Очевидно, что от заданной нагрузки q точки C и B перемещаются *вниз*. А значит, прогибы $v_C > 0$ и $v_B > 0$. Касательные к изогнутой оси поворачиваются по часовой стрелке, поэтому углы $\varphi_C > 0$ и $\varphi_B > 0$. Жесткая заделка не допускает никаких перемещений. Поэтому $\varphi_A = 0$.

Правильные ответы: 1; 3; 5.

Тест 1.2. Правильными утверждениями для прогибов и углов поворота шарнирно-опертой балки с консолью (рис. 1.14) являются:

- ☐ 1) $v_C < 0$;
- ☐ 2) $\varphi_B < 0$;
- ☐ 3) $v_C > 0$;
- ☐ 4) $\varphi_D = 0$;
- ☐ 5) $\varphi_A = 0$.

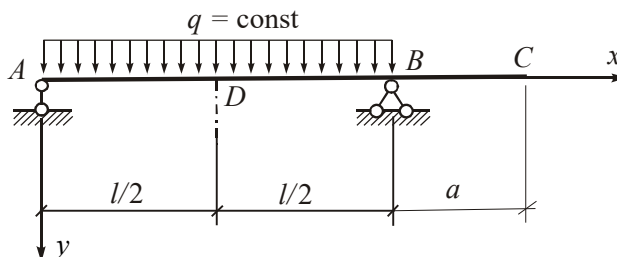


Рис. 1.14. Схема шарнирно-опертой балки с консолью

Комментарий. Шарнирно-подвижная опора A и шарнирно-неподвижная опора B допускают поворот балки относительно горизонтальной оси на некоторый угол. Поэтому $\varphi_A \neq 0$ и $\varphi_B \neq 0$. Так как нагрузка на участке AB симметрична, то изогнутая ось на этом участке симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку D , а значит, угол наклона касательной в точке D равен нулю: $\varphi_D = 0$, а в сечениях A и B соответственно $\varphi_A > 0$ и $\varphi_B < 0$. Так как точка C не закреплена и перемещается *вверх*, то прогиб $v_C < 0$.

Правильные ответы: 1; 2; 4.

Тест 1.3. Правильными утверждениями для прогибов и углов поворота шарнирно-опертой балки с консолью (рис. 1.15) являются:

- ☐ 1) $v_C < 0$;
- ☐ 2) $v_C = 0$;
- ☐ 3) $v_C > 0$;
- ☐ 4) $\varphi_D = 0$;
- ☐ 5) $v_D > 0$.

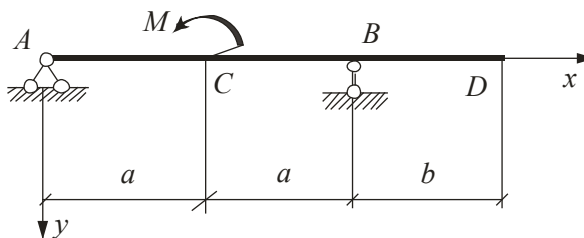


Рис. 1.15. Схема балки

Комментарий. Так как сосредоточенный момент растягивает нижнее волокно на участке AC и верхнее — на участке CB , то точка C является точкой перегиба изогнутой оси участка AB . Изогнутая ось на участке AB кососимметрична, и точка C не перемещается по вертикали. Значит, прогиб в точке C отсутствует: $v_C = 0$. Консоль BD наклоняется вниз, следовательно, точка D перемещается вниз: $v_D > 0$. Касательная к изогнутой оси консоли поворачивается по часовой стрелке, поэтому угол $\varphi_D > 0$.

Правильные ответы: 2; 5.

Тест 1.4. Прогиб балки при изгибе от действия сосредоточенного момента M прямо пропорционален:

- ☐ 1) площади поперечного сечения A ;
- ☐ 2) модулю упругости материала балки E ;
- ☐ 3) действующему моменту M ;
- ☐ 4) главному центральному моменту инерции поперечного сечения J ;
- ☐ 5) квадрату длины балки l^2 .

Комментарий. Определяя прогиб в любом сечении K балки с помощью интеграла Мора по правилу Верещагина, запишем

$$v_K = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \omega_P y_C,$$

где ω_P — площадь линейной фигуры, ограниченной графиком функции M_P , $\omega_P = f(M, l)$; y_C — ордината в единичной эпюре $\bar{M}_1$, расположенная под центром тяжести эпюры M_P , $y_C = f(l)$. Отсюда следует, что прогиб v_K пропорционален M , l^2 и обратно пропорционален жесткости EJ .

Правильные ответы: 3; 5.

1.2. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ

Тест 1.5. Вывод дифференциальной зависимости между функцией прогиба и нагрузкой основан на:

- ☐ 1) гипотезе плоских сечений;
- ☐ 2) утверждении, что материал балки следует закону Гука;
- ☐ 3) предположении, что материал балки работает за пределом упругости;
- ☐ 4) нелинейной зависимости между функцией перемещений и нагрузкой;
- ☐ 5) линейной зависимости между функцией перемещений и нагрузкой.

Комментарий. Деформация изгиба характеризуется поворотом поперечного сечения, вывод дифференциальной зависимости между функцией прогиба и нагрузкой основан на гипотезе плоских сечений, линейной зависимости между деформацией и напряжением, т.е. на законе Гука, как все соотношения в сопротивлении материалов. На основании линейной зависимости между деформацией и напряжением существует линейная зависимость между функцией перемещений и нагрузкой.

Правильные ответы: 1; 2; 5.

Тест 1.6. Угол поворота сечения можно определить из следующих соотношений:

- ☐ 1) $EJ_z \varphi^I(x) = Q(x)$;
- ☐ 2) $\varphi(x) = v^{II}(x)$;
- ☐ 3) $\varphi(x) = v^I(x)$;
- ☐ 4) $EJ_z \varphi^I(x) = -M(x)$;
- ☐ 5) $EJ_z \varphi^{II}(x) = M(x)$.

Комментарий. Угол поворота поперечного сечения представляет собой, с одной стороны, производную функции прогибов, а с другой — дифференциальное уравнение второго порядка (зависимость между функцией прогиба и изгибающим моментом можно записать как дифференциальную зависимость между функцией $\varphi(x)$ и $M(x)$).

Правильные ответы: 3; 4.

Тест 1.7. Функция прогибов, выраженная с помощью начальных параметров, является решением дифференциального уравнения:

- ☐ 1) $EJ_z \varphi^I(x) = -M(x)$;
- ☐ 2) $EJ_z v^{IV}(x) = q(x)$;
- ☐ 3) $EJ_z v^{II}(x) = -M(x)$;
- ☐ 4) $M^I(x) = Q(x)$;
- ☐ 5) $EJ_z \varphi^{III}(x) = Q(x)$.

Комментарий. Функция прогибов, содержащая начальные параметры, является решением дифференциального уравнения четвертого порядка.

Правильный ответ: 2.

Тест 1.8. Неизвестным начальным параметром в уравнении прогибов для заданной балки (рис. 1.16) является:

- 1) φ_0 ;
- 2) v_0 ;
- 3) $\Delta\varphi$;
- 4) M_0 ;
- 5) Q_0 .

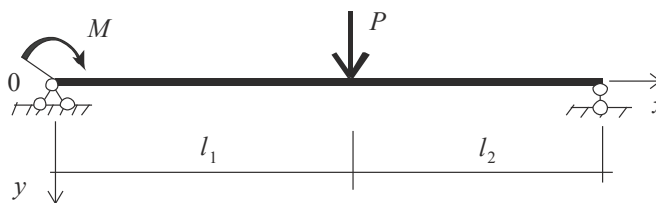


Рис. 1.16. Схема балки

Комментарий. Начало координат, расположенное в крайней левой точке балки, совпадает с шарнирной опорой.

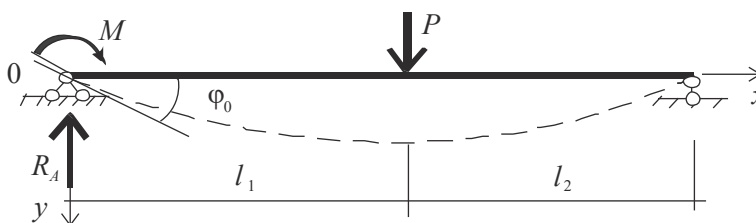


Рис. 1.17. Характер изогнутой оси балки

Представляя характер изогнутой оси данной балки (рис. 1.17), получаем, что из четырех начальных параметров $v_0 = 0$; $\varphi_0 = ?$; $M_0 = M$; $Q_0 = R_A$ неизвестным является угол поворота в шарнирной опоре. Значение реакции возможно найти из уравнения равновесия.

Правильный ответ: 1.

Тест 1.9. Неизвестной величиной в выражении прогиба по методу начальных параметров для заданной балки (рис. 1.18) является:

- 1) φ_0 ;
- 2) v_0 ;
- 3) $\Delta\varphi_A$;
- 4) M_0 ;
- 5) Q_0 .

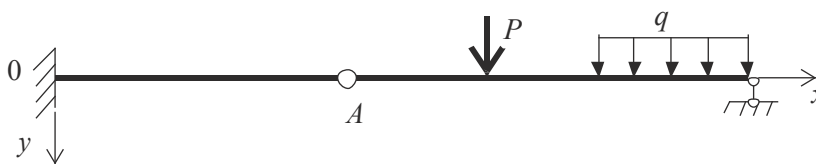


Рис. 1.18. Схема балки

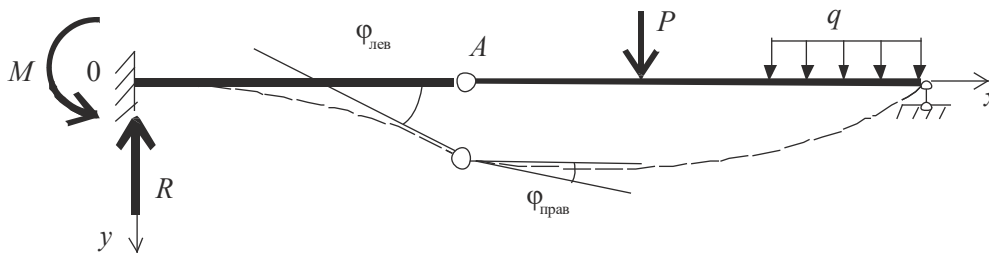


Рис. 1.19. Характер изогнутой оси балки

Комментарий. Начало координат в заданной балке совпадает с жестким защемлением (рис. 1.19), поэтому начальные параметры известны: $v_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = -M$; $Q_0 = R$.

Уравнение прогибов, составленное по методу начальных параметров, содержит одну неизвестную величину — $\Delta\varphi_A$, это разность углов поворота сечений в промежуточном шарнире: $\Delta\varphi_A = \varphi_{прав} - \varphi_{лев}$.

Правильный ответ: 3.

Тест 1.10. Правильными утверждениями для заданной балки (рис. 1.20) являются:

- ☐ 1) $v_0 = 0$;
- ☐ 2) $M_0 \neq 0$;
- ☐ 3) $Q_0 = 0$;
- ☐ 4) $\Delta\varphi_A = 0$;
- ☐ 5) $\varphi_0 = 0$.

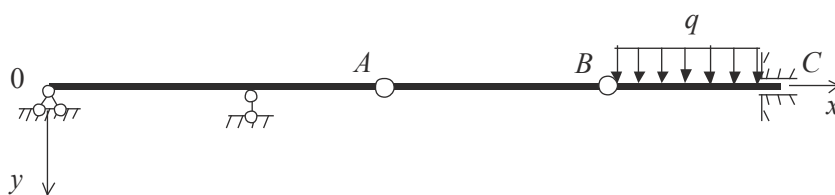


Рис. 1.20. Схема балки

Комментарий. В данной балке с промежуточными шарнирами нагрузка расположена на нижнем этаже поэтажной схемы (рис. 1.21).

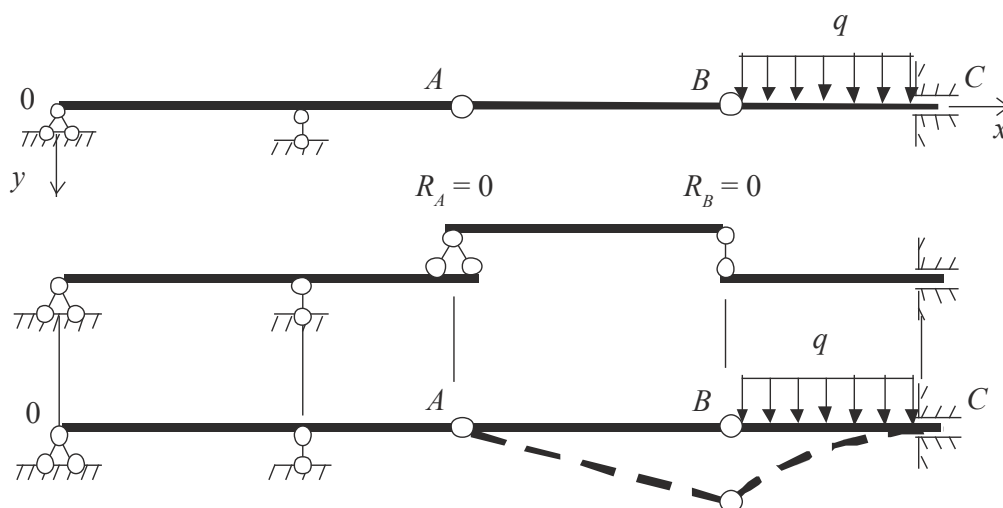


Рис. 1.21. Поэтажная схема балки и характер ее изогнутой оси

На верхнем этаже, свободном от нагрузки, реакции равны нулю, поэтому нижний левый этаж не нагружен, в точке $x = 0$ на шарнирной опоре прогиб v_0 , угол поворота сечения φ_0 , изгибающий момент M_0 и поперечная сила Q_0 равны нулю.

В точке на шарнирной опоре A разница между углами поворота сечения не равна нулю: $\Delta\varphi_A = \varphi_{\text{прав}} - \varphi_{\text{лев}} \neq 0$.

Правильные ответы: 1; 3; 5.

1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ МЕТОДОМ МОРА

Применяемые обозначения

- Стрелки ($\downarrow$; $\uparrow$) на эпюрах моментов показывают, с какой стороны от оси стержня расположен график.
- Δ_{1P} — перемещение сечения, вызванное внешней нагрузкой P , в направлении, указанном безразмерным усилием $\bar{X}_1 = 1$.
- ω_j — площадь j -й составляющей грузовой эпюры M_P .
- C_j — центр тяжести j -й составляющей грузовой эпюры.
- Словосочетание «*перемножение эпюр*» означает «*вычисление интеграла от произведения двух функций*».
- Для упрощения примем $EJ = EJ_z$.

Тест 1.11. Жесткость балки EJ постоянна. Прогиб v_D в сечении D балки (рис. 1.22), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $v_D = -\frac{40Ma^2}{EJ}$;
- 2) $v_D = -\frac{24Ma^2}{EJ}$;
- 3) $v_D = -\frac{64Ma^2}{EJ}$;
- 4) $v_D = -\frac{32Ma^2}{EJ}$;
- 5) $v_D = -\frac{128Ma^2}{EJ}$.

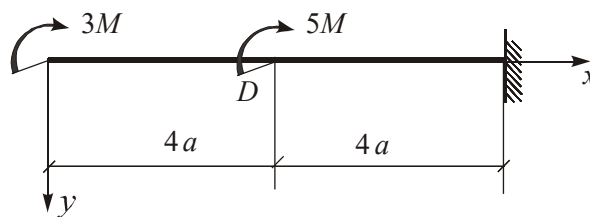


Рис. 1.22. Схема балки

Комментарий. Строим грузовую эпюру M_P от действия двух сосредоточенных моментов и эпюру $\bar{M}_1$ от единичной безразмерной силы $\bar{X}_1 = 1$, приложенной в сечении D , где ищем прогиб (рис. 1.23).

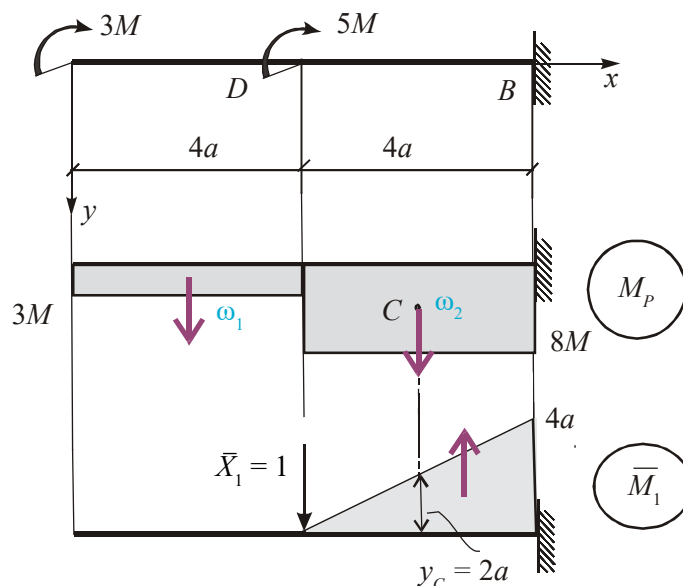


Рис. 1.23. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Определяем неизвестный прогиб в середине балки с помощью интеграла Мора по правилу Верещагина:

$$v_D = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} (\omega_1 \cdot 0 + \omega_2 y_C) = -\frac{1}{EJ} 8M \cdot 4a \cdot 2a = -\frac{64Ma^2}{EJ},$$

где ω_2 — площадь фигуры, ограниченной графиком функции M_P на участке DB , т.е. площадь прямоугольника; y_C — ордината в единичной эпюре $\bar{M}_1$, расположенная под центром тяжести C этого прямоугольника, $y_C = 2a$. Знак «минус» указывает на то, что перемножаемые графики находятся с разных сторон ($\downarrow$ и $\uparrow$) от оси балки. Отрицательный результат означает, что вертикальное перемещение v_D направлено *вверх*, т.е. противоположно направлению, указанному единичным усилием $\bar{X}_1$ (вниз).

Правильный ответ: 3.

Тест 1.12. Жесткость балки EJ постоянна. Прогиб v_C в сечении C балки (рис. 1.24), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $v_C = -\frac{36Pb^3}{EJ}$;
- 2) $v_C = \frac{48Pb^3}{EJ}$;
- 3) $v_C = -\frac{24Pb^3}{EJ}$;
- 4) $v_C = \frac{27Pb^3}{EJ}$;
- 5) $v_C = -\frac{17Pb^3}{EJ}$.

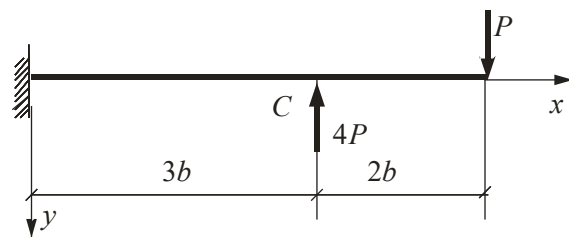


Рис. 1.24. Схема балки

Комментарий. Для определения прогиба v_C строим грузовую эпюру M_P . Далее приложим единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ в точке C и построим эпюру $\bar{M}_1$ (рис. 1.25).

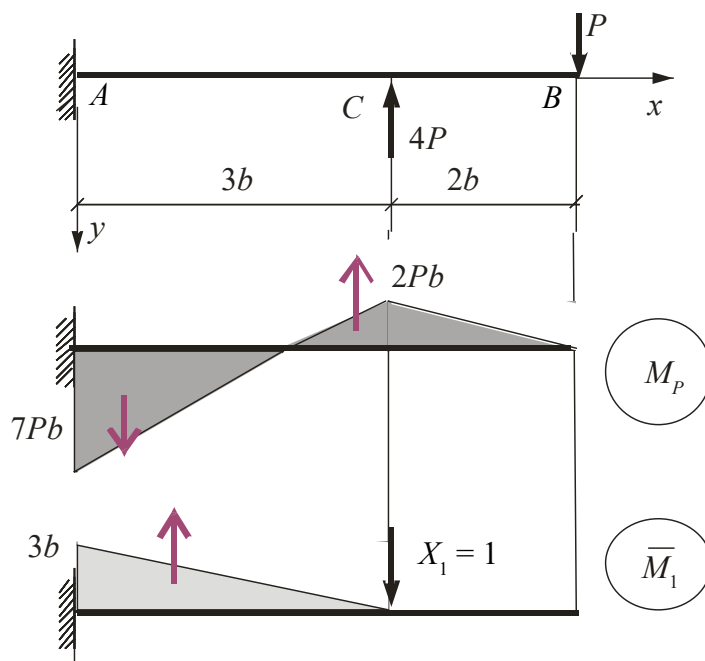


Рис. 1.25. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

На участке CB эпюра $\bar{M}_1$ нулевая. Следовательно, вычисление интеграла Мора производим на участке AC с помощью формулы перемножения трапеций:

$$v_C = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \frac{3b}{6} (-2 \cdot 7Pb \cdot 3b + 2Pb \cdot 3b) = -\frac{18Pb^3}{EJ}.$$

Знаки слагаемых учитывают положение ординат перемножаемых трапеций относительно оси балки. Знак «минус» в ответе означает, что вертикальное перемещение v_C направлено *вверх*, что противоположно направлению единичной силы $\bar{X}_1$.

Правильный ответ: 5.

Тест 1.13. Жесткость балки EJ постоянна. Угол поворота φ_A в сечении A балки (рис. 1.26), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_A = -\frac{27qa^3}{4EJ}$;
- 2) $\varphi_A = -\frac{9qa^3}{EJ}$;
- 3) $\varphi_A = \frac{12qa^2}{EJ}$;
- 4) $\varphi_A = \frac{18qa^3}{EJ}$;
- 5) $\varphi_A = -\frac{3qa^3}{2EJ}$.

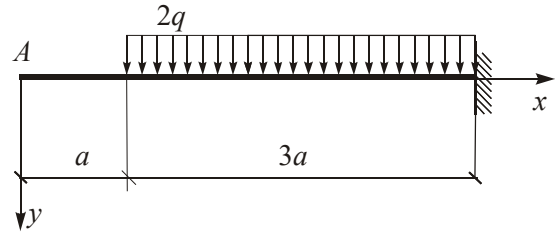


Рис. 1.26. Схема балки

Комментарий. Грузовая эпюра M_P имеет вид параболического треугольника, который можно разложить на обычный треугольник ($\uparrow$) с центром тяжести C_1 и чистую квадратную параболу ($\downarrow$) с центром тяжести C_2 . Эпюра $\bar{M}_1$ имеет вид прямоугольника ($\downarrow$), строится от действия единичного момента, приложенного в сечении A , где надо вычислить угол поворота (рис. 1.27).

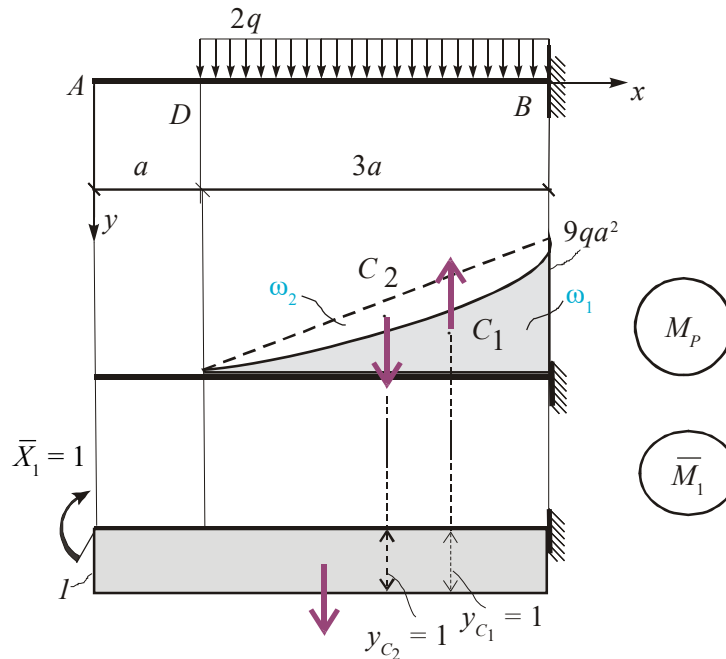


Рис. 1.27. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Запишем интеграл Мора и по правилу Верещагина с учетом знаков определим искомое перемещение φ_A :

$$\varphi_A = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} (\omega_1 y_{C_1} + \omega_2 y_{C_2}) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{9qa^2 \cdot 3a}{2} \cdot 1 + \frac{2q(3a)^3}{12} \cdot 1 \right] = -\frac{9qa^3}{EJ}.$$

Знак «минус» означает, что направление поворота сечения A противоположно указанному направлению единичного момента $\bar{X}_1$, т.е. соответствует ходу *против часовой стрелки*.

Правильный ответ: 2.

Тест 1.14. Жесткость шарнирно-опертой балки EJ постоянна. Угол поворота φ_B в сечении B балки (рис. 1.28), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_B = \frac{6Ml}{EJ}$;
- 2) $\varphi_B = -\frac{2Ml}{EJ}$;
- 3) $\varphi_B = \frac{3Ml}{EJ}$;
- 4) $\varphi_B = -\frac{Ml}{EJ}$;
- 5) $\varphi_B = -\frac{3Ml}{EJ}$.

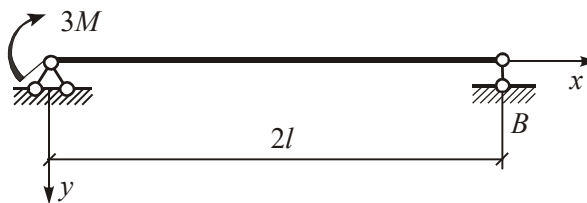


Рис. 1.28. Схема шарнирно-опертой балки

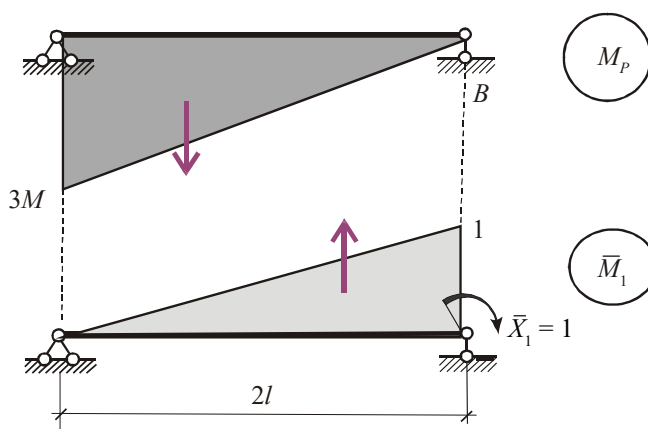


Рис. 1.29. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Комментарий. Грузовая M_p и единичная $\bar{M}_1$ эпюры построены с разных сторон от оси шарнирно-опертой балки (рис. 1.29), поэтому стрелки-указатели ($\downarrow$ и $\uparrow$) направлены в разные стороны. Очевидно, что результат будет отрицательным. При перемножении треугольных эпюр используем формулу для трапеций:

$$\varphi_B = \Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \int M_p \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \frac{2l}{6} (2 \cdot 3M \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3M \cdot 1) = -\frac{Ml}{EJ}.$$

Следовательно, поворот сечения B происходит *против часовой стрелки*.

Правильный ответ: 4.

Тест 1.15. Жесткость балки EJ постоянна. Прогиб v_D в сечении D балки (рис. 1.30), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $v_D = \frac{3qa^3}{EJ}$;
- 2) $v_D = \frac{9qa^4}{2EJ}$;
- 3) $v_D = -\frac{12qa^4}{EJ}$;
- 4) $v_D = -\frac{18qa^4}{EJ}$;
- 5) $v_D = -\frac{9qa^4}{EJ}$.

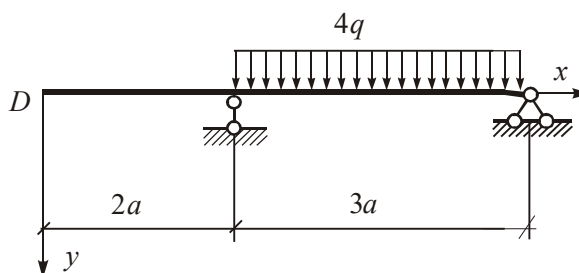


Рис. 1.30. Схема балки

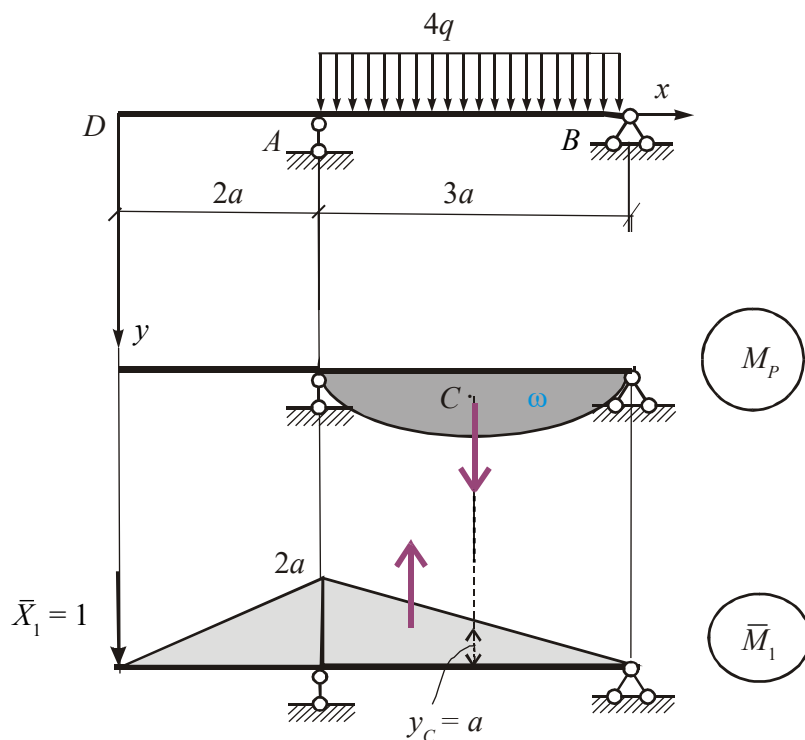


Рис. 1.31. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Комментарий. Перемножение грузовой M_P и единичной $\bar{M}_1$ эпюр происходит только на участке AB (рис. 1.31). Правило Верещагина в соответствии с правилом знаков (эпюры с разных сторон от оси) дает отрицательный результат:

$$v_D = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} (\omega \cdot y_C) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{4q(3a)^3}{12} a \right] = -\frac{9qa^4}{EJ}.$$

Сечение D перемещается *вверх* — против направления единичной силы.

Правильный ответ: 5.

Тест 1.16. Жесткость балки EJ постоянна. Угол поворота φ_A в сечении A балки (рис. 1.32), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_A = -\frac{20qb^3}{EJ}$;
- 2) $\varphi_A = \frac{10qb^3}{EJ}$;
- 3) $\varphi_A = \frac{35qb^2}{EJ}$;
- 4) $\varphi_A = \frac{40qb^3}{EJ}$;
- 5) $\varphi_A = -\frac{50qb^3}{3EJ}$.

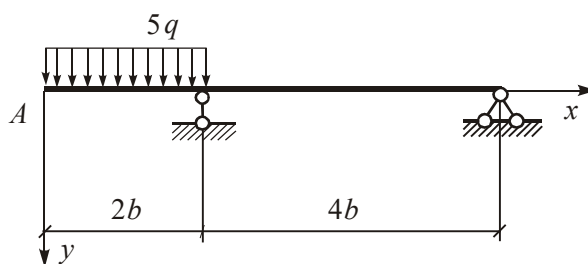


Рис. 1.32. Схема балки

Комментарий. Для вычисления интеграла Мора разбиваем балку на два участка — AD и DB (рис. 1.33).

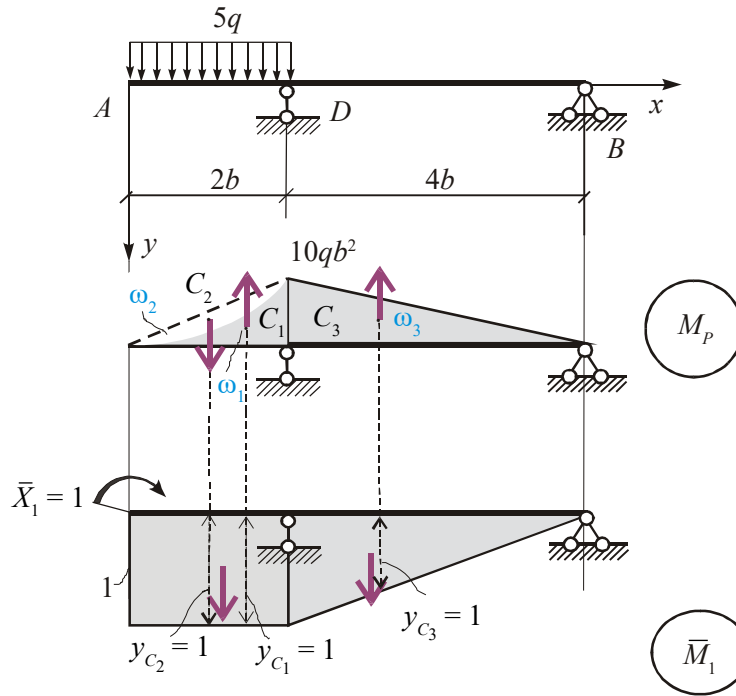


Рис. 1.33. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Тогда в пределах каждого отрезка перемножаемые эпюры M_P и $\bar{M}_1$ непрерывны и без изломов. Правило Верещагина в соответствии с правилом знаков (эпюры с разных сторон от оси) дает отрицательный результат:

$$\begin{aligned}\varphi_A = \Delta_{1P} &= \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} (\omega_1 y_{C_1} + \omega_2 y_{C_2} + \omega_3 y_{C_3}) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[-10qb^2 \cdot 2b \frac{1}{2} 1 + \frac{5q(2b)^3}{12} 1 - 10qb^2 \cdot 4b \frac{1}{2} \frac{2}{3} 1 \right] = -\frac{20qb^3}{EJ}.\end{aligned}$$

Знак «минус» означает, что сечение A повернулось *против часовой стрелки*.

Правильный ответ: 1.

Тест 1.17. Жесткость стержней консольной рамы EJ постоянна (рис. 1.34). Вертикальное перемещение v_A сечения A равно:

- 1) $v_A = \frac{54Pa^2}{EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 2) $v_A = \frac{18Pa^3}{EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 3) $v_A = \frac{27Pa^3}{EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 4) $v_A = \frac{9Pa^3}{2EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 5) $v_A = \frac{45Pa^3}{EJ}$ (точка A перемещается вверх).

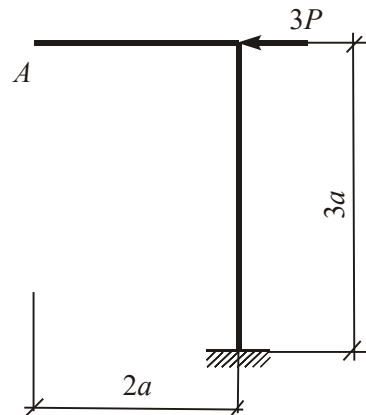


Рис. 1.34. Схема консольной рамы

Комментарий. Грузовая эпюра на горизонтальном участке стержня отсутствует (рис. 1.35).

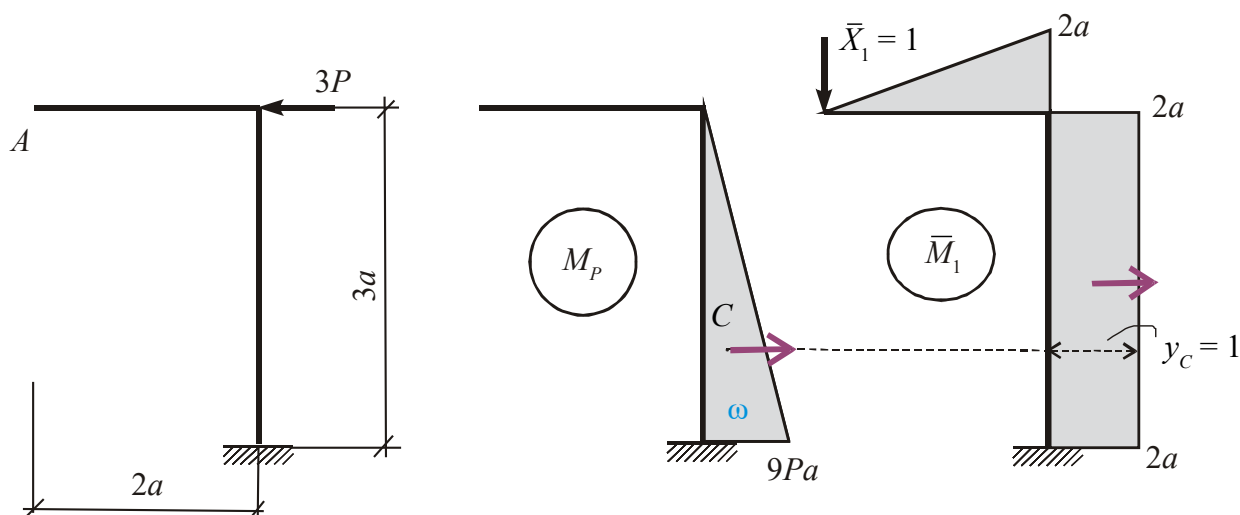


Рис. 1.35. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Для построения единичной эпюры $\bar{M}_1$ прикладываем в сечении A вертикальную единичную силу $\bar{X}_1$. Используем правило Верещагина при вычислении интеграла Мора на вертикальном участке стержня:

$$v_A = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} (\omega \cdot y_C) = \frac{1}{EJ} 9Pa \cdot 3a \frac{1}{2} 2a = \frac{27Pa^3}{EJ}.$$

Точка A перемещается *вниз* (по направлению силы $\bar{X}_1$).

Правильный ответ: 3.

Тест 1.18. Жесткость стержней консольной рамы различна (рис. 1.36). Вертикальное перемещение v_A сечения A равно:

- 1) $v_A = \frac{20Ma^2}{3EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 2) $v_A = \frac{8Ma^2}{3EJ}$ (точка A перемещается вверх);
- 3) $v_A = \frac{8Ma^2}{EJ}$ (точка A перемещается вверх);
- 4) $v_A = \frac{10Ma^2}{EJ}$ (точка A перемещается вниз);
- 5) $v_A = \frac{16Ma^2}{3EJ}$ (точка A перемещается вверх).

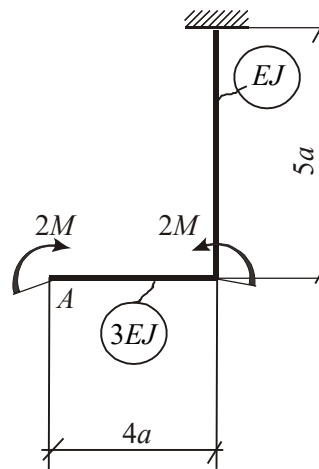


Рис. 1.36. Схема консольной рамы

Комментарий. Грузовая эпюра M_P на вертикальном участке DB стержня нулевая (рис. 1.37).

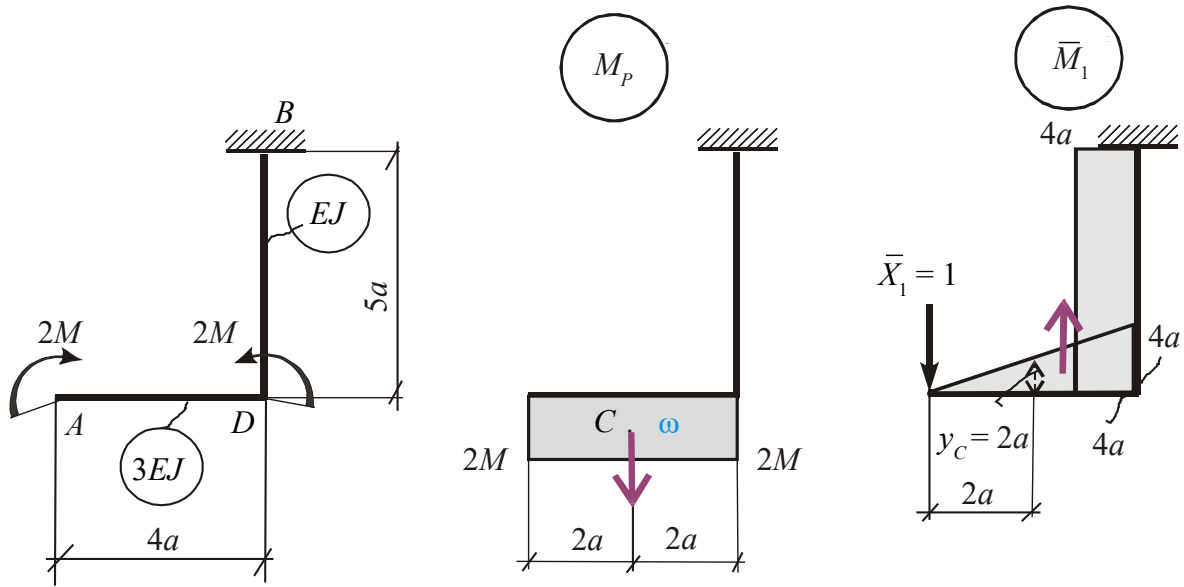


Рис. 1.37. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Поэтому перемножение грузовой M_P и единичной $\bar{M}_1$ эпюр происходит только на участке AD .

Перемножаемые эпюры расположены с разных сторон ($\downarrow$; $\uparrow$) от оси стержня, и по правилу Верещагина перед $(\omega \cdot y_C)$ ставим знак «минус»:

$$v_A = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_1}{(EJ)_j} dx = \frac{1}{3EJ} (\omega \cdot y_C) = \frac{1}{3EJ} (-2M \cdot 4a \cdot 2a) = -\frac{16Ma^2}{3EJ}.$$

Точка A перемещается *вверх* (против направления единичной силы $\bar{X}_1$).

Правильный ответ: 5.

Тест 1.19. Единичная эпюра моментов $\bar{M}$, построенная для указанной балки (рис. 1.38), позволяет вычислить от действия любых поперечных нагрузок следующее перемещение:

- ☐ 1) v_A ;
- ☐ 2) φ_B ;
- ☐ 3) v_C ;
- ☐ 4) v_B ;
- ☐ 5) φ_A .

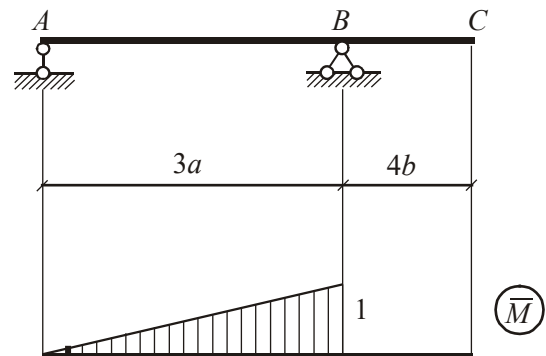


Рис. 1.38. Схема балки

Комментарий. Данная задача может быть отнесена к разряду обратных задач, так как предложена единичная эпюра $\bar{M}$, по которой нужно определить, от какого единичного усилия она построена. Поскольку на правой опоре ордината на эпюре отложена сверху и равна 1, то очевидно, что этот график — результат действия единичного момента $\bar{X}_1 = 1$, направленного по часовой стрелке и приложенного к опоре B .

Правильный ответ: 2.

1.4. РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ

Тест 1.20. Жесткость балки при изгибе зависит:

- ☐ 1) от площади поперечного сечения A ;
- ☐ 2) модуля упругости E ;
- ☐ 3) длины балки l ;
- ☐ 4) точки приложения нагрузки;
- ☐ 5) осевого момента инерции J .

Комментарий. Жесткостью балки на изгиб называется произведение EJ . Размерность изгибной жесткости:

$$\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot \text{см}^4 = \text{кН} \cdot \text{см}^2.$$

Правильные ответы: 2, 5.

Тест 1.21. Шарнирно-опертая балка нагружена сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 1.39). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $f/l \leq 1/300$. Площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E . Величину нагрузки P из условия жесткости балки определяют по формуле:

- ☐ 1) $P \leq \frac{EJ}{48l^3}$;
- ☐ 2) $P \leq \frac{EJ}{25l^2}$;
- ☐ 3) $P \leq \frac{l^2}{25EJ}$;
- ☐ 4) $P \leq \frac{EA}{25l^2}$;
- ☐ 5) $P \leq \frac{l^2}{25EA}$.

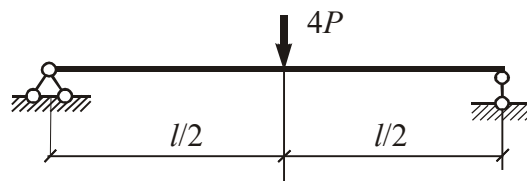


Рис. 1.39. Схема шарнирно-опертой балки

Комментарий. Из условия жесткости имеем

$$f \leq \frac{l}{300}.$$

С другой стороны, наибольший прогиб в данной балке возникает в середине пролета, он равен:

$$f = \frac{4Pl^3}{48EJ}.$$

Сравнивая правые части обеих формул, имеем

$$\frac{4Pl^3}{48EJ} \leq \frac{l}{300}.$$

Отсюда получаем величину силы

$$P \leq \frac{EJ}{25l^2}.$$

Правильный ответ: 2.

Тест 1.22. Шарнирно-опертая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.40). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $f/l \leq 1/200$. Площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E . Величину нагрузки q из условия жесткости балки определяют по формуле:

- 1) $q \leq \frac{24}{125} \frac{l^4}{EJ}$;
- 2) $q \leq \frac{125}{16} \frac{EJ}{l^3}$;
- 3) $q \leq \frac{384}{5} \frac{l^3}{EA}$;
- 4) $q \leq \frac{16}{125} \frac{EJ}{l^3}$;
- 5) $P \leq \frac{128}{5} \frac{l^3}{EA}$.

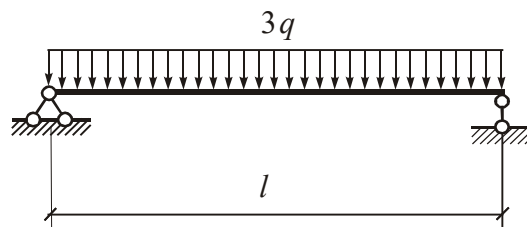


Рис. 1.40. Схема шарнирно-опертой балки

Комментарий. Из условия жесткости имеем

$$f \leq \frac{l}{200}.$$

С другой стороны, наибольший прогиб в шарнирно-опертой балке возникает в середине ее пролета, он равен:

$$f = \frac{5}{384} \frac{(3q)l^4}{EJ} = \frac{15ql^4}{384EJ}.$$

Сравнивая правые части обеих формул, имеем:

$$\frac{15ql^4}{384EJ} \leq \frac{l}{200}.$$

Отсюда получаем величину нагрузки:

$$q \leq \frac{16}{125} \frac{EJ}{l^3}.$$

Правильный ответ: 4.

Тест 1.23. Консольная балка нагружена сосредоточенным изгибающим моментом (рис. 1.41). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $f/l \leq 1/500$. Площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E . Величину нагрузки M из условия жесткости балки определяют по формуле:

- 1) $M \leq \frac{3}{500} \frac{EJ}{l}$;
- 2) $M \leq \frac{1}{250} \frac{EJ}{l}$;
- 3) $M \leq \frac{1}{750} \frac{EJ}{l}$;
- 4) $M \leq \frac{1}{750} \frac{EA}{l}$;
- 5) $M \leq \frac{1}{125} \frac{l}{EA}$.

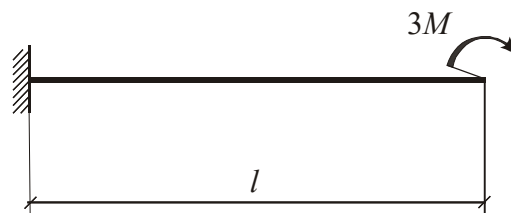


Рис. 1.41. Схема консольной балки

Комментарий. Условие жесткости ограничивает наибольший прогиб балки:

$$f \leq \frac{l}{500}.$$

Очевидно, что наибольшее вертикальное перемещение f в заданной консоли возникает на ее конце, оно равно (что можно определить с помощью, например, метода Мора):

$$f = \frac{3Ml^2}{2EJ}.$$

Сравнивая правые части обеих формул, получаем

$$\frac{3Ml^2}{2EJ} \leq \frac{l}{500}.$$

Отсюда величина момента

$$M \leq \frac{1}{750} \frac{EJ}{l}.$$

Правильный ответ: 3.

Раздел 2 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

КЛЮЧЕВЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

Многие элементы строительных конструкций (например балки перекрытий, колонны, стойки, опоры) находятся под воздействием горизонтальных и вертикальных сил, приложенных по-разному по отношению к оси стержня. Определение напряжений при таких нагрузках относится к случаю **сложного сопротивления**.

В опубликованных ранее источниках [9–11] были рассмотрены простейшие виды деформирования стержня. Для каждого случая нагружения приведем формулы для определения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня, запишем условия прочности.

1. При **центральной растяжении и сжатии стержня нагрузка действует вдоль оси**. Все продольные волокна испытывают либо растяжение, либо сжатие, возникает одно **внутреннее усилие** — *продольная сила* N (рис. 2.1). **Нормальные напряжения** во всех волокнах одинаковы, их значения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

и соответственно записывают условие прочности

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{N}{A} \leq \gamma_c R. \quad (2.2)$$

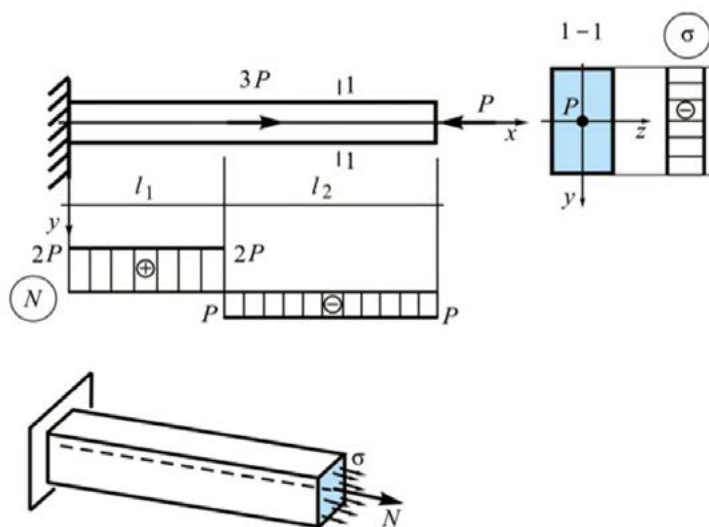


Рис. 2.1. Внутренние усилия и напряжения при центральном растяжении и сжатии стержня

2. **Внешняя нагрузка, приложенная перпендикулярно оси стержня в одной из главных плоскостей поперечного сечения, вызывает в балке состояние плоского прямого изгиба**. При действии нагрузки в плоскости Oxy в поперечном сечении возникают **два внутренних усилия** — изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y (рис. 2.2, а). Нагрузка, действующая в плоскости Oxz , вызывает появление в поперечном сечении балки усилий M_y и Q_z (рис. 2.2, б).

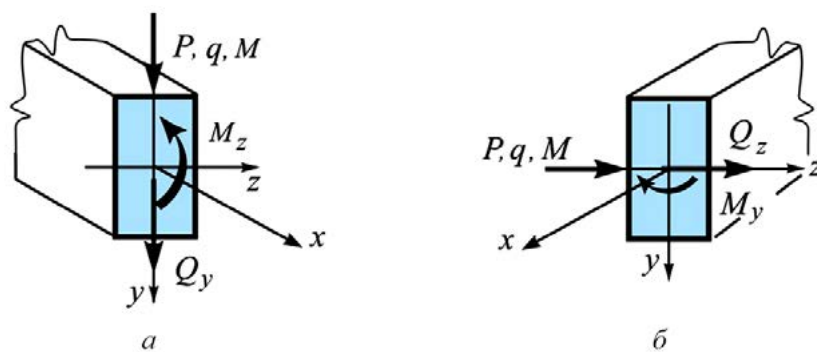


Рис. 2.2. Внутренние усилия в поперечном сечении стержня в двух случаях плоского прямого изгиба

В дальнейшем, рассматривая формулы для определения нормальных напряжений, учитываем действие одного внутреннего усилия — изгибающего момента. Касательные напряжения зависят от действия поперечных сил Q_y , Q_z , поэтому их не рассматриваем. Нормальные напряжения в произвольной точке сечения (см. рис. 2.2) определяют по формулам:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y, \quad \sigma = \frac{M_y}{J_y} z. \quad (2.3)$$

Из этих соотношений следует, что при плоском прямом изгибе нормальные напряжения изменяются по линейному закону, $\sigma = 0$ на уровне центра тяжести сечения, наибольшие значения σ возникают в крайних волокнах. При выражении наибольших нормальных напряжений и условия прочности используют момент сопротивления сечения W_z или W_y .

При приложении нагрузки в плоскости Oxy (рис. 2.3, а) условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} \leq \gamma_c R, \quad (2.4)$$

где $W_z = \frac{J_z}{y_{\text{нб}}}$.

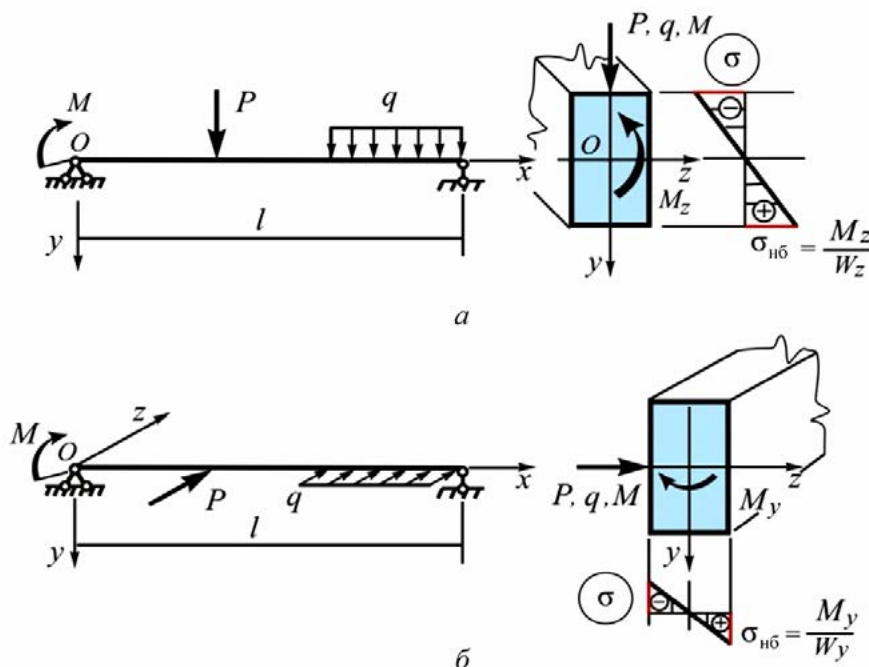


Рис. 2.3. Эпюры нормальных напряжений в случаях плоского прямого изгиба

При действии нагрузки в плоскости Oxz (рис. 2.3, б) условие прочности записывают в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_y}{W_y} \leq \gamma_c R, \quad (2.5)$$

где $W_y = \frac{J_y}{z_{\text{нб}}}$.

При действии нескольких нагрузок, приложенных одновременно в разных плоскостях, стержень будет находиться в условиях сложного сопротивления. В общем случае в поперечном сечении стержня могут действовать шесть внутренних усилий: N — продольная сила; Q_y , Q_z — поперечные силы (рис. 2.4, а); M_y , M_z — изгибающие моменты; M_k — крутящий момент (рис. 2.4, б).

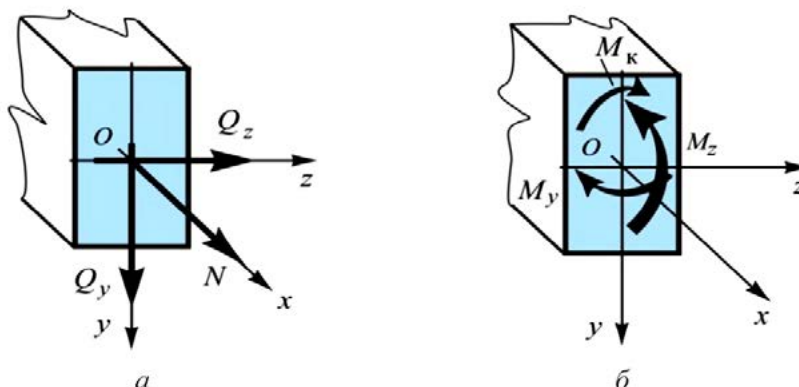


Рис. 2.4. Положительные направления внутренних усилий в поперечном сечении стержня

Обобщим **правила знаков для внутренних усилий**, введенные ранее для простых видов деформирования стержня. *Продольная сила N* считается *положительной*, если вызывает растяжение волокон балки, и *отрицательной*, если вызывает сжатие волокон. *Поперечная сила Q* считается *положительной*, если стремится повернуть стержень относительно рассматриваемого сечения по ходу часовой стрелки. Отрицательная поперечная сила поворачивает балку относительно рассматриваемой точки против хода часовой стрелки. На рис. 2.4, а изображено положительное направление продольной силы N , направленной от сечения, вызывающей растяжение в балке, и положительные направления поперечных сил Q_y , Q_z .

Изгибающий момент считается *положительным*, если растягивает волокна в области положительного направления оси координат, и *отрицательным*, если сжимает волокна балки в области положительного направления оси координат. Например, на рис. 2.4, б показаны положительные направления изгибающих моментов M_y и M_z , так как M_y растягивает волокна в области положительного направления оси Oz , изгибающий момент M_z — растягивает волокна в области положительного направления оси Oy .

Крутящий момент M_k будем считать *положительным*, если он, при взгляде со стороны положительного направления оси Ox , действует против хода часовой стрелки. Положительное направление крутящего момента изображено на рис. 2.4, б.

При определении нормальных напряжений в случае **сложного сопротивления действие заданной нагрузки представляют в виде суммы простых напряженных состояний**, т.е. центрального растяжения–сжатия и изгиба.

Для каждого рассматриваемого случая сложного сопротивления формулу для определения нормальных напряжений σ составляют на основании **принципа независимости действия сил** (значение напряжений при одновременном действии нескольких нагрузок можно получить как сумму напряжений, найденных от каждой нагрузки отдельно)

и гипотезы плоских сечений (сечение плоское до деформации остается плоским после деформации).

В пределах рассматриваемой теории и принципов сопротивления материалов нормальные напряжения в любом сечении при сложном сопротивлении изменяются по линейному закону, их наибольшие значения находятся в крайних точках сечения. В состоянии изгиба одни волокна испытывают растяжение, другие — сжатие, или испытывают только растяжение или сжатие. Для построения общей эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении необходимо знать положение *нулевой линии* (н.л.), т.е. положение точек, где нормальные напряжения равны нулю $\sigma = 0$.

Рассмотрим следующие виды сложного сопротивления стержней.

Косой изгиб

Косым называют такой изгиб, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента проходит через ось балки, не совпадая ни с одной из главных плоскостей инерции Oxy и Oxz . Различают два вида косоугольного изгиба.

1. **Плоский косой изгиб.** Вся нагрузка, приложенная на балку, действует в одной плоскости, проходящей через ось балки, не совпадая ни с одной из главных плоскостей инерции Oxy и Oxz (рис. 2.5, а). Плоскость действия нагрузки называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки — *силовой линией*. Обозначим через α_p угол между силовой линией и главной осью Oy . Положение нулевой линии и примерный характер эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 2.5, б.

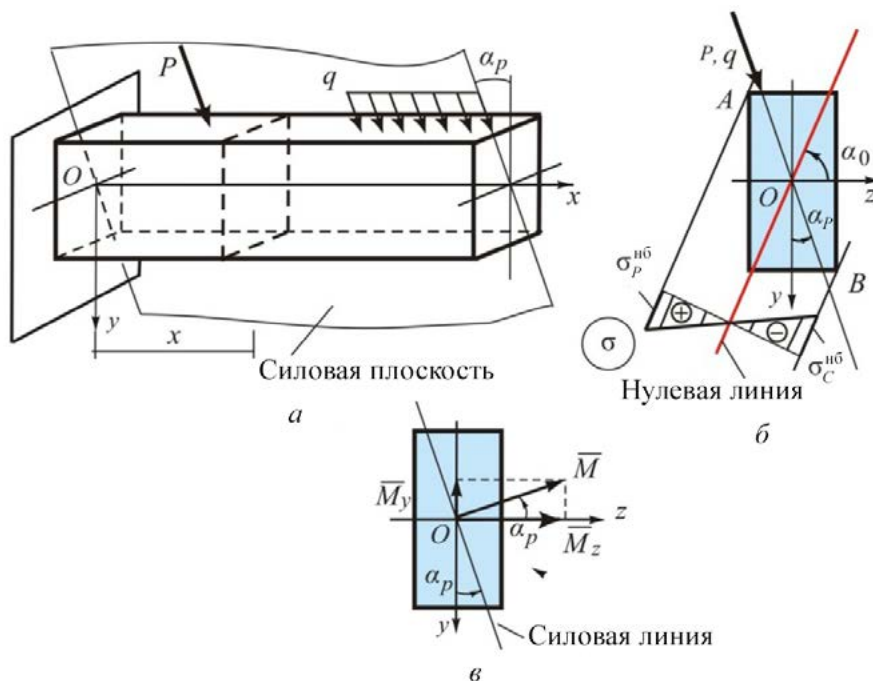


Рис. 2.5. Плоский косой изгиб

При плоском косом изгибе суммарный изгибающий момент $\bar{M}$ (см. рис. 2.5, в) можно разложить на два составляющих изгибающих момента $\bar{M}_z$ и $\bar{M}_y$, действующих в главных плоскостях инерции (вектор изгибающего момента изображается перпендикулярно плоскости его действия):

$$\bar{M}_y = \bar{M} \sin \alpha_p, \quad \bar{M}_z = \bar{M} \cos \alpha_p. \quad (2.6)$$

2. Пространственный кривой изгиб. Внутренние усилия имеют различные законы изменения по длине балки, так как вычисляются от нагрузок, действующих в разных плоскостях (рис. 2.6, а)

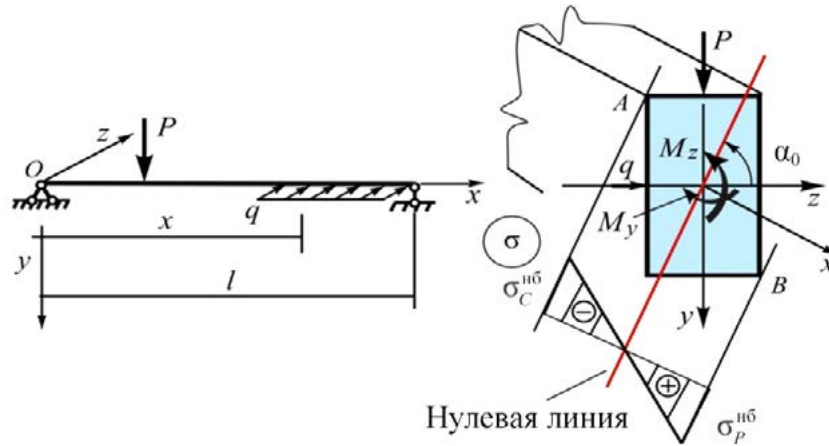


Рис. 2.6. Пространственный кривой изгиб

Формула для нормальных напряжений при плоском и при пространственном кривой изгибе представляет алгебраическую сумму двух плоских прямых изгибов:

$$\sigma = \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y, \quad (2.7)$$

где J_y и J_z — главные моменты инерции сечения; y и z — координаты точек сечения.

Уравнение *нулевой линии* получим, приравнявая соотношение (2.7) нулю:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0, \quad \text{tg } \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z}{J_y} \frac{M_y}{M_z}. \quad (2.8)$$

Для плоского кривой изгиба нулевая линия может также определяться по формуле

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z}{J_y} \text{tg } \alpha_p. \quad (2.9)$$

Знак «минус» в формулах (2.8) и (2.9) указывает на то, что нулевая линия по отношению к силовой проходит через две другие четверти осей координат.

При плоском кривой изгибе угол α_0 откладывается от оси Oz в ту же сторону, что и угол α_p от оси Oy (см. рис. 2.5, б).

При пространственном кривой изгибе угол α_0 откладывается от оси Oz по ходу или против хода часовой стрелки в зависимости от положения наиболее напряженных точек сечения (см. рис. 2.6, б), разделяя области наибольшего растяжения и сжатия.

Условие прочности при кривой изгибе для балок с сечениями в форме прямоугольника и двутавра, т.е. имеющих две оси симметрии, имеет вид

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \gamma_c R. \quad (2.10)$$

а в случае произвольного сечения

$$\sigma_{\text{нб}} = \left| \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \right| \leq \gamma_c R. \quad (2.11)$$

В формулах (2.10) и (2.11) M_y , M_z — изгибающие моменты в опасном сечении балки; y , z — координаты точки, наиболее удаленной от нулевой линии. При использовании условия (2.11) величины M_y , M_z , y , z необходимо брать с учетом их знаков.

Отметим, что при пространственном косом изгибе (см. рис. 2.6) положение опасного сечения не всегда является очевидным. В этих случаях необходимо проверять прочность в нескольких сечениях балки, т.е. в сечениях, в которых M_y и M_z имеют наибольшие значения.

Перемещение при косом изгибе. Для определения перемещения оси балки при косом изгибе действующие на балку нагрузки разложим на составляющие по главным осям Oy , Oz и определим по отдельности прогибы v и w в направлении этих осей (рис. 2.7):

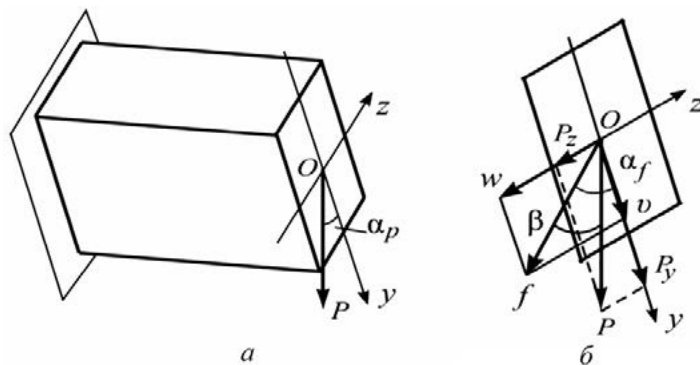


Рис. 2.7. Направление действия нагрузки (а) и перемещение оси балки (б) при косом изгибе

Полный прогиб f в произвольном сечении балки и его направление определяют по формулам:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_f = \frac{w}{v}. \quad (2.12)$$

При косом изгибе направление полного прогиба f не совпадает с направлением действия силы, угол β между ними равен:

$$\beta = \alpha_f - \alpha_P. \quad (2.13)$$

Внецентренное растяжение и сжатие стержня

Внецентренное растяжение (сжатие) стержня представляет собой вид деформирования, при котором равнодействующие внешних сил действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня (рис. 2.8).

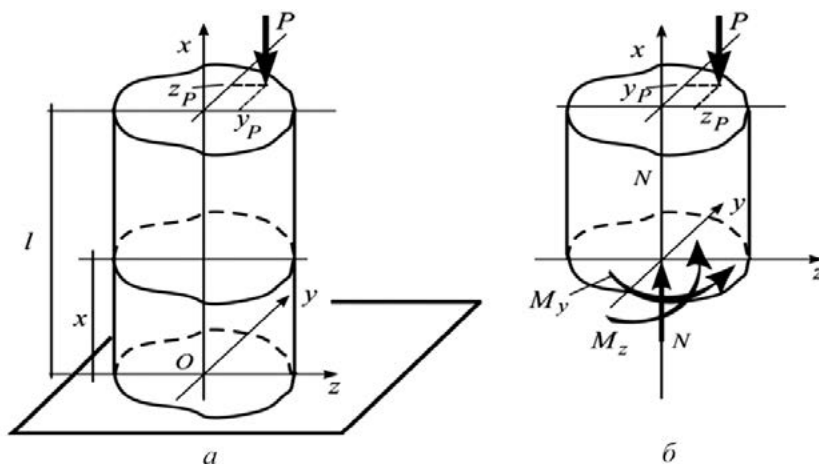


Рис. 2.8. Направление действия нагрузки при внецентренном сжатии

Стержень произвольного поперечного сечения (см. рис. 2.8, а) нагружен на торце внецентренно приложенной сжимающей силой P , направленной параллельно оси Ox . Обозначим координаты точки приложения силы P через y_P и z_P .

Внутренние усилия в произвольном сечении стержня (рис. 2.8, б) определяют методом сечений из уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 0, N - P = 0, N = P \text{ — продольная сила} \\ \Sigma M_y &= 0, M_y - Pz_P = 0, M_y = Pz_P \text{ — изгибающий момент относительно оси } Oy, \\ \Sigma M_z &= 0, M_z - Py_P = 0, M_z = Py_P \text{ — изгибающий момент относительно оси } Oz.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Величины внутренних усилий в формулах (2.14) в данном примере не изменяются по длине стержня, и таким образом распределение напряжений в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки, будет одинаковым.

Применяя принцип независимости действия сил, нормальное напряжение в поперечном сечении определим как сумму нормальных напряжений, полученных от каждого усилия:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad (2.15)$$

Знак «минус» в формуле (2.15) у продольной силы соответствует ее сжимающему действию. Что касается изгибающих моментов, то в области положительных значений z и y они вызывают сжатие и поэтому в формулу (2.15) также входят со знаком «минус».

Введем в соотношение (2.15) квадраты главных радиусов инерции сечения:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A}, i_z^2 = \frac{J_z}{A} \quad (2.16)$$

и получим формулу для нормальных напряжений при внецентренном сжатии стержня в виде

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_z^2} \right). \quad (2.17)$$

При внецентренном растяжении в формуле (2.17) ставят знак «плюс» в начале — перед первым множителем.

Принимая в формуле (2.17) $\sigma = 0$, запишем уравнение нулевой линии:

$$1 + \frac{z_P z_0}{i_y^2} + \frac{y_P y_0}{i_z^2} = 0, \quad (2.18)$$

где z_0 и y_0 — координаты точек пересечения нулевой линии с осями координат (рис. 2.9). Уравнение (2.18) является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения.

Полагая в уравнении (2.18) последовательно $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, соответственно получим

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_P}, y_0 = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad (2.19)$$

где z_0 и y_0 — отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат (см. рис. 2.9).

Анализ соотношений (2.19) позволяет сделать следующие выводы:

- 1) точка приложения силы и нулевая линия расположены по разные стороны от центра тяжести сечения (см. рис. 2.9);
- 2) при приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения нулевая линия удаляется от него (рис. 2.10).

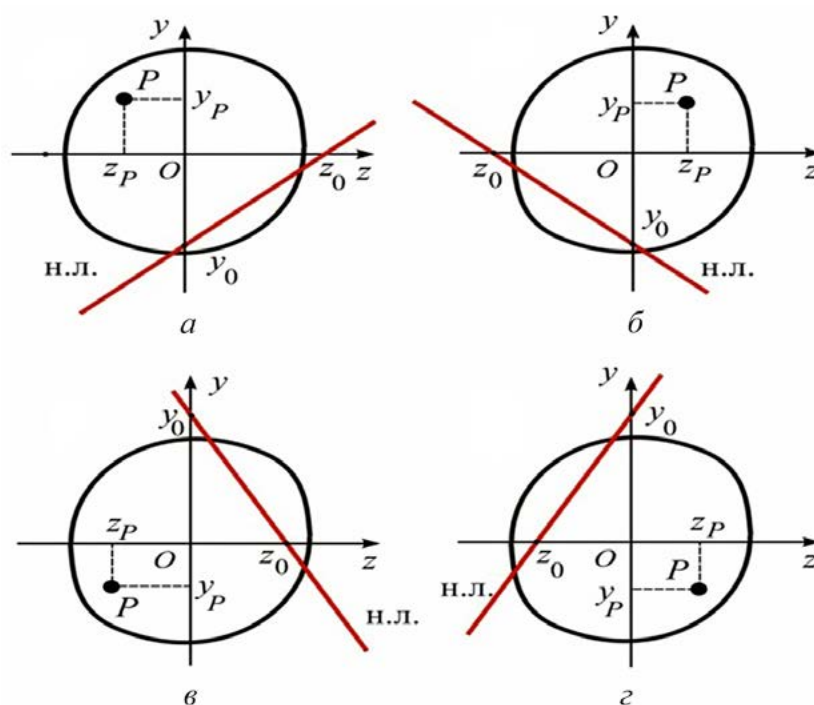


Рис. 2.9. Положение нулевой линии и соответствующей точки приложения силы в поперечном сечении при внецентренном сжатии или растяжении стержня:
 а — сила приложена в четверти IV, нулевая линия расположена в четверти II;
 б — сила приложена в четверти I, нулевая линия — в четверти III;
 в — сила приложена в четверти III, нулевая линия — в четверти I;
 г — сила приложена в четверти II, нулевая линия — в четверти IV

Положение нулевой линии позволяет построить эпюру нормальных напряжений, для этого:

- проводят нулевую линию;
- параллельно нулевой линии проводят касательные к контуру сечения, которые касаются сечения в наиболее напряженных точках (см. рис. 2.10, точки A, B) — это точки, наиболее удаленные от нулевой линии;
- проводят линию перпендикулярно нулевой линии;
- строят график линейной функции, проходящий через нулевую линию (см. рис. 2.10);

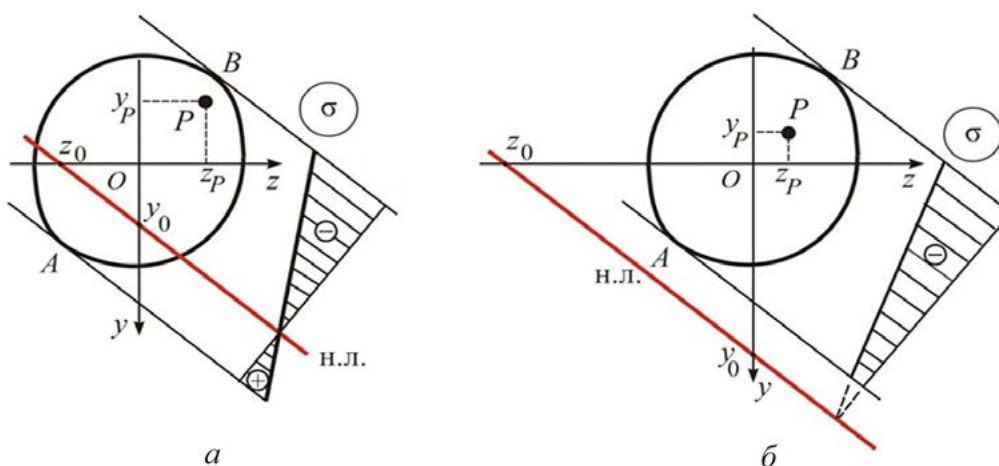


Рис. 2.10. Эпюры нормальных напряжений при внецентренном приложении силы

3) если нулевая линия вращается вокруг угловой точки, то соответствующие точки приложения сил располагаются на одной линии (рис. 2.11, а);

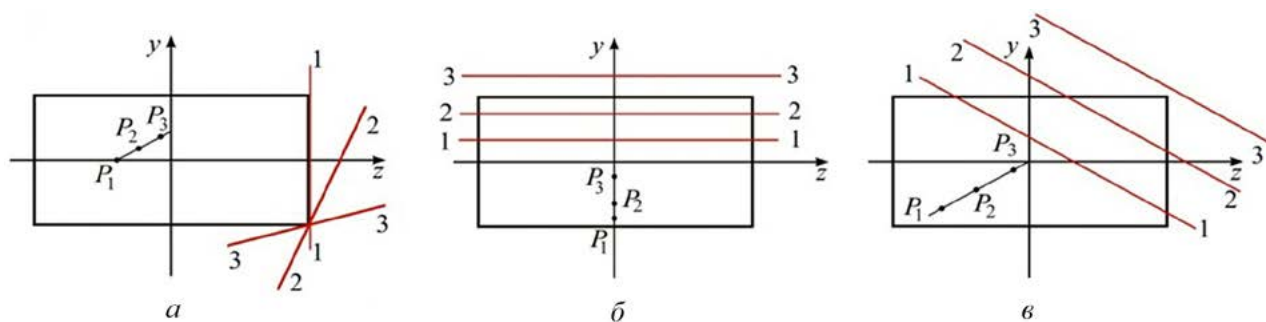


Рис. 2.11. Нулевые линии и соответствующие точки приложения сил

4) плоский случай внецентренного сжатия характеризуется расположением равнодействующей силы на одной из главных осей, при этом нулевая линия проходит параллельно другой главной центральной оси (рис. 2.11, б);

5) для сил, расположенных на одной линии, нулевые линии располагаются параллельно друг другу (рис. 2.11, в).

В соответствии с расположением нулевой линии эпюра нормальных напряжений может иметь в сечении разные знаки (см. рис. 2.10, а) или один знак (см. рис. 2.10, б), что важно при расчете конструкций.

Ядро сечения. Многие строительные материалы (бетон, кирпичная кладка и др.) плохо сопротивляются растяжению. Их прочность на растяжение во много раз меньше, чем на сжатие. В элементах конструкций из указанных материалов нежелательно появление растягивающих напряжений. Выполнение этого условия возможно, если нулевая линия касается контура поперечного сечения или находится вне сечения. Таким нулевым линиям соответствует определенное положение точек приложения сил.

Ядро сечения — выпуклая фигура вокруг центра тяжести сечения, обладающая следующим свойством: при расположении точки приложения силы внутри этой фигуры или на ее границе напряжения во всех точках сечения имеют одинаковый знак. Координаты точек контура ядра сечения определяют с помощью следующих формул:

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}. \quad (2.20)$$

Ядро сечения является выпуклой фигурой, поскольку при его построении нулевые линии всегда задаются в виде касательных к контуру сечения.

Построим ядро сечения для прямоугольника (рис. 2.12). Будем задавать положение нулевой линии по касательной к контуру поперечного сечения и определять соответствующие ей координаты точки приложения силы, используя соотношения (2.20). Квадраты радиусов инерции прямоугольного сечения равны:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12}.$$

Нулевая линия 1–1 параллельна оси Oy и пересекает ось Oz , поэтому

$$z_0 = \frac{b}{2}, \quad y_0 = \infty.$$

Соответствующая этой линии точка приложения силы имеет координаты

$$z_P = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6}, \quad y_P = -\frac{h^2}{12 \cdot \infty} = 0.$$

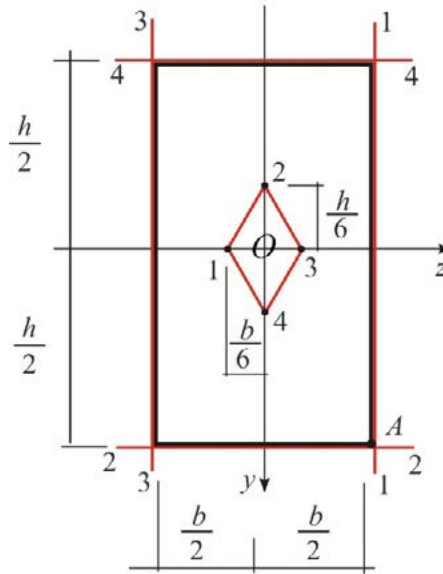


Рис. 2.12. Построение ядра сечения в прямоугольнике

Точка 1 приложения силы расположена на оси Oz с противоположной стороны от проведенной нулевой линии 1–1. Для нулевой линии 2–2, параллельной оси Oz , имеем

$$z_0 = \infty, y_0 = \frac{h}{2}.$$

Получим следующие координаты точки приложения силы:

$$z_P = -\frac{b^2}{12 \cdot \infty} = 0, y_P = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Согласно выводу 3, нулевым линиям, проходящим через точку A , соответствуют точки приложения сил, расположенные на прямой 1–2 ядра сечения. Проведем линии 3–3 и 4–4 и отметим на рисунке соответствующие им точки приложения сил:

$$z_0 = -\frac{b}{2}; z_P = -\frac{b^2 \cdot 2}{12(-b)} = \frac{b}{6}; y_0 = \infty; y_P = -\frac{h^2}{12 \cdot \infty} = 0;$$

$$z_0 = \infty; z_P = -\frac{b^2}{12 \cdot \infty} = 0; y_0 = -\frac{h}{2}; y_P = -\frac{h^2 \cdot 2}{12(-h)} = \frac{h}{6}.$$

Форма ядра сечения для прямоугольника получилась в виде ромба, диагонали которого равны $b/3, h/3$.

В поперечном сечении в виде круга все центральные оси являются главными. Поэтому при построении ядра сечения круга достаточно провести одну касательную (рис. 2.13). При этом $z_0 = R, y_0 = \infty$:

$$i_z^2 = i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{\pi R^4}{4 \cdot \pi R^2} = \frac{R^2}{4},$$

получим

$$z_P = -\frac{R^2}{4 \cdot R} = -\frac{R}{4}, y_P = 0.$$

Таким образом, ядро сечения для круга представляет собой круг с радиусом $\frac{R}{4}$.

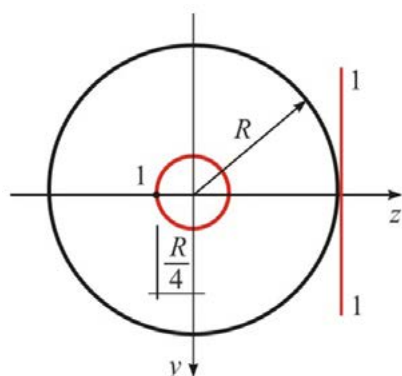


Рис. 2.13. Построение ядра сечения в круге

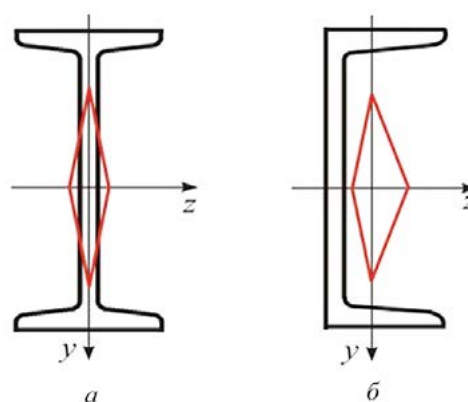


Рис. 2.14. Ядро сечения в двутавре (а) и в швеллере (б)

Ядра сечений для двутавра и швеллера показаны на рис. 2.14. Касательные к контуру огибают каждое из сечений, нигде не пересекая его, так же как и для прямоугольного сечения. Ядро сечения двутавра имеет форму ромба вследствие того, что данное сечение имеет две оси симметрии. Швеллер — сечение, не симметричное относительно оси Oy , поэтому формой ядра сечения является четырехугольник.

Таким образом, зная контур ядра сечения, можно утверждать, что для сил, расположенных внутри этого контура, нулевые линии проходят вне сечения, и эпюра нормальных напряжений имеет один знак.

В случае сил, приложенных на контуре ядра сечения, нулевые линии касаются к контуру сечения, и эпюра нормальных напряжений имеет форму треугольника одного знака.

При приложении нагрузки вне ядра сечения нулевая линия пересекает сечение стержня, при этом в нем возникают растягивающие и сжимающие напряжения, т.е. в сечении возникают нормальные напряжения двух знаков.

И, наоборот, по форме эпюры нормальных напряжений можно сделать вывод, в какой области сечения приложена сила.

Значение наибольшего нормального напряжения позволяет составить условие прочности, которое для материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, имеет вид

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) \leq \gamma_C R. \quad (2.21)$$

Если материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, должны выполняться два условия прочности:

$$\sigma_P^{\text{нб}} = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) \leq \gamma_C R_P,$$

$$|\sigma_C^{\text{нб}}| = \left| -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2} \right) \right| \leq \gamma_C R_C,$$

где R_P и R_C — расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии; z_A, y_A и z_B, y_B — координаты наиболее напряженных точек сечения.

2.1. ПЛОСКИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КОСОЙ ИЗГИБ

Тест 2.1. Нулевая линия при косом изгибе стержня обладает следующими свойствами:

- ☐ 1) является параболической линией;
- ☐ 2) в каждой точке этой линии нормальные напряжения равны нулю;
- ☐ 3) совпадает с одной из главных осей поперечного сечения;
- ☐ 4) проходит через центр тяжести сечения;
- ☐ 5) в каждой точке этой линии касательные напряжения равны нулю.

Комментарий. Уравнение нулевой линии при косом изгибе выводят из условия, что нормальные напряжения равны нулю. Оно описывает прямую, проходящую через центр тяжести поперечного сечения стержня:

$$\frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0,$$

где z_0, y_0 — координаты текущей точки нулевой линии. Это уравнение приводят к виду

$$|\operatorname{tg} \alpha_0| = \left| -\operatorname{tg} \alpha_p \right| \frac{J_z}{J_y}.$$

Здесь угол наклона нулевой линии α_0 откладывается в ту же сторону от главной оси Oz , что и угол наклона силовой линии α_p от главной оси Oy . А так как $\alpha_0 \neq 0$ и $\alpha_0 \neq \alpha_p$, то нулевая линия не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения. Касательные напряжения абсолютно не связаны с нулевой линией.

Правильные ответы: 2, 4.

Тест 2.2. Действующие на стержень нагрузки вызывают плоский косой изгиб при условии, что:

- ☐ 1) они перпендикулярны к оси стержня;
- ☐ 2) их можно разложить на осевые, поперечные и скручивающие составляющие;
- ☐ 3) они действуют в плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции стержня;
- ☐ 4) они действуют в нескольких плоскостях;
- ☐ 5) они действуют в поперечном и продольном направлениях.

Комментарий. Плоский косой изгиб возникает, если все внешние нагрузки лежат в одной плоскости и перпендикулярны к оси стержня Ox (рис. 2.15). При этом плоскость действия нагрузок (силовая плоскость) не совпадает ни с одной из главных центральных осей (Oz, Oy) поперечного сечения стержня. Осевые и скручивающие составляющие нагрузок отсутствуют.

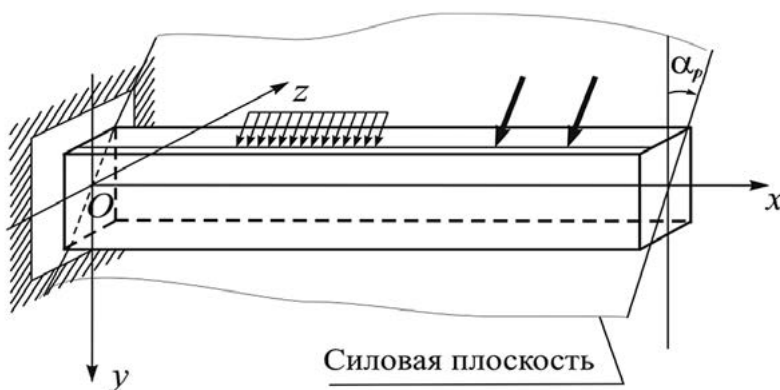


Рис. 2.15. Плоский косой изгиб

Правильные ответы: 1, 3.

Тест 2.3. Нормальные напряжения в стержне при косом изгибе можно определить с помощью следующей формулы:

- 1) $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z$;
- 2) $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z$;
- 3) $\sigma = \frac{M_z}{J_z} z + \frac{M_y}{J_y} y$;
- 4) $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y$;
- 5) $\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z$.

Комментарий. При косом изгибе действуют только поперечные нагрузки. Поэтому продольные внутренние усилия отсутствуют: $N = 0$. Следовательно, исключаются ответы 1, 2, 4. Нормальные напряжения раскладываются на сумму напряжений от изгибающих моментов, действующих в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и определяются так:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$

Правильный ответ: 5.

Тест 2.4. Стержень прямоугольного сечения находится под действием нагрузок в вертикальной Oxy и горизонтальной Oxz плоскостях (рис. 2.16). Нулевая линия в опасном сечении стержня проходит через следующие четверти координатной плоскости:

- ☐ 1) нулевая линия совпадает с осью Oy ;
- ☐ 2) четверть IV;
- ☐ 3) четверть III;
- ☐ 4) четверть II;
- ☐ 5) четверть I.

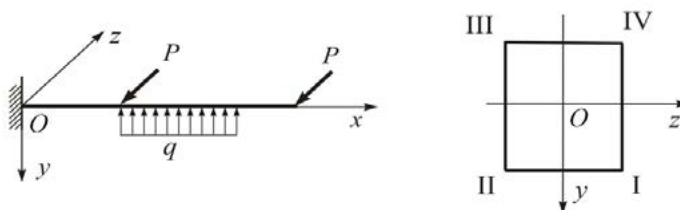


Рис. 2.16. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Опасным сечением является начало координат — сечение 0, так как там возникают наибольшие изгибающие моменты M_z (от распределенной нагрузки q) и M_y (от сосредоточенных сил P). При этом M_z растягивает нижние волокна поперечного сечения. А момент M_y растягивает правые волокна поперечного сечения при взгляде на него с положительной стороны оси Ox (рис. 2.16).

Значит, четверть I находится в зоне положительных знаков, а четверть III — в зоне отрицательных. Нулевая линия не может проходить через поля с повторяющимися знаками. Следовательно, она пересечет четверти II и IV.

Правильные ответы: 2, 4.

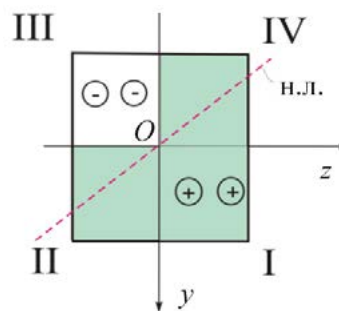


Рис. 2.17. Положение нулевой линии

Тест 2.5. Балка прямоугольного сечения находится под действием нагрузок в вертикальной Oxy и горизонтальной Oxz плоскостях (рис. 2.18). Нулевая линия в опасном сечении стержня проходит через следующие четверти координатной плоскости:

- ☐ 1) четверть I;
- ☐ 2) четверть II;
- ☐ 3) четверть III;
- ☐ 4) четверть IV;
- ☐ 5) нулевая линия совпадает с осью Oz .

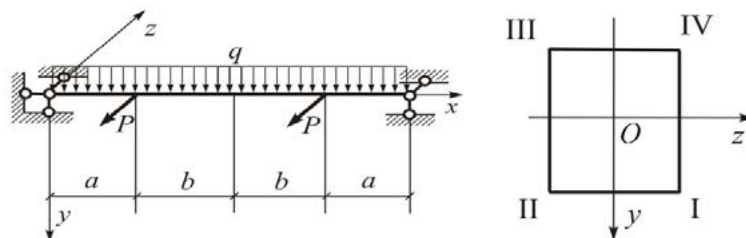


Рис. 2.18. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Опасное сечение расположено в середине балки, так как там возникают наибольшие изгибающие моменты M_z (от распределенной нагрузки q) и M_y (от сосредоточенных сил P). При этом M_z растягивает нижние волокна, а M_y — левые волокна поперечного сечения при взгляде на него с положительной стороны оси Ox (рис. 2.19). Значит, четверть II находится в зоне положительных знаков, а четверть IV — в зоне отрицательных. Нулевая линия не может проходить через поля с повторяющимися знаками. Следовательно, она пересечет I и III четверти.

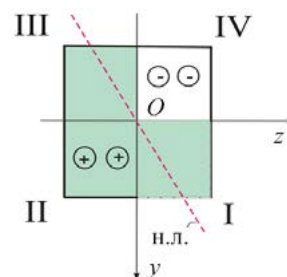


Рис. 2.19. Положение нулевой линии

Правильные ответы: 1, 3.

Тест 2.6. Балка прямоугольного сечения (рис. 2.20) находится в условиях пространственного косого изгиба. Наибольшее напряжение $\sigma_{нб}$ в опасном сечении равно, МПа:

- ☐ 1) $\sigma_{нб} = 4,3$;
- ☐ 2) $\sigma_{нб} = 9,2$;
- ☐ 3) $\sigma_{нб} = 4,6$;
- ☐ 4) $\sigma_{нб} = 10,4$;
- ☐ 5) $\sigma_{нб} = 8,00$.

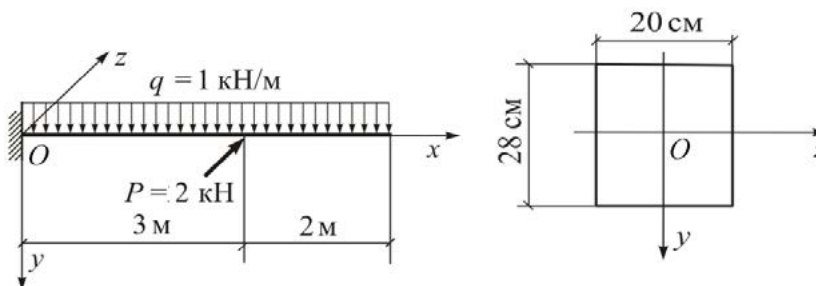


Рис. 2.20. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Строим эпюры моментов M_z и M_y (рис. 2.21).

Опасным сечением является заделка, так как в ней возникают наибольшие моменты:

$$M_z^0 = 1 \cdot 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y^0 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Наибольшие напряжения равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{нб} &= \frac{M_z^0}{W_z} + \frac{M_y^0}{W_y} = \frac{12,5 \cdot 10^2}{\frac{20 \cdot 28^2}{6}} + \frac{6 \cdot 10^2}{\frac{28 \cdot 20^2}{6}} = \\ &= 0,800 \text{ кН/см}^2 = 8,00 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 5.

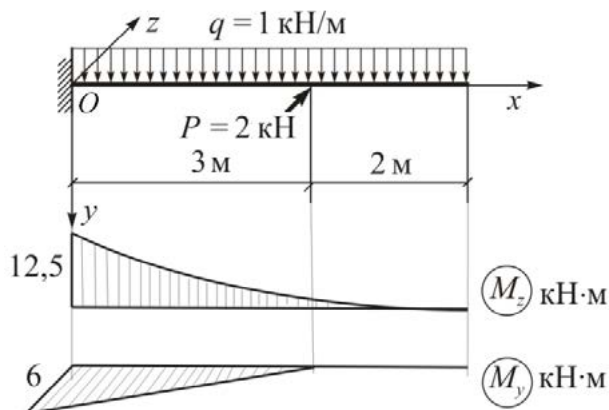


Рис. 2.21. Эпюры изгибающих моментов

Тест 2.7. Стальная двутавровая балка (I 45) находится в условиях плоского косого изгиба (рис. 2.22), $\alpha_P = 10^\circ$. Моменты инерции сечения равны: $J_z = 1231 \text{ см}^4$; $J_y = 101 \text{ см}^4$. Наибольшее напряжение $\sigma_{\text{нб}}$ в опасном сечении равно, МПа:

- 1) $\sigma_{\text{нб}} = 94,5$;
- 2) $\sigma_{\text{нб}} = 151,2$;
- 3) $\sigma_{\text{нб}} = 115,7$;
- 4) $\sigma_{\text{нб}} = 76,1$;
- 5) $\sigma_{\text{нб}} = 200,6$.

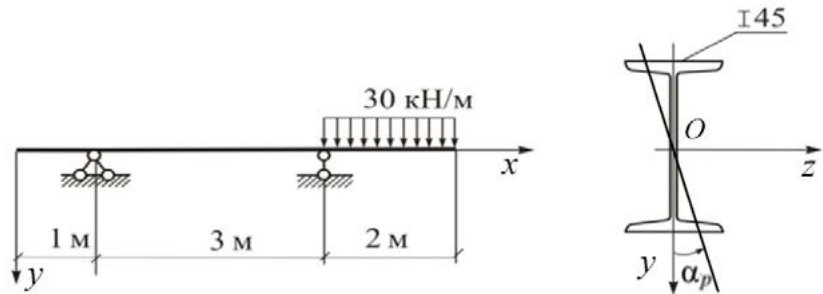


Рис. 2.22. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Из эпюры суммарных изгибающих моментов M видно, что сечение B — опасное (рис. 2.23).

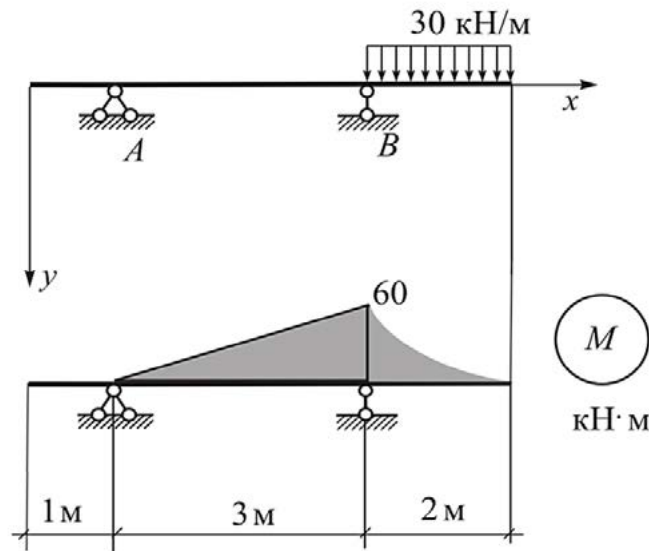


Рис. 2.23. Эпюра изгибающих моментов

Наибольший суммарный изгибающий момент в сечении B : $M = 30 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$.
Составляющие суммарного момента:

$$M_z = 60 \cos 10^\circ = 59,09 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = 60 \sin 10^\circ = 10,42 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Наибольшие напряжения равны:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{59,09 \cdot 10^2}{1231} + \frac{10,42 \cdot 10^2}{101} = 15,12 \text{ кН/см}^2 = 151,2 \text{ МПа}.$$

Правильный ответ: 2.

Тест 2.8. Балка прямоугольного сечения (рис. 2.24) находится в условиях пространственного косого изгиба. Угол наклона $|\alpha_0|$ нулевой линии в опасном сечении балки равен:

- 1) $|\alpha_0| = 64,2^\circ$;
- 2) $|\alpha_0| = 43,7^\circ$;
- 3) $|\alpha_0| = 70,3^\circ$;
- 4) $|\alpha_0| = 31,5^\circ$;
- 5) $|\alpha_0| = 85,6^\circ$.

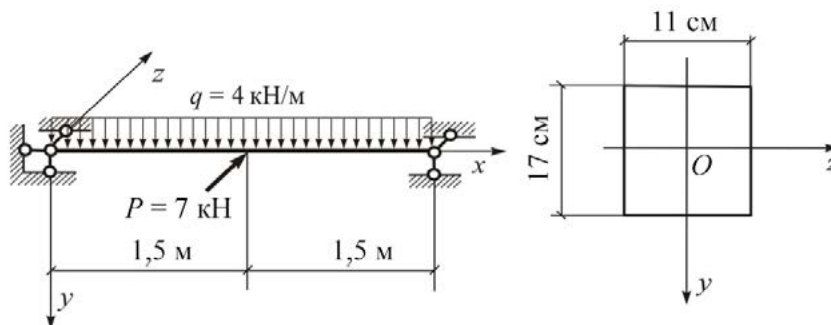


Рис. 2.24. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Моменты инерции поперечного сечения балки:

$$J_z = \frac{11 \cdot 17^3}{12} = 4503,58 \text{ см}^4; J_y = \frac{11^3 \cdot 17}{12} = 1885,58 \text{ см}^4.$$

Изгибающие моменты в опасном сечении D (рис. 2.25):

$$M_z^D = \frac{4 \cdot 3^2}{8} = 4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_y^D = 3,5 \cdot 1,5 = 5,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

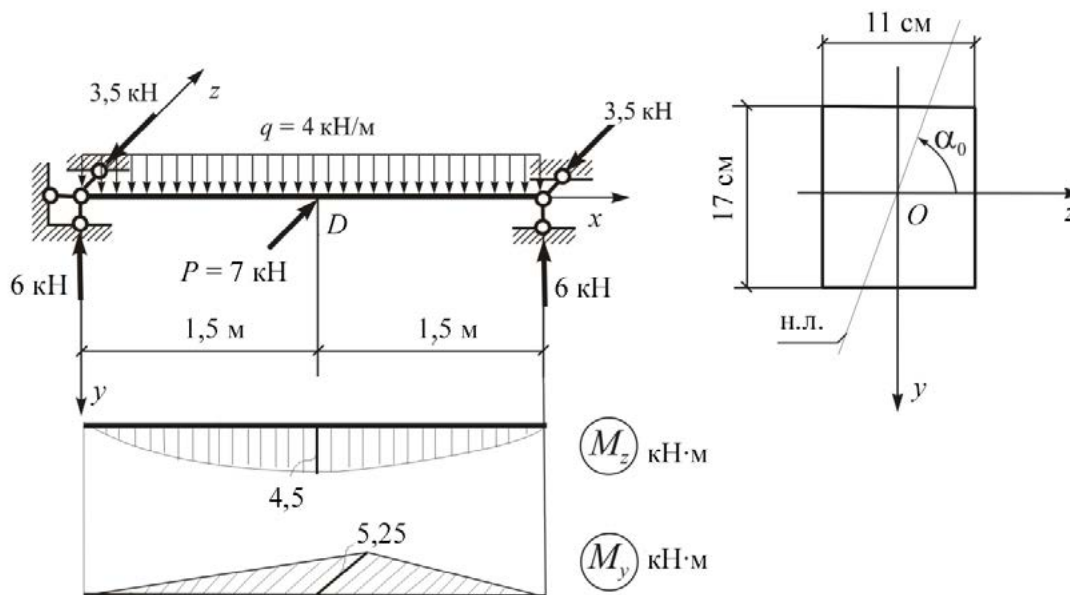


Рис. 2.25. Эпюры изгибающих моментов и положение нулевой линии

Тангенс угла наклона $|\alpha_0|$ нулевой линии в опасном сечении балки равен:

$$|\operatorname{tg} \alpha_0| = |-\operatorname{tg} \alpha_P| \frac{J_z}{J_y} = \left| -\frac{M_y^D}{M_z^D} \right| \frac{J_z}{J_y} = \frac{5,25}{4,5} \frac{4503,58}{1885,58} = 2,79.$$

Угол наклона нулевой линии к оси Oz : $|\alpha_0| = \operatorname{arctg} 2,79 = 70,3^\circ$.

Правильный ответ: 3.

Тест 2.9. Деревянная балка прямоугольного сечения находится под действием нагрузок в вертикальной Oxy и горизонтальной Oxz плоскостях (рис. 2.26). Заданная нагрузка является расчетной. $R = 13$ МПа, $\gamma_C = 1$, $h/b = 1,5$. Размер h прямоугольного поперечного сечения равен, см:

- 1) 27,5;
- 2) 14,2;
- 3) 19,1;
- 4) 24,0;
- 5) 10,5.

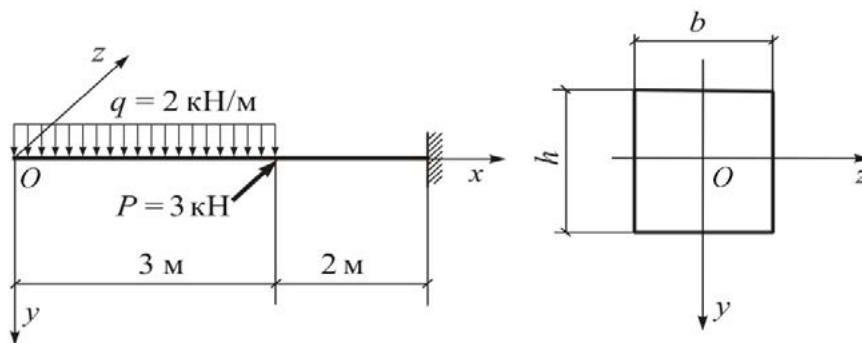


Рис. 2.26. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Очевидно, что опасное сечение находится в заделке. Там возникают наибольшие моменты:

- в вертикальной плоскости — $M_z = 2 \cdot 3 \cdot 3,5 = 21$ кН·м;
- в горизонтальной — $M_y = 3 \cdot 2 = 6$ кН·м.

Получим формулу для h из условия прочности. Для этого введем обозначение

$$k = \frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2}{6} \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b}.$$

Тогда

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{k} \frac{h^2}{6} = \frac{h^3}{6k}.$$

Из условия прочности для косого изгиба имеем

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R\gamma_C \text{ или } \sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{\frac{W_z}{k}} \leq R\gamma_C.$$

Следовательно, требуемый момент сопротивления определится так:

$$W_z \geq \frac{kM_y + M_z}{R\gamma_C}.$$

Подставив полученное выше выражение для W_z , получим неравенство

$$\frac{h^3}{6k} \geq \frac{kM_y + M_z}{R\gamma_C}.$$

Откуда высоту h прямоугольного сечения вычисляем по формуле

$$h \geq \sqrt[3]{6k \frac{kM_y + M_z}{R\gamma_C}} = \sqrt[3]{6 \cdot 1,5 \frac{(1,5 \cdot 6 + 21)10^2}{1,3 \cdot 1}} = 27,49 \text{ см} \approx 27,5 \text{ см}.$$

Правильный ответ: 1.

Тест 2.10. Деревянная балка прямоугольного сечения находится в условиях плоского косо-го изгиба (рис. 2.27), $\alpha_P = 10^\circ$, $R = 14$ МПа, $\gamma_C = 1$, $h/b = 1,7$. Размер h прямоугольного поперечного сечения равен, см:

- 1) 28,4;
- 2) 15,3;
- 3) 11,7;
- 4) 23,8;
- 5) 17,1.

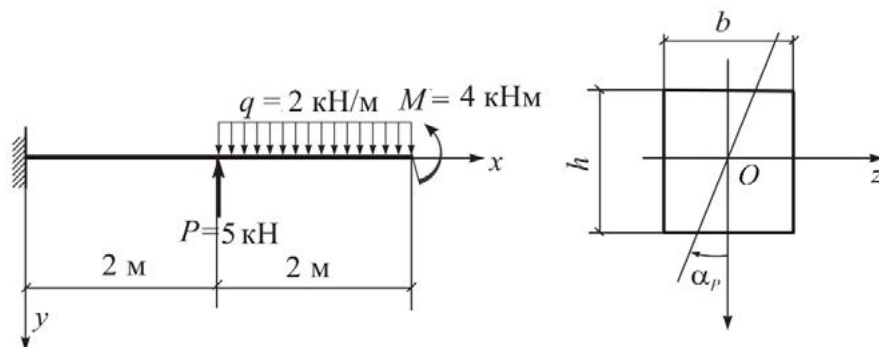


Рис. 2.27. Схема балки и ее поперечное сечение

Комментарий. Эпюра суммарных изгибающих моментов M (рис. 2.28) показывает, что опасным является сечение A .

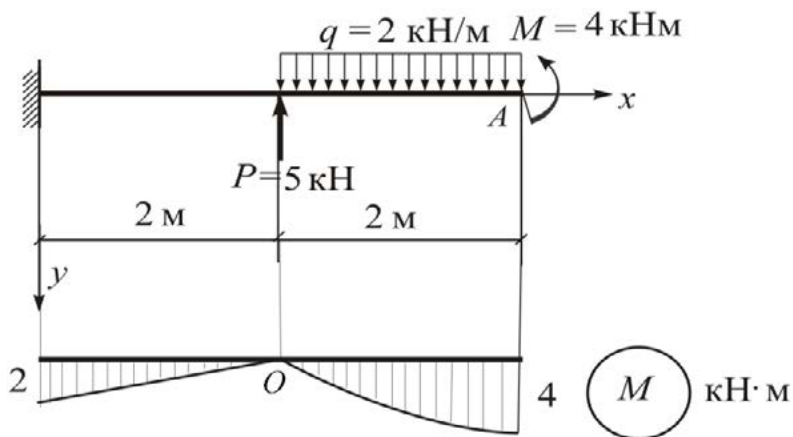


Рис. 2.28. Эпюра изгибающих моментов

Наибольший суммарный изгибающий момент: $M_{\text{нб}} = 4$ кН·м

Составляющие суммарного момента:

$$M_z = 4 \cos 30^\circ = 3,46 \text{ кН·м};$$

$$M_y = 4 \sin 30^\circ = 2 \text{ кН·м}.$$

Высоту h прямоугольного сечения определяют из полученной выше формулы:

$$h \geq \sqrt[3]{6k \frac{kM_y + M_z}{R\gamma_C}} = \sqrt[3]{6 \cdot 1,7 \frac{(1,7 \cdot 2 + 3,46)10^2}{1,4 \cdot 1}} = 17,1 \text{ см}.$$

Правильный ответ: 5.

2.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Тест 2.11. Случай сложного сопротивления представляет приложение нагрузки:

- ☐ 1) вдоль оси стержня;
- ☐ 2) перпендикулярно оси стержня в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей сечения;
- ☐ 3) перпендикулярно оси стержня в одной из главных плоскостей сечения;
- ☐ 4) в произвольной точке поперечного сечения, параллельно оси стержня;
- ☐ 5) в виде момента, приложенного в плоскости поперечного сечения.

Комментарий. Известно, что нагрузка, приложенная вдоль оси стержня, вызывает центральное растяжение или сжатие стержня.

При приложении силы перпендикулярно оси стержня в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей сечения, имеем случай плоского косоугольного изгиба. Нагрузка, приложенная перпендикулярно оси стержня в одной из главных плоскостей сечения, представляет случай плоского прямого изгиба.

При действии силы в произвольной точке поперечного сечения стержня, параллельно его оси, получаем внецентренное сжатие или растяжение стержня.

Момент, действующий в плоскости поперечного сечения, вызывает кручение стержня.

Плоский косоугольный изгиб и внецентренное сжатие или растяжение стержня представляют случаи сложного сопротивления.

Правильные ответы: 2, 4.

Тест 2.12. Нормальное напряжение в произвольном сечении стержня при внецентренном сжатии (рис. 2.29) определяют по формуле:

- ☐ 1) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{h}{2h^2} y \right);$
- ☐ 2) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{b}{2b^2} z \right);$
- ☐ 3) $\sigma = -\frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b}{2b^2} z \right);$
- ☐ 4) $\sigma = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{h}{2h^2} y \right);$
- ☐ 5) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b}{2b^2} z \right).$

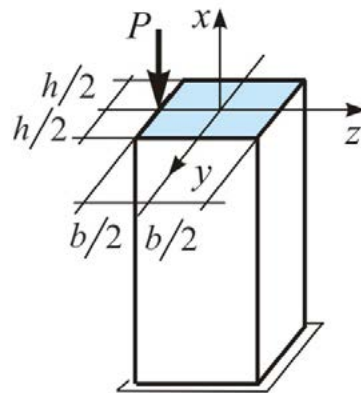


Рис. 2.29. Схема стержня

Комментарий. При внецентренном сжатии стержня в общей формуле нормальных напряжений в начале выражения ставится знак «минус». В скобках перед слагаемыми всегда стоят знаки «плюс» при действии растягивающей или сжимающей силы, это следует из вывода формулы

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_z^2} \right).$$

Для заданного прямоугольного сечения имеем плоский случай внецентренного сжатия:

$$z_P = -\frac{b}{2}, y_P = 0, i_y^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Получим следующую формулу для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения:

$$\sigma = -\frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b}{2b^2} z \right).$$

Правильный ответ: 3.

Тест 2.13. Нормальное напряжение в точке D при действии силы $P = 100$ кН (рис. 2.30) равно, МПа:

- 1) 4,48;
- 2) -1,59;
- 3) 0,96;
- 4) -2,24;
- 5) -1,12.

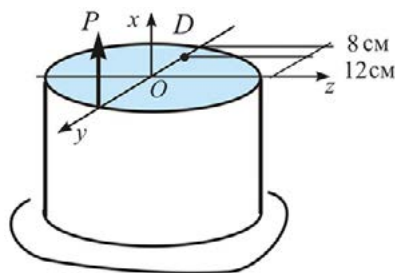


Рис. 2.30. Схема стержня

Комментарий. Из общей формулы нормальных напряжений для плоского случая внецентренного растяжения стержня

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z}{i_z^2} + \frac{y_P y}{i_y^2} \right)$$

получим следующие выражения для σ_D :

$$z_P = 0, y_P = 20 \text{ см}, \sigma_D = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_P y_D}{i_z^2} \right),$$

$$z_D = 0, y_D = -12 \text{ см}.$$

Значения площади поперечного сечения и квадрата радиуса инерции относительно оси Oz равны:

$$A = \pi R^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 1256 \text{ см}^2,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2} = \frac{R^2}{4} = \frac{20^2}{4} = 100 \text{ см}^2.$$

Нормальное напряжение в точке D :

$$\sigma_D = \frac{100}{1256} \left(1 + \frac{20(-12)}{100} \right) = -0,112 \text{ кН/см}^2 = -1,12 \text{ МПа}.$$

Правильный ответ: 5.

Тест 2.14. Определите положение нулевой линии для заданной точки приложения силы (рис. 2.31), радиус круга 20 см:

- 1) $z_0 = 0, y_0 = 0$;
- 2) $z_0 = -5 \text{ см}, y_0 = \infty$;
- 3) $z_0 = -20, y_0 = 0$;
- 4) $z_0 = \infty, y_0 = -20$;
- 5) $z_0 = 5 \text{ см}, y_0 = 0$.

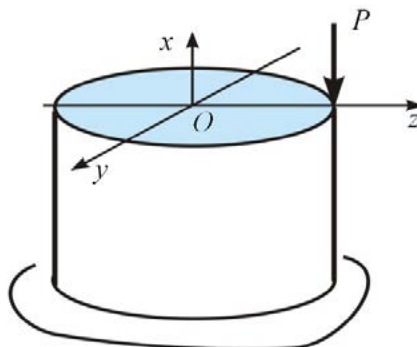


Рис. 2.31. Схема стержня

Комментарий. Координаты точки приложения силы P имеют значения:

$$z_P = 20 \text{ см}, y_P = 0 \text{ (рис. 2.32)}.$$

Положение нулевой линии определяют по формулам:

$$z_0 = \frac{i_y^2}{z_P}, y_0 = \frac{i_z^2}{y_P}.$$

Квадраты радиусов инерции сечения относительно осей Oz , Oy в круглом сечении одинаковы:

$$i_z^2 = i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2} = \frac{R^2}{4} = \frac{20^2}{4} = 100 \text{ см}^2.$$

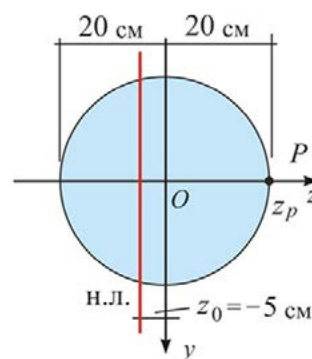


Рис. 2.32. Положение нулевой линии

В результате получается, что нулевая линия для силы P , приложенной на главной оси Oz , проходит параллельно другой главной центральной оси Oy с противоположной стороны от центра тяжести сечения:

$$z_0 = -\frac{R^2}{4R} = -\frac{R}{4} = -\frac{20}{4} = -5 \text{ см}, y_0 = -\frac{100}{0} = \infty.$$

Правильный ответ: 2.

Тест 2.15. Координаты точки приложения силы для заданной нулевой линии (рис. 2.33) имеют следующие значения, см:

- 1) $z_P = 0, y_P = 0$;
- 2) $z_P = -20, y_P = 20$;
- 3) $z_P = -7,91, y_P = 0$;
- 4) $z_P = -15, y_P = 8,15$;
- 5) $z_P = 0, y_P = -8,14$.

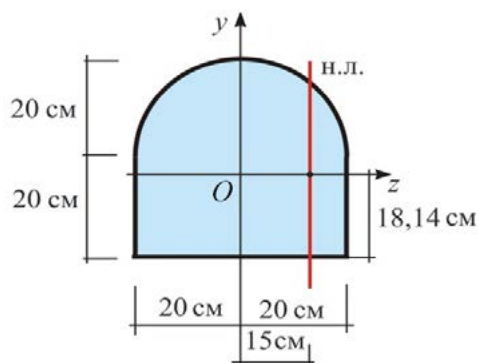


Рис. 2.33. Схема сечения

Комментарий. Положение нулевой линии определяют по значениям координат точек пересечения нулевой линии с осями координат $z_0 = 15 \text{ см}, y_0 = \infty$. Соответствующая этой нулевой линии точка приложения силы располагается на оси Oz (рис. 2.34).

Координаты точки приложения силы определяют по формулам:

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}, y_P = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0.$$

Для определения квадрата радиуса инерции относительно оси Oy заданное сечение разделим на две фигуры. Центры тяжести прямоугольника и полукруга расположены на оси Oy :

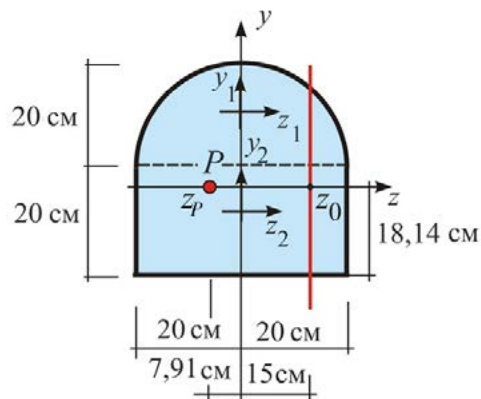


Рис. 2.34. Положение нулевой линии

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{J_{y1} + J_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{\pi R^4}{8} + \frac{hb^3}{12}}{\frac{\pi R^2}{2} + hb} = \frac{\frac{3,14 \cdot 20^4}{8} + \frac{40 \cdot 20^3}{12}}{\frac{3,14 \cdot 20^2}{2} + 40 \cdot 20} = 118,67 \text{ см}^2,$$

$$z_P = -\frac{118,67}{15} = -7,91 \text{ см.}$$

Правильный ответ: 3.

Тест 2.16. Укажите соответствие нулевой линии и точки приложения силы, расположенной на контуре ядра сечения (рис. 2.35):

- ☐ 1) нулевой линии I–I соответствует точка приложения силы 6;
- ☐ 2) нулевой линии II–II соответствует точка приложения силы 2;
- ☐ 3) нулевой линии II–II соответствует точка приложения силы 7;
- ☐ 4) нулевой линии III–III соответствует точка приложения силы 4;
- ☐ 5) нулевой линии III–III соответствует точка приложения силы 5.

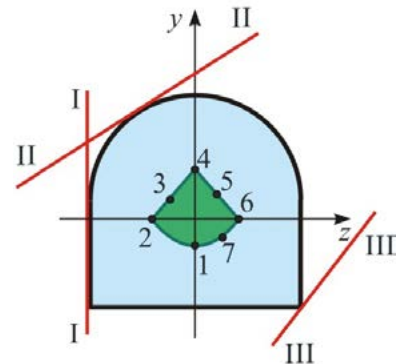


Рис. 2.35. Схема сечения

Комментарий. В рассуждениях о положении нулевой линии и соответствующей ей точки приложения силы используем соотношения

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}, y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}.$$

Отмечаем значения и знаки z_0, y_0 каждой линии и соответствующие значения и знаки z_P, y_P (рис. 2.36).

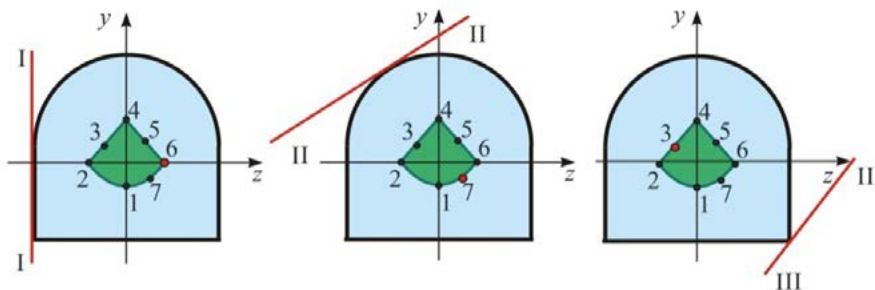


Рис. 2.36. Соответствие нулевой линии и точки приложения силы

Нулевой линии I–I, параллельной оси Oy , соответствует точка приложения силы 6, расположенная на оси Oz с противоположной стороны от центра тяжести. Линия II–II касается окружности, соответствующая ей точка приложения силы 7 расположена на криволинейной границе ядра сечения, так как точкам 2–1–6 соответствуют касательные к окружности. Линия III–III касается сечения в угловой точке, соответствующая ей точка приложения силы 3 лежит на прямой 2–4.

Правильные ответы: 1, 3.

Тест 2.17. Ядро сечения для двух поперечных сечений, представленных на рис. 2.37, имеет вид:

- ☐ 1) 1;
- ☐ 2) 2;
- ☐ 3) 3;
- ☐ 4) 4;
- ☐ 5) 5.

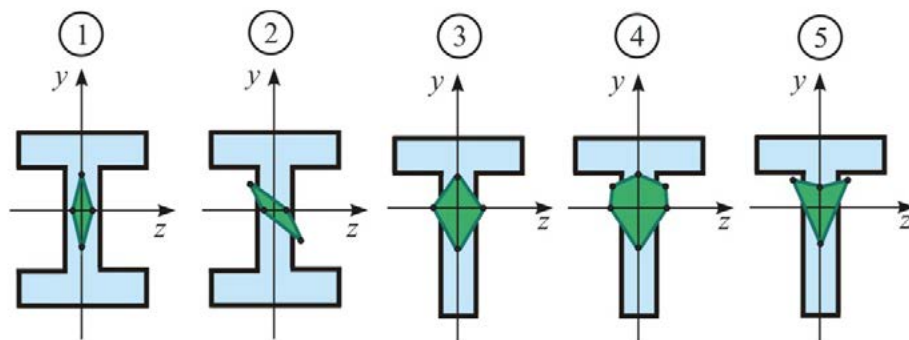


Рис. 2.37. Схемы сечений

Комментарий. При построении ядра сечения последовательно проводят нулевые линии по касательной к контуру сечения. По соотношениям

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}, y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}$$

определяют соответствующие им координаты точек приложения сил z_P, y_P .

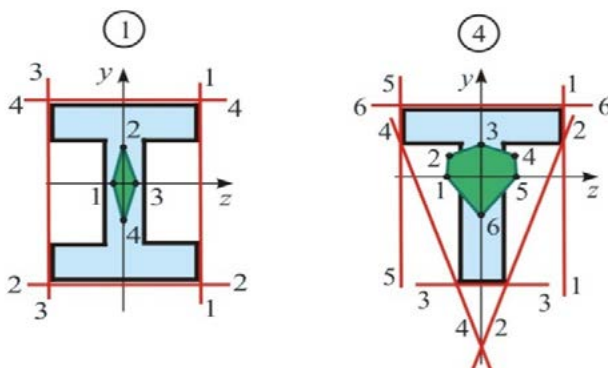


Рис. 2.38. Правильные ядра сечения

Плавный переход от одной касательной к другой позволяет определить геометрическое место точек приложения сил, при действии которых во всех волокнах стержня нормальные напряжения имеют один знак.

Для сечения в форме двутавра ядро сечения представляет ромб (фигура 1 на рис. 2.38). Для сечения в форме тавра ядро сечения представляет сложную фигуру, которая имеет выпуклую форму (фигура 4) при любой форме поперечного сечения. Нулевые линии и соответствующие им точки приложения сил обозначены одинаковыми цифрами.

Правильные ответы: 1, 4.

Раздел 3

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

КЛЮЧЕВЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

При изучении равновесия идеально прямого гибкого стержня из упругого материала, находящегося под действием центрально приложенной к верхнему сечению сжимающей силы P (рис. 3.1), возможны следующие три случая:

1) сжимающая продольная сила P относительно невелика. Если стержень с помощью какой-либо поперечной нагрузки слегка отклонить, а затем эту нагрузку снять, то стержень вновь примет первоначальную прямолинейную форму равновесия (рис. 3.1, а). В этом случае ($P < P_{кр}$) прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой;

2) при достижении силой P критического значения $P = P_{кр}$ теоретически возможны как прямолинейная, так и искривленная формы равновесия (рис. 3.1, б). Однако прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой;

3) при дальнейшем, даже незначительном увеличении сжимающей силы ($P > P_{кр}$) происходит резкое нарастание прогибов и возникают значительные дополнительные деформации и напряжения изгиба. Такое явление называется *потерей устойчивости* (рис. 3.1, в).

Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных условиях закрепления концов стержня определяют по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (3.1)$$

где l_0 — приведенная длина стержня, $l_0 = \mu l$; μ — коэффициент приведения длины, который зависит от вида опорных закреплений сжатого стержня.

Выражения для критических сил и значений коэффициента приведения длины для основных случаев опорных условий закрепления приведены на рис. 3.2. В зависимости от условий закрепления стержня потеря устойчивости может происходить в одной из двух главных плоскостей инерции Oxy или Oxz .

Критические силы, соответствующие потере устойчивости сжатого стержня в главных плоскостях инерции, определяют по формулам:

$$P_{кр}^{(y)} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2}, \quad P_{кр}^{(z)} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_z l)^2}. \quad (3.2)$$

Критические напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (3.3)$$

где λ — гибкость стержня, $\lambda = l_0/i$; i — радиус инерции поперечного сечения.

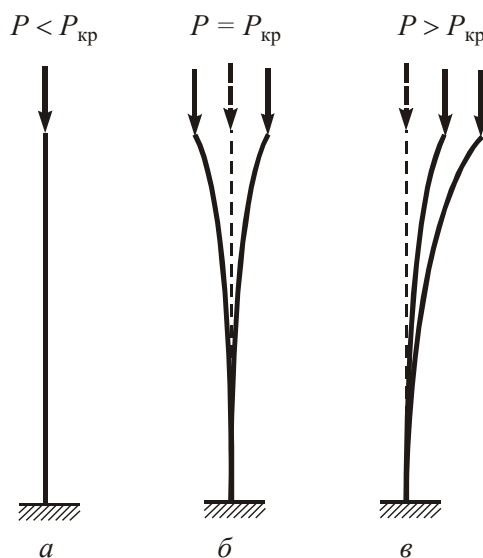


Рис. 3.1. Понятие о критической силе

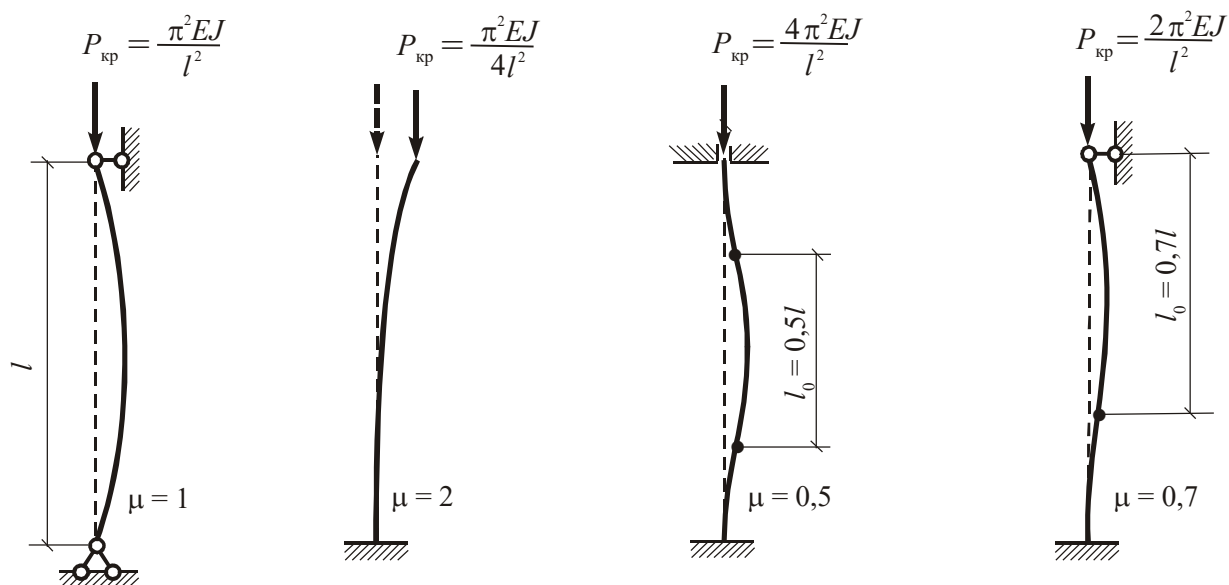


Рис. 3.2. Значения критических сил и коэффициентов приведения длины при различных условиях закрепления сжатого стержня

Формулы Эйлера для критической силы и критических напряжений для стержней из малоуглеродистой стали с пределом пропорциональности

$$\sigma_{\text{пц}} = 200 \div 220 \text{ МПа}$$

можно использовать только в пределах упругости при гибкости стержня $\lambda \geq 100$.

При работе стержня за пределом упругости и значениях гибкости $60 \leq \lambda < 100$ следует использовать:

– эмпирическую формулу Тетмайера – Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (3.4)$$

где для указанной стали $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$

– или квадратичную зависимость

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}} - (\sigma_{\text{т}} - \sigma_{\text{пц}}) \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad (3.5)$$

где $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести; $\sigma_{\text{пц}}$ — предел пропорциональности стали.

При гибкости $\lambda < 60$ можно принять $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}}$.

Условие устойчивости сжатого гибкого стержня записывают в виде

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi \gamma_c R, \quad (3.6)$$

где φ — коэффициент продольного изгиба ($0 < \varphi < 1$), величину которого определяют в зависимости от материала и гибкости λ стержня.

Коэффициент запаса устойчивости стержня можно определить как отношение критической силы $P_{\text{кр}}$ к заданному нормативному значению $P_{\text{н}}$ продольной сжимающей силы:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P_{\text{н}}}. \quad (3.7)$$

Продольно-поперечным называется изгиб достаточно гибкого стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок (рис. 3.3).

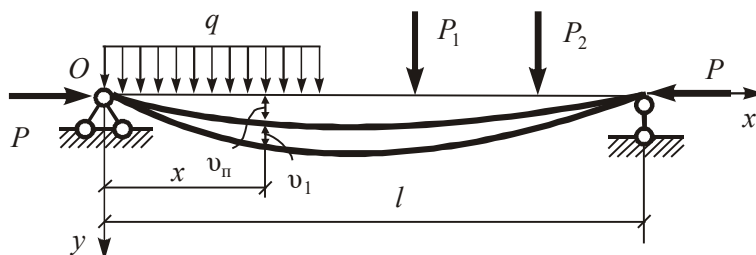


Рис. 3.3. Продольно-поперечный изгиб

Уравнение изогнутой оси в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = -\frac{M_{\text{п}}}{EJ}, \quad (3.8)$$

где v — суммарный прогиб стержня, $v = v_{\text{п}} + v_P$ ($v_{\text{п}}$ — прогиб от поперечной нагрузки; v_P — дополнительный прогиб от действия сжимающей силы P); $k^2 = P/EJ$; $M_{\text{п}}$ — изгибающий момент от действия поперечной нагрузки.

Приближенное решение уравнения (3.8) можно представить в виде

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_{\text{с}}}}. \quad (3.9)$$

где $P_{\text{с}}$ — критическая сила в плоскости изгиба, вычисляемая по формуле Эйлера независимо от величины гибкости стержня.

Суммарный изгибающий момент от совместного действия продольной силы P и поперечной нагрузки определяют по формуле

$$M = M_{\text{п}} + Pv. \quad (3.10)$$

Проверка прочности стержня при продольно-поперечном изгибе может быть сведена к требованию, чтобы наибольшие сжимающие напряжения в опасном сечении от действия нормативных нагрузок, умноженных на заданную величину коэффициента запаса по нагрузкам n_P , не превышали опасного напряжения, равного для пластичного материала пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{т}}. \quad (3.11)$$

3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Тест 3.1. При сжатии гибкого стержня критической называется:

- 1) сила, вызывающая пластические деформации в стержне;
- 2) сила, при которой в стержне возникают предельные деформации;
- 3) сила, при которой в сжатом стержне возникают деформации изгиба;
- 4) наименьшая сжимающая сила, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной искривленная форма равновесия;
- 5) сила, при которой сжатый стержень разрушается.

Комментарий. При достижении силой P критического значения $P = P_{\text{кр}}$ теоретически возможны как прямолинейная, так и искривленная формы равновесия (см. рис. 3.1, б). Однако прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Правильный ответ: 4.

Тест 3.2. Определение значения критической силы для стержня, одинаково закрепленного в главных плоскостях инерции, связано с вычислением:

- 1) наименьшего значения радиуса инерции поперечного сечения;
- 2) наименьшего значения момента сопротивления сечения;
- 3) наибольшего значения радиуса инерции поперечного сечения;
- 4) наибольшего значения момента сопротивления сечения;
- 5) наибольшего значения момента инерции сечения.

Комментарий. Критические напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J}{l_0^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2},$$

где i — радиус инерции поперечного сечения.

Отсюда следует, что значение критической силы зависит от радиуса инерции сечения и принимает наименьшее значение при наименьшем значении радиуса инерции поперечного сечения.

Правильный ответ: 1.

Тест 3.3. Определение значения критической силы для стержня, имеющего различные условия закрепления в главных плоскостях инерции, связано с вычислением:

- 1) наибольшего значения прогиба от действия продольной нагрузки;
- 2) наименьшего значения гибкости;
- 3) наибольшего значения гибкости;
- 4) наибольшей величины изгибающего момента от действия продольной нагрузки;
- 5) наименьшего значения момента сопротивления сечения.

Комментарий. Критические напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где λ — гибкость стержня.

Отсюда следует, что значение критической силы зависит от гибкости стержня и принимает наименьшее значение при наибольшем значении гибкости.

Правильный ответ: 3.

Тест 3.4. Критическая сила Эйлера для сжатого гибкого стержня, шарнирно опертого по концам, равна:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 2) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l}$;
- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{i^2}$;
- 4) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EF}{l^2}$;
- 5) $P_{кр} = \frac{\pi EJ}{l^2}$.

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных условиях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1).

В случае шарнирного закрепления $\mu = 1$.

Правильный ответ: 1.

Тест 3.5. Формула Эйлера для критических напряжений $\sigma_{кр}$ применима при следующих значениях гибкости стержня λ :

- 1) $\lambda \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$;
- 2) $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{кр}}}$;
- 3) $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{в}}}$;
- 4) $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$;
- 5) $\lambda \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{в}}}$.

Комментарий. Формула Эйлера была выведена в предположении, что материал следует закону Гука, т.е. критические напряжения не должны превышать предел пропорциональности $\sigma_{пц}$. Критические напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

следовательно, должны выполняться неравенства:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}, \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}} \leq \lambda^2 \text{ и } \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}.$$

Правильный ответ: 4.

Тест 3.6. Для гибкого стержня центрально сжатого силой P (рис. 3.4) укажите правильную формулу для определения критической силы:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 2) $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$;
- 4) $P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 5) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}$.

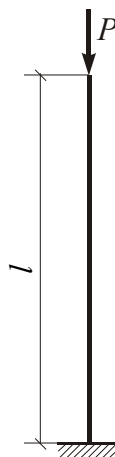


Рис. 3.4. Схема гибкого стержня

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных условиях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1).

В случае консольного стержня $\mu = 2$.

Правильный ответ: 3.

Тест 3.7. Для гибкого стержня центрально сжатого силой P (рис. 3.5) укажите правильную формулу для определения критической силы:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 2) $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$;
- 4) $P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 5) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}$.

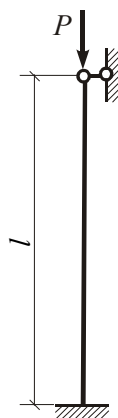


Рис. 3.5. Схема гибкого стержня

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных условиях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1).

В данном случае $\mu = 0,7$.

Правильный ответ: 4.

Тест 3.8. Стальной стержень длиной $l = 6,3$ м имеет разные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.6). Радиусы инерции поперечного сечения: $i_z = 7,8$ см, $i_y = 3,1$ см. Наибольшее значение гибкости стержня равно:

- 1) 107;
- 2) 142;
- 3) 174;
- 4) 134;
- 5) 181.

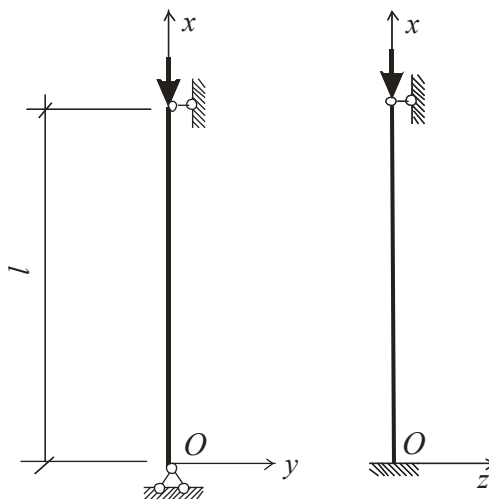


Рис. 3.6. Схема гибкого стержня

Комментарий. Гибкость стержня в плоскости Oxy равна:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{1 \cdot 630}{7,8} = 80,8 \approx 81.$$

Гибкость стержня в плоскости Oxz равна:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 630}{3,1} = 142,3 \approx 142.$$

Следовательно, наибольшее значение гибкости стержня равно: $\lambda_{нб} = \lambda_z = 142$.

Правильный ответ: 2.

Тест 3.9. Сжатый деревянный стержень прямоугольного сечения 10×20 см, длиной $l = 3,3$ м, одинаково закреплен в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.7). Модуль упругости материала стержня $E = 10^4$ МПа. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 26;
- 2) 15;
- 3) 10;
- 4) 16;
- 5) 19.

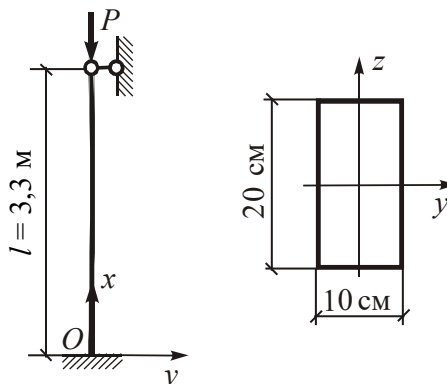


Рис. 3.7. Схема гибкого стержня и его поперечное сечение

Комментарий. Так как стержень имеет одинаковые опорные закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , то при определении $\sigma_{кр}$ необходимо использовать наименьшее значение радиуса инерции поперечного сечения:

$$i_{\text{нм}} = i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^3}{12 (10 \cdot 20)}} = 2,89 \text{ см.}$$

Наибольшая гибкость

$$\lambda = \lambda_{\text{нб}} = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 330}{2,89} = 79,93 > 70,$$

где 70 — предельная гибкость для дерева.

Критическое напряжение определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10^4}{79,93^2} = 15,43 \text{ МПа} \approx 15 \text{ МПа.}$$

Правильный ответ: 2.

Тест 3.10. Сжатый деревянный стержень круглого сечения радиусом 8 см, длиной $l = 4,8$ м имеет разные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.8). Модуль упругости материала стержня $E = 10^4$ МПа. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 5;
- 2) 6;
- 3) 7;
- 4) 8;
- 5) 9.

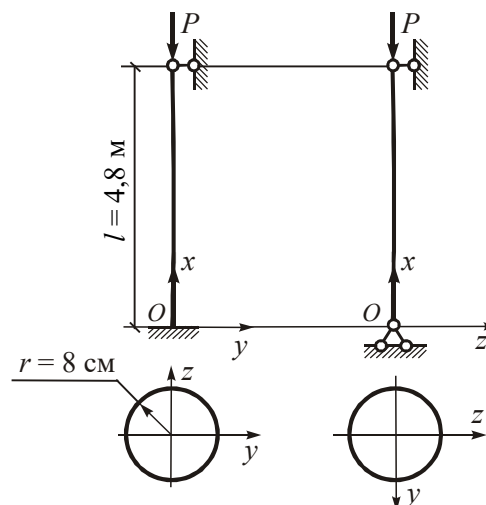


Рис. 3.8. Схема гибкого стержня и его поперечное сечение

Комментарий. Так как стержень имеет разные опорные закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , но одинаковые радиусы инерции $i = i_z = i_y$, то возможная потеря устойчивости произойдет в плоскости Oxz , где в данном случае коэффициент приведения длины является наибольшим: $\mu_z = 1$.

Итак,

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4 \pi r^2}} = \frac{r}{2} = 4 \text{ см.}$$

Наибольшая гибкость

$$\lambda = \lambda_{\text{нб}} = \frac{\mu_z l}{i} = \frac{1 \cdot 480}{4} = 120 > 70,$$

где 70 — предельная гибкость для дерева. Следовательно, критические напряжения определяются по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10^4}{120^2} = 6,85 \text{ МПа} \approx 7 \text{ МПа.}$$

Правильный ответ: 3.

Тест 3.11. Для гибкого стержня прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ (рис. 3.9) укажите верное значение отношения b/h , при котором стержень будет иметь одинаковые возможности потери устойчивости в главных плоскостях Oxy и Oxz :

- 1) $\frac{b}{h} = 0,5$;
- 2) $\frac{b}{h} = 1$;
- 3) $\frac{b}{h} = 0,45$;
- 4) $\frac{b}{h} = 0,35$;
- 5) $\frac{b}{h} = 0,33$.

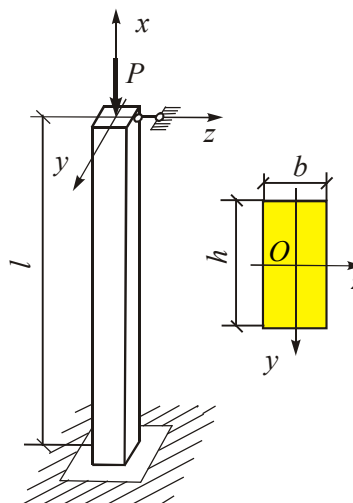


Рис. 3.9. Схема гибкого стержня и его поперечное сечение

Комментарий. Гибкости λ_y и λ_z в главных плоскостях Oxy и Oxz связаны выражением

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_z} = \frac{\mu_y}{\mu_z} \frac{b}{h},$$

где μ_y — коэффициент приведения в плоскости Oxy , $\mu_y = 2$; μ_x — коэффициент приведения в плоскости Oxz , $\mu_x = 0,7$.

Стержень будет иметь одинаковые возможности потери устойчивости в главных плоскостях Oxy и Oxz при равенстве значений гибкости в этих плоскостях: $\lambda_y = \lambda_z$. Следовательно, их отношение равно 1:

$$\frac{\mu_y}{\mu_z} \frac{b}{h} = 1, \frac{b}{h} = \frac{\mu_z}{\mu_y} = \frac{0,7}{2} = 0,35.$$

Правильный ответ: 4.

Тест 3.12. Стальная колонна с сечением, показанным на рис. 3.10, имеет различные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz . Модуль упругости материала стержня: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Площадь и осевые моменты инерции двутавра № 16: $A_1 = 20,2$ см²; $J_{z_1} = 873$ см⁴; $J_{y_1} = 58,6$ см⁴. Величина критической силы в плоскости Oxz равна, кН:

- 1) 348;
- 2) 461;
- 3) 239;
- 4) 654;
- 5) 856.

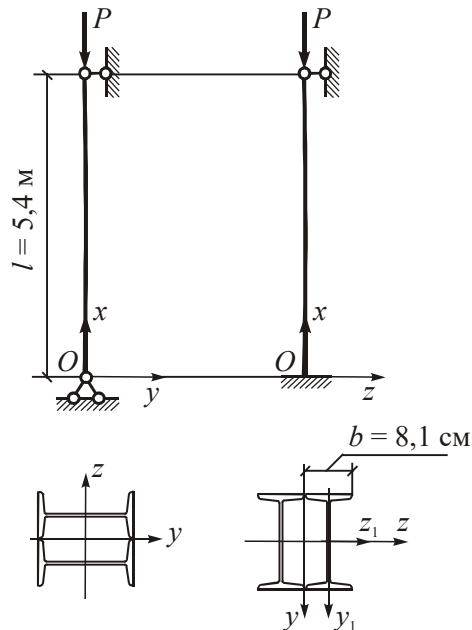


Рис. 3.10. Схема гибкого стержня и его поперечное сечение

Комментарий. Так как в задаче указана плоскость Oxz , в которой нужно искать значение критической силы, вычисляем следующие геометрические характеристики:

– момент инерции сечения $J_y = 2 \left(J_{y_1} + A_1 \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) = 779,86$ см⁴;

– радиус инерции сечения $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{2A_{y_1}}} = \sqrt{\frac{779,86}{2 \cdot 20,2}} = 4,39$ см.

Гибкость в рассматриваемой плоскости

$$\lambda = \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 540}{4,39} = 86,1 < 100,$$

где 100 — предельная гибкость для малоуглеродистой стали. Тогда критическую силу в плоскости Oxz определяют по формуле Тетмайера – Ясинского:

$$P_{кр} = (a - b\lambda) 2A_1.$$

Эмпирические коэффициенты для малоуглеродистой стали:

$$a = 310 \text{ МПа} = 31 \text{ кН/см}^2, \quad b = 1,14 \text{ МПа} = 0,114 \text{ кН/см}^2;$$

$$P_{кр} = (31 - 0,114 \cdot 86,1) 2 \cdot 20,2 = 855,86 \text{ кН} \approx 856 \text{ кН}.$$

Правильный ответ: 5.

Тест 3.13. Центально сжатый стальной стержень двутаврового сечения I 16 длиной $l = 6,0$ м одинаково закреплен в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.11). Модуль

упругости материала стержня $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Радиусы инерции сечения $i_z = 6,57$ см, $i_y = 1,7$ см. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 70;
- 2) 62;
- 3) 54;
- 4) 87;
- 5) 67.

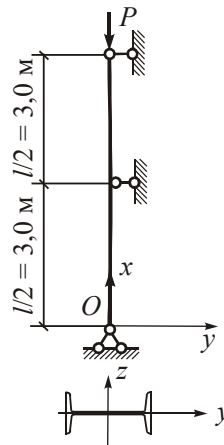


Рис. 3.11. Схема гибкого стержня и его поперечное сечение

Комментарий. Так как стержень имеет одинаковые опорные закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , то при определении $\sigma_{кр}$ необходимо использовать наименьшее значение радиуса инерции поперечного сечения.

Наибольшая гибкость

$$\lambda = \lambda_{нб} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1/2 \cdot 600}{1,7} = 176,47 > 100.$$

Критические напряжения определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{176,47^2} = 66,5 \text{ МПа} \approx 67 \text{ МПа}.$$

Правильный ответ: 5.

Тест 3.14. Центральнао сжатый стальной стержень двутаврового сечения I 16 длиной $l = 6,0$ м одинаково закреплен в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.12). Модуль упругости материала стержня $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Радиусы инерции сечения $i_z = 6,57$ см, $i_y = 1,7$ см. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 150;
- 2) 121;
- 3) 140;
- 4) 175;
- 5) 169.

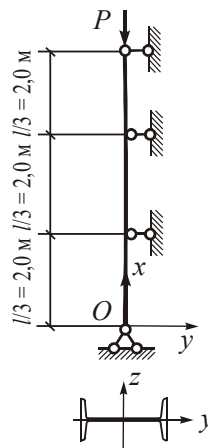


Рис. 3.12. Схема гибкого стержня и его сечение

Комментарий. Так как стержень имеет одинаковые опорные закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , то при определении $\sigma_{кр}$ необходимо использовать наименьшее значение радиуса инерции поперечного сечения.

Наибольшая гибкость

$$\lambda = \lambda_{\text{нб}} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1/3 \cdot 600}{1,7} = 117,65 > 100.$$

Критические напряжения определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{117,65^2} = 149,6 \text{ МПа} \approx 150 \text{ МПа}.$$

Правильный ответ: 1.

3.2. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Тест 3.15. Из приведенных случаев деформирования гибкого стержня продольно-поперечным изгибом называется:

- 1) изгиб стержня под действием поперечной нагрузки;
- 2) изгиб стержня, возникающий от совместного действия поперечной нагрузки и сжимающей продольной нагрузки;
- 3) изгиб стержня при действии сил в произвольном направлении;
- 4) изгиб стержня, при котором в сечениях стержня возникают внутренние усилия в продольном направлении;
- 5) изгиб стержня при действии сжимающих сил в продольном направлении.

Комментарий. Продольно-поперечным называется изгиб достаточно гибкого стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок (см. рис. 3.3).

Правильный ответ: 2.

Тест 3.16. При продольно-поперечном изгибе гибких стержней не выполняется:

- 1) принцип независимости действия сил;
- 2) принцип Сен-Венана;
- 3) закон Гука;
- 4) допущение о малости перемещений;
- 5) допущение о малости относительных деформаций.

Комментарий. Продольно-поперечным называется изгиб достаточно гибкого стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок (см. рис. 3.3). Приближенное решение уравнения изогнутой оси можно представить в виде

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_3}}.$$

Продольная сжимающая сила находится в знаменателе этого выражения, т.е. зависимость от нее не является линейной, поэтому принцип независимости действия сил при продольно-поперечном изгибе стержней не выполняется.

Правильный ответ: 1.

Тест 3.17. Продольно-поперечный изгиб — это случай деформирования гибкого стержня, который имеет место при:

- ☐ 1) совместном действии поперечной нагрузки и сжимающей продольной нагрузки;
- ☐ 2) действии внецентренно приложенных сил;
- ☐ 3) действии сил в произвольном направлении;
- ☐ 4) действии растягивающих сил в продольном направлении;
- ☐ 5) действии сжимающих сил в продольном направлении.

Комментарий. Продольно-поперечным называется изгиб достаточно гибкого стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок (см. рис. 3.3).

Правильные ответы: 1, 2.

Библиографический список

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. — Москва : ИНФРА-М, 2011. — 636 с. — ISBN 978-5-16-003872-8.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов) : учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. — Москва : Издательство АСВ, 2013. — 256 с. — ISBN 978-5-93093-867-8.
3. Сопротивление материалов (с примерами решения задач) : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Строительство» / Н.М. Атаров, Г.С. Варданян [и др.] ; под ред. Н.М. Атарова. — Москва : КНОРУС, 2017. — 332 с. — ISBN 978-5-406-04555-8.
4. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах : учебное пособие / Н.М. Атаров. — Москва : ИНФРА-М, 2010. — 407 с. — ISBN 978-5-16-003871-1.
5. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2012. — 64 с. — ISBN 978-5-7264-0626-8.
6. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 2 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2013. — 97 с. — ISBN 978-5-7264-0738-8.
7. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 3 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2014. — 73 с. — ISBN 5-7264-0484-X.
8. Сидоров В.Н. Сопротивление материалов : учебник / В.Н. Сидоров ; под редакцией В.А. Смирнова. — Москва : Издательство «Архитектура-С», 2013. — 304 с. — ISBN 978-5-9647-0242-9.
9. Центральное растяжение и сжатие стержней в тестах : методические указания к самостоятельной работе студентов, обучающихся по направлениям 270800 «Строительство», 151600 «Прикладная механика» и «Прикладная математика» / сост.: А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова ; Московский государственный строительный университет, каф. сопротивления материалов. — Москва : МГСУ, 2013. — 51 с.
10. Внутренние усилия и напряжения при прямом изгибе стержней в тестах : учебное пособие / А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова ; Нац. исследоват. моск. гос. строит. ун-т. — 2-е изд. (эл.). — Москва : Изд-во МИСИ–МГСУ, 2017.
11. Напряженное и деформированное состояние при центральном растяжении-сжатии и изгибе стержней : методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся по направлениям подготовки 08.03.01 Строительство 07.03.01 Архитектура, 20.03.01 Техносферная безопасность / сост.: А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова, А.Н. Леонтьев ; Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т., каф. сопротивления материалов. — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2020.