

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра сопротивления материалов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ (СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ)

*Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной
работе для обучающихся по направлениям подготовки
01.03.04 Прикладная математика, 08.03.01 Строительство*

Составители: А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова, А.Н. Леонтьев

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2024

УДК 624.04
ББК 30.121
С64

Рецензент — доктор технических наук, профессор *О.В. Мкртычев*,
заведующий кафедрой сопротивления материалов НИУ МГСУ

С64 **Сопротивление материалов (сложное сопротивление, перемещения, устойчивость стержней)** [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 08.03.01 Строительство / сост.: А.В. Ильяшенко, А.Я. Астахова, А.Н. Леонтьев ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра сопротивления материалов. — Электрон. дан. и прогр. (5,8 Мб). — Москва : Издательство МИСИ — МГСУ, 2024. — URL: <http://lib.mgsu.ru/> — Загл. с титул. экрана.

Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплинам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» включают три раздела: «Перемещения в балках и рамах при изгибе», «Сложное сопротивление», «Устойчивость стержней», в которых приведены ключевые правила и формулы, даны тесты и их решения. Все тестовые задания сформулированы в соответствии с общими требованиями базового уровня. Рассмотрены разнообразные типы задач, даны подробные комментарии к решениям.

Для обучающихся по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 08.03.01 Строительство.

Учебное электронное издание

Учебное электронное издание

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
(СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ,
УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ)**

Составители:

**Ильяшенко Алла Викторовна, Астахова Августина Яковлевна,
Леонтьев Андрей Николаевич**

Редактор *Т.Н. Доница*

Корректор *В.К. Чупрова*

Компьютерная правка и верстка *О.Г. Горюновой*

Дизайн первого титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:

Microsoft Word 2010, Adobe InDesign CS5.5, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию 00.00.2024. Объем данных 5,8 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.

Тел.: (495) 287-49-14, вн. 14-23, (499) 183-91-90, (499) 183-97-95.

E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ИЗГИБЕ	6
Ключевые правила и формулы.....	6
1.1. Прогибы и углы поворота при изгибе	10
1.2. Определение перемещений методом Мора.....	14
1.3. Расчет балок на жесткость	21
Глава 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	23
Ключевые правила и формулы.....	23
2.1. Плоский и пространственный косой изгиб	30
2.2. Внецентренное растяжение и сжатие.....	33
Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ	39
Ключевые правила и формулы.....	39
3.1. Устойчивость стержней.....	40
 Список литературы	45

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания позволят обучающимся проверить и расширить свои знания и навыки в освоении теоретического и практического материала по темам «Перемещения в балках и рамах при изгибе», «Сложное сопротивление», «Устойчивость стержней».

С помощью представленных тестов можно подготовиться к прохождению тестирования по соответствующим расчетно-графическим работам. Каждый тест снабжен комментируемым ответом, что позволит учащемуся контролировать уровень своей самоподготовки. К каждому тесту (заданию) предлагаются 5 вариантов ответа. Все ответы помечены символами «○» (кружок) или «□» (квадрат). Символом «○» обозначены ответы, из которых только *один* является правильным, а символом «□» — ответы, из которых правильными являются *несколько* из пяти предложенных (но не более четырех). Таким образом, тестируемому дается некоторая подсказка, в целом упрощающая задание. В следующих за ответами комментариях дано решение поставленной в тесте задачи и приведены краткие сведения по соответствующему теоретическому материалу. В конце каждого теста указан *правильный ответ*.

При прохождении аудиторного тестирования на кафедре сопротивления материалов действуют такие же принципы. Студенту необходимо ответить на 5 вопросов, включающих 3 задачи и 2 теоретических задания. Время тестирования 15 мин. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно ответить на 3 вопроса из пяти предложенных.

В методических указаниях использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: P (сила), A (площадь поперечного сечения стержня).

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

Глава 1. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ И РАМАХ ПРИ ИЗГИБЕ

Ключевые правила и формулы

Рассмотрим изгиб балок, для которых по нормам проектирования отношение наибольшего прогиба к пролету балки в зависимости от условий закрепления изменяется в пределах $\frac{v_{\max}}{l} = \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{200} \right)$.

При изгибе ось балки искривляется (рис. 1.1), что сопровождается появлением прогибов $v(x)$ и углов поворота поперечных сечений, определяемых как первая производная от функции прогибов:

$$\varphi(x) = v'(x). \quad (1.1)$$

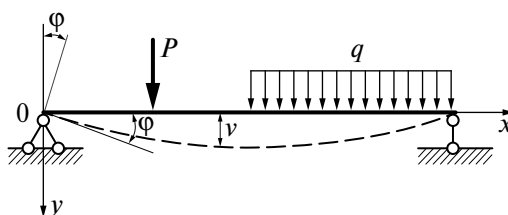


Рис. 1.1. Прогибы и углы поворота при изгибе балки

Вследствие малых прогибов можно пренебречь горизонтальными перемещениями u оси балки (рис. 1.2). В соответствии с гипотезой плоских сечений плоское до деформации сечение остается плоским и перпендикулярным к оси балки после деформации. При этом оно поворачивается на угол φ (рис. 1.3), равный углу между горизонталью и касательной, проведенной к изогнутой оси балки в рассматриваемой точке.

Таким образом, положение любой точки изогнутой оси балки характеризуется вертикальным перемещением $v(x)$ и углом поворота сечения φ (см. рис. 1.1).

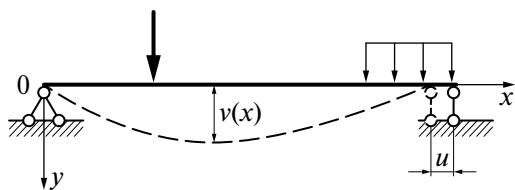


Рис. 1.2. Вертикальное и горизонтальное перемещения точки балки

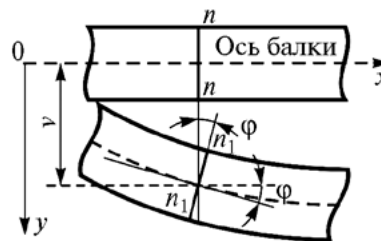


Рис. 1.3. Поворот поперечного сечения балки

Правила знаков для прогиба v и угла поворота сечения φ

Прогибы считаются положительными, если они происходят в положительном направлении оси Oy , т.е. вниз. Углы поворота считаются положительными, если касательная к изогнутой оси балки поворачивается по ходу часовой стрелки.

Значения прогибов v и углов поворота поперечного сечения φ можно определить из решений дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$EJv''(x) = -M(x) \quad (1.2)$$

или 4-го порядка:

$$EJv^{IV}(x) = q(x). \quad (1.3)$$

Метод непосредственного интегрирования

Проинтегрируем последовательно дифференциальное уравнение 2-го порядка (1.2). Получим выражения для определения: угла поворота сечения:

$$EJ\varphi(x) = v^I(x) = -\int M(x)dx + C_1 \quad (1.4)$$

прогиба балки:

$$EJv(x) = -\int dx \int M(x)dx + C_1x + C_2, \quad (1.5)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные константы интегрирования, определяемые из граничных условий и условий сопряжения участков.

Покажем применение этого метода на примере определения функций прогиба и угла поворота консольной балки постоянной жесткости EJ , находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 1.4).

Изгибающий момент можно записать в виде функции $M(x) = -\frac{qx^2}{2}$.

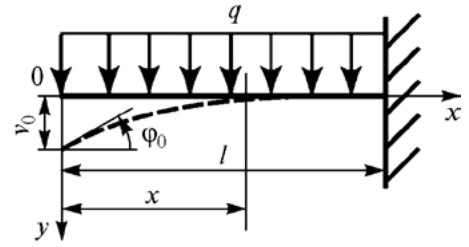


Рис. 1.4. К примеру определения прогибов и углов поворота для консольной балки

Тогда по формуле (1.4) получаем $\varphi(l) = 0$ $EJ\varphi(x) = \frac{q}{2} \int x^2 dx + C_1 = \frac{qx^3}{6} + C_1$, по формуле (1.5) — $EJv(x) = \int EJ\varphi(x)dx = \frac{q}{6} \int x^3 dx + C_1x + C_2 = \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$.

Постоянные интегрирования определим из граничных условий на правом конце балки, где прогиб и угол поворота равны 0, т.е. $\varphi(l) = 0$ и $v(l) = 0$.

Подставив $x = l$ в первое условие, получим $EJ\varphi(l) = \frac{ql^3}{6} + C_1 = 0$ и $C_1 = -\frac{ql^3}{6}$.

Из второго условия $EJv(l) = \frac{ql^4}{24} + C_1l + C_2 = 0$ и $C_2 = -C_1l - \frac{ql^4}{24} = \frac{ql^4}{6} - \frac{ql^4}{24} = \frac{ql^4}{8}$.

С учетом найденных значений констант запишем окончательные выражения для углов поворота и прогибов балки:

$$EJ\varphi(x) = \frac{qx^3}{6} - \frac{ql^3}{6} \text{ и } EJv(x) = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{6}x + \frac{ql^4}{8}. \quad (1.6)$$

Наибольшие по модулю значения прогиба и угла поворота получаем на свободном конце балки при $x = 0$: $\varphi_{\text{нб}} = \frac{ql^3}{6EJ}$, $v_{\text{нб}} = \frac{ql^4}{8EJ}$.

Метод начальных параметров

Последовательно интегрируя однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка $EJv^{IV}(x) = 0$, получим решение, содержащее 4 константы:

$$EJv(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4. \quad (1.7)$$

Эти константы могут быть выражены через начальные параметры, тогда решение однородного уравнения записывают в виде

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ}, \quad (1.8)$$

где $v_0 = v(0)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$, $M_0 = M(0)$, $Q_0 = Q(0)$ — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат, называемые *начальными параметрами*.

При наличии на балке равномерно распределенной нагрузки необходимо к выражению (1.8) добавить частное решение дифференциального уравнения (1.3), которое в данном случае определяется выражением $\bar{v}_q = \frac{qx^4}{4! EJ}$.

В результате полное решение неоднородного дифференциального уравнения 4-го порядка (1.3) с использованием начальных параметров записывают в виде

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} + \frac{qx^4}{4! EJ}. \quad (1.9)$$

Неизвестные начальные параметры определяют из граничных условий.

Универсальное уравнение для определения прогибов и углов поворота сечений балки

При использовании метода начальных параметров балку последовательно разделяют на участки, границей между которыми являются точки приложения нагрузок, промежуточные шарниры, при этом реакции, действующие в опорах, учитывают наравне с внешней нагрузкой (рис. 1.5):

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi(x - a_1) \Big|_2 - \frac{M(x - a_2)^2}{2! EJ} \Big|_3 - \frac{P(x - a_3)^3}{3! EJ} \Big|_4 + \frac{q(x - a_4)^4}{4! EJ} \Big|_5 - \frac{q(x - a_5)^4}{4! EJ} \Big|_6. \quad (1.10)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{M_0 x}{EJ} - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \Delta\varphi \Big|_2 - \frac{M(x - a_2)}{EJ} \Big|_3 - \frac{P(x - a_3)^2}{2! EJ} \Big|_4 + \frac{q(x - a_4)^3}{3! EJ} \Big|_5 - \frac{q(x - a_5)^3}{3! EJ} \Big|_6. \quad (1.11)$$

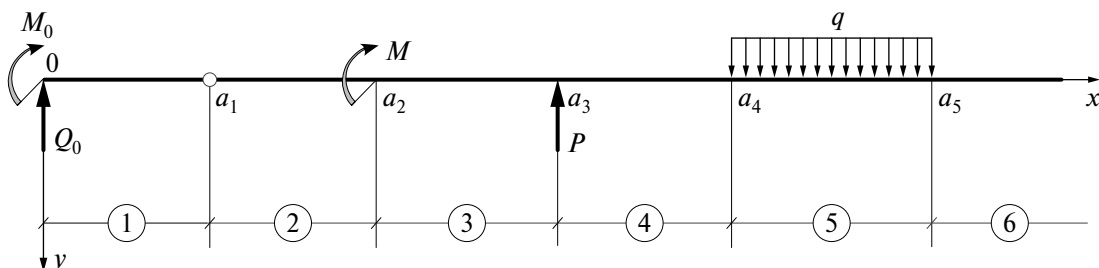


Рис. 1.5. К записи универсального уравнения метода начальных параметров

Выражения прогиба (1.10) или угла поворота (1.11) на участке балки определяются формулами, расположенными слева от вертикальной черты с номером соответствующего участка.

Метод Мора для определения прогибов и углов поворота балки

Рассмотрим метод определения прогибов и углов поворота сечений в некоторых характерных точках балки от действия внешней нагрузки.

Для начала в балке строят эпюру изгибающих моментов M_P от действия внешней нагрузки, называемую *грузовой*, после чего для определения вертикального перемещения в рассматриваемой точке прикладывают сосредоточенную единичную силу, а для определения угла поворота сечения — единичный момент, и от этих усилий строят эпюру $\bar{M}_i$, называемую *единичной*.

Затем вычисляют интеграл от произведения двух функций:

$$\Delta_{iP} = \int \frac{M_P \bar{M}_i}{EJ} dx, \quad (1.12)$$

где Δ_{iP} — обобщенное перемещение в направлении действия приложенного единичного усилия; $\bar{M}_i$ — эпюра изгибающих моментов в балке от действия единичного усилия.

Полученный в результате интегрирования знак «плюс» означает, что перемещение направлено в сторону действия приложенного единичного усилия, а знак «минус» — перемещение направлено в противоположную сторону.

Вычисление интеграла (1.12) от произведения двух функций, одна из которых является линейной, можно выполнить по правилу А.К. Верещагина (рис. 1.6). Оно может применяться только для тех участков, на которых обе функции (M_P и $\bar{M}_i$) являются гладкими и непрерывными. В соответствии с этим правилом интеграл от произведения произвольной функции M_P на линейную функцию $\bar{M}_i$ равен произведению площади эпюры M_P (Ω_P) на ординату y_C в эпюре $\bar{M}_i$, расположенную под центром тяжести этой площади:

$$\Delta_{iP} = \int \frac{M_P \bar{M}_i}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \Omega_P y_C. \quad (1.13)$$

Результат произведения двух линейных функций (рис. 1.7) можно получить по формуле «перемножения трапеций»:

$$\Delta_{iP} = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (1.14)$$

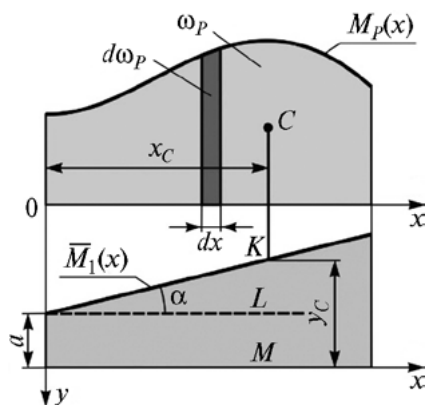


Рис. 1.6. Правило Верещагина

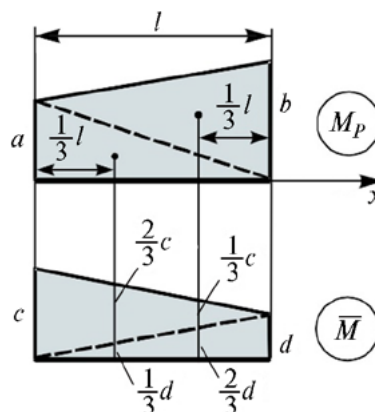


Рис. 1.7. Перемножение трапеций

1.1. Прогибы и углы поворота при изгибе

Тест 1.1. Правильными утверждениями для прогибов и углов поворота консольной балки (рис. 1.8) являются:

- ☐ 1) $\varphi_A < 0$;
- ☐ 2) $\varphi_B < 0$;
- ☐ 3) $v_B > 0$;
- ☐ 4) $v_C < 0$;
- ☐ 5) $\varphi_C > 0$.

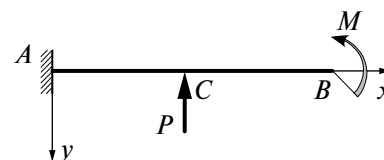


Рис. 1.8. Схема консольной балки

Комментарий. Жесткая заделка не допускает поворота конца балки A . Поэтому $\varphi_A = 0$. Так как под действием силы и момента точки C и B перемещаются *вверх*, то $v_C < 0$ и $v_B < 0$. Углы поворота поперечных сечений принимают равными углам наклона касательной к изогнутой оси балки. Касательные к изогнутой оси поворачиваются против часовой стрелки, поэтому углы $\varphi_C < 0$ и $\varphi_B < 0$.

Правильные ответы: 2; 4.

Тест 1.2. Правильными утверждениями для прогибов и углов поворота шарнирно-опертой балки с консолью (рис. 1.9) являются:

- ☐ 1) $v_C < 0$;
- ☐ 2) $\varphi_B < 0$;
- ☐ 3) $\varphi_D > 0$;
- ☐ 4) $v_C > 0$;
- ☐ 5) $\varphi_A > 0$.

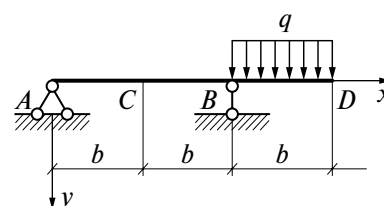


Рис. 1.9. Схема шарнирно-опертой балки

Комментарий. Так как распределенная нагрузка растягивает верхнее волокно консоли, то точка D перемещается вниз: $v_D > 0$. Касательная к изогнутой оси консоли поворачивается по часовой стрелке, поэтому угол $\varphi_D > 0$. На участке AB растянуты также верхние волокна, следовательно, точка C перемещается *вверх*: $v_C < 0$. Изогнутая ось на AB выпуклена вверх. Следовательно, $\varphi_A < 0$ (касательная к изогнутой оси в сечении A поворачивается против хода часовой стрелки) и $\varphi_B > 0$ (касательная к изогнутой оси в сечении B поворачивается по ходу часовой стрелки).

Правильные ответы: 1; 3.

Тест 1.3. Изогнутая ось балки характеризуется функциями:

- ☐ 1) поперечных сил;
- ☐ 2) прогибов;
- ☐ 3) жесткости балки при изгибе;
- ☐ 4) углов поворота сечений;
- ☐ 5) изгибающих моментов.

Комментарий. По значениям прогибов и углов поворота поперечных сечений можно изобразить характер изогнутой оси балки. Важно знать значения и знаки функций прогибов $v(x)$ и углов поворота поперечных сечений $\varphi(x)$ в характерных точках балки.

Правильные ответы: 2; 4.

Тест 1.4. Дифференциальными зависимостями для определения функции прогибов балки являются:

- ☐ 1) $M^I(x) = Q(x)$;
- ☐ 2) $Q^I(x) = -\varphi(x)$;
- ☐ 3) $EJv^{IV}(x) = q(x)$;
- ☐ 4) $EJ\varphi^{III}(x) = Q(x)$;
- ☐ 5) $EJv^{II}(x) = -M(x)$.

Комментарий. Дифференциальными зависимостями для определения функции прогибов среди приведенных соотношений являются: дифференциальное уравнение 2-го по-

рядка 1 — зависимость между функцией прогиба и изгибающим моментом; дифференциальное уравнение 4-го порядка 2 — зависимость между функцией прогиба и нагрузкой.

Правильные ответы: 3; 5.

Тест 1.5. Граничные условия и условия сопряжения участков для определения неизвестных констант интегрирования методом непосредственного интегрирования в заданной балке (рис. 1.10) следующие:

- ☐ 1) $v_A = 0$;
- ☐ 2) $\varphi_A = 0$; $Q_A^{\text{пр}} = R_A$;
- ☐ 3) $v_C^{\text{лев}} = v_C^{\text{пр}}$; $\varphi_C^{\text{лев}} = \varphi_C^{\text{пр}}$;
- ☐ 4) $\varphi_B = 0$; $Q_B^{\text{лев}} = R_B$;
- ☐ 5) $v_B = 0$.

Комментарий. В качестве граничных условий используем опоры A и B , в которых прогибы равны нулю (рис. 1.11). К граничным условиям следует добавить условия сопряжения участков, т.е. в точке C прогиб со стороны первого участка (слева) равен прогибу в этой точке со стороны второго участка (справа). Такое же равенство составляют в точке C для углов поворота сечений.

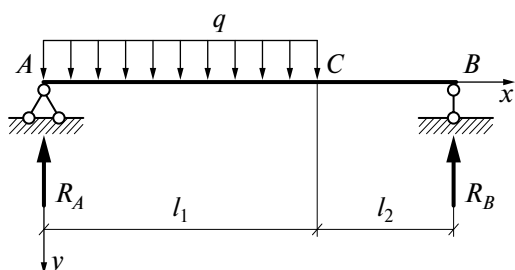


Рис. 1.10. Схема балки

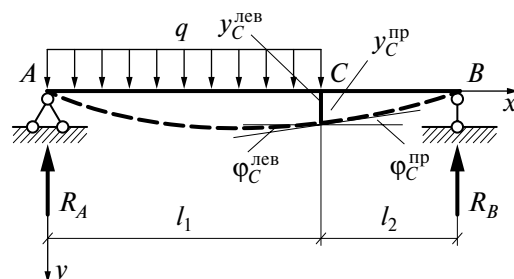


Рис. 1.11. Характер изогнутой оси балки

Правильные ответы: 1; 3; 5.

Тест 1.6. Неизвестными начальными параметрами в уравнении прогибов для заданной балки (рис. 1.12) являются:

- ☐ 1) v_0 ;
- ☐ 2) M_0 ;
- ☐ 3) $\Delta\varphi$;
- ☐ 4) φ_0 ;
- ☐ 5) Q_0 .

Комментарий. Начало координат, расположенное в крайней левой точке балки (рис. 1.13), совпадает со свободным концом балки. Представляя характер изогнутой оси данной балки, получаем, что из четырех начальных параметров — v_0 , φ_0 , M_0 , Q_0 — неизвестными являются два — прогиб и угол поворота поперечного сечения.

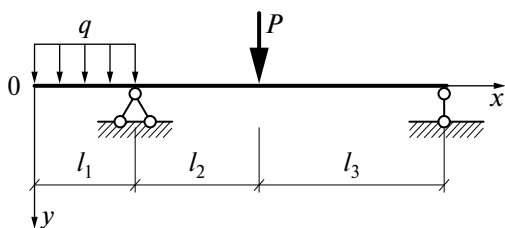


Рис. 1.12. Схема балки

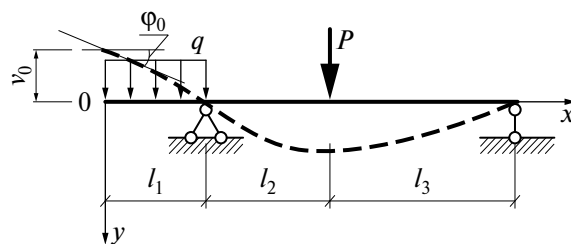


Рис. 1.13. Характер изогнутой оси балки

Правильные ответы: 1; 4.

Тест 1.7. Правильными утверждениями для заданной балки (рис. 1.14) являются:

- ☐ 1) $\varphi_B < 0$;
- ☐ 2) $\varphi_A = 0$;
- ☐ 3) $\varphi_0 \neq 0$;
- ☐ 4) $v_B = 0$;
- ☐ 5) $v_0 = 0$.



Рис. 1.14. Схема балки

Комментарий. Эпюра изгибающих моментов, построенная на растянутом волокне, позволяет довольно точно изобразить характер изогнутой оси балки (рис. 1.15).

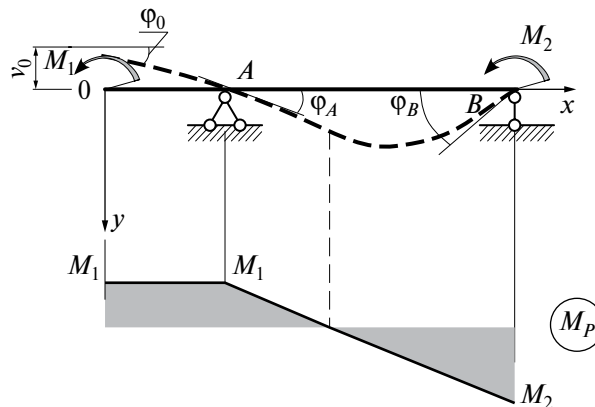


Рис. 1.15. Характер изогнутой оси балки

В точке B касательная к изогнутой оси отклонена от горизонтали против хода часовой стрелки, поэтому $\varphi_B < 0$. Угол поворота на шарнирной опоре в точке A отличен от нуля. В начале координат на конце консоли угол поворота φ_0 и прогиб v_0 не равны нулю. Прогиб в точке B на шарнирно-подвижной опоре равен нулю.

Правильные ответы: 1; 3; 4.

Тест 1.8. Неизвестными величинами в уравнении прогибов метода начальных параметров для заданной балки (рис. 1.16) являются:

- ☐ 1) φ_0 ;
- ☐ 2) v_A ;
- ☐ 3) v_0 ;
- ☐ 4) v_D ;
- ☐ 5) $\Delta\varphi_B$.

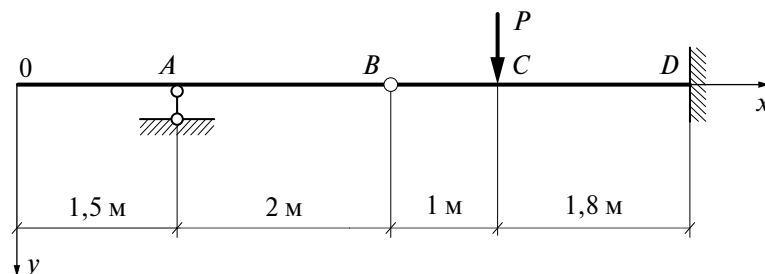


Рис. 1.16. Схема балки

Комментарий. Задана балка с промежуточным шарниром. Чтобы изобразить характер изогнутой оси, начертим поэтажную схему балки (рис. 1.17). Нагрузка действует на нижнем этаже, верхний этаж свободен от нагрузки, реакция в шарнирной опоре B равна нулю.

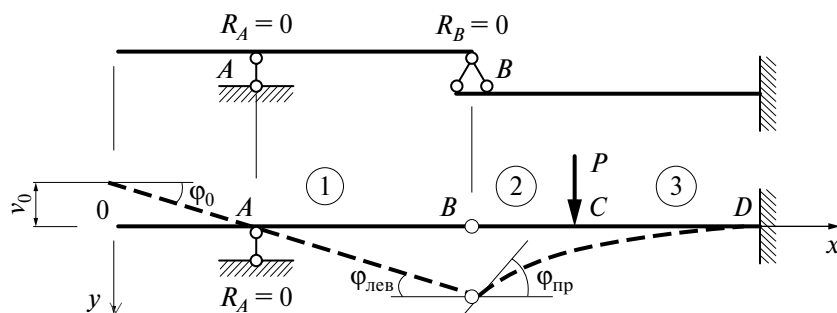


Рис. 1.17. Поэтажная схема и характер изогнутой оси балки

Ось левой части балки до промежуточного шарнира не изгибается, она поворачивается на шарнирной опоре A . Начало координат расположено на левом свободном конце балки, поэтому прогиб v_0 и угол поворота сечения φ_0 неизвестны в начале расчета, неизвестна также разница углов поворота сечения $\Delta\varphi_B = \varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{лев}} \neq 0$ в точке промежуточного шарнира.

Правильные ответы: 1; 3; 5.

Тест 1.9. Правильными утверждениями для заданной балки (рис. 1.18) являются:

- ☐ 1) $\varphi_0 = 0$;
- ☐ 2) $v_A = 0$;
- ☐ 3) $v_B > 0$;
- ☐ 4) $v_C < 0$;
- ☐ 5) $\Delta\varphi_B = 0$.

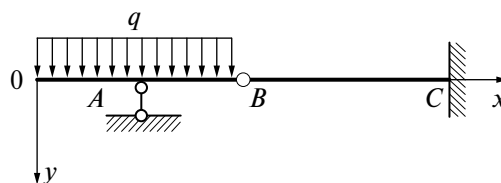


Рис. 1.18. Схема балки

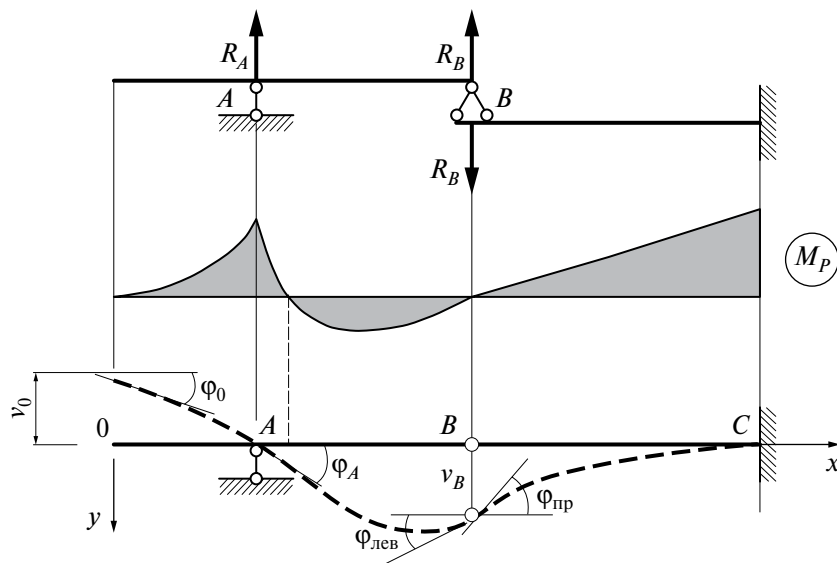


Рис. 1.19. Поэтажная схема и характер изогнутой оси балки

Комментарий. Для более точного изображения изогнутой оси балки начертим поэтажную схему и эпюру изгибающих моментов (рис. 1.19). Проанализируем предложенные утверждения. Угол поворота в начале координат на свободном конце не равен нулю: $\varphi_0 \neq 0$. Прогиб на шарнирной опоре равен нулю: $v_A = 0$. При нагрузке, действующей вниз, прогиб точки B направлен вниз, поэтому положителен. В точке жесткого защемления прогиб равен нулю: $v_C = 0$. В общем случае в промежуточном шарнире углы поворота сечений слева и справа не равны между собой, поэтому их разность не равна нулю:

$$\Delta\varphi_B = \varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{лев}} \neq 0.$$

Правильные ответы: 2; 3.

Тест 1.10. Граничные условия для определения неизвестных параметров в уравнении прогибов для заданной балки (рис. 1.20) имеют вид:

- ☐ 1) при $x = 6$ м $\varphi_D = 0$;
- ☐ 2) при $x = 2$ м $v_A = 0$;
- ☐ 3) при $x = 3$ м $v_B = 0$;
- ☐ 4) при $x = 2$ м $\varphi_A = 0$;
- ☐ 5) при $x = 5$ м $v_C = 0$.

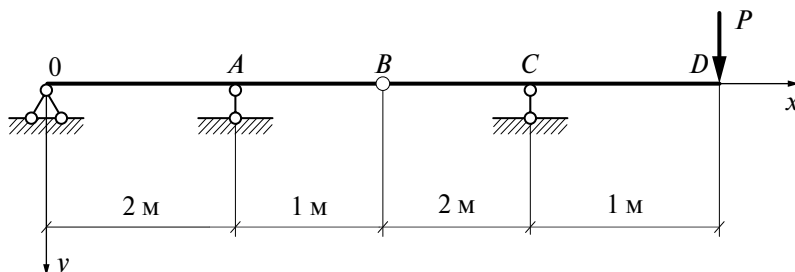


Рис. 1.20. Схема балки

Комментарий. В заданной балке в уравнении прогибов по методу начальных параметров неизвестными величинами являются угол поворота в начале координат φ_0 и разница углов поворота сечений в промежуточном шарнире (рис. 1.21):

$$\Delta\varphi_B = \varphi_{\text{пр}} - \varphi_{\text{лев}}.$$

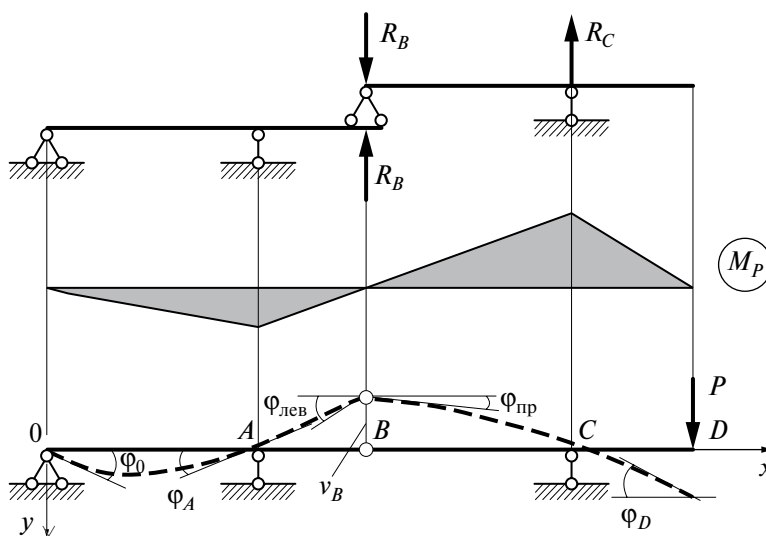


Рис. 1.21. Характер изогнутой оси балки

Для их определения используем следующие граничные условия: прогибы на шарнирных опорах равны нулю: $v_A = 0$ и $v_C = 0$.

Правильные ответы: 2; 5.

1.2. Определение перемещений методом Мора

Применяемые обозначения

1. Стрелки ($\downarrow$; $\uparrow$) на эпюрах моментов показывают, с какой стороны от оси стержня расположен график.
2. Δ_{1P} — перемещение сечения, вызванное внешней нагрузкой P , в направлении, указанном единичным усилием $X_1 = 1$.
3. ω_j — площадь j -й составляющей грузовой эпюры M_P .

4. C_j — центр тяжести j -й составляющей грузовой эпюры.

5. Словосочетание «перемножение эпюр» заменяет фразу «вычисление интеграла от произведения двух функций».

6. Для упрощения примем $EJ = EJ_z$.

Тест 1.11. Жесткость балки EJ постоянна. Угол поворота φ_B в сечении B балки (рис. 1.22), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_B = -\frac{6Ma}{EJ}$;
- 2) $\varphi_B = -\frac{12Ma}{EJ}$;
- 3) $\varphi_B = \frac{8Ma^2}{EJ}$;
- 4) $\varphi_B = \frac{4Ma}{EJ}$;
- 5) $\varphi_B = \frac{20Ma}{EJ}$.

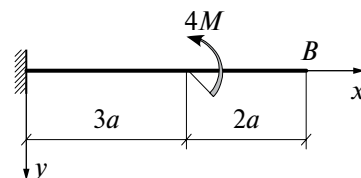


Рис. 1.22. Схема балки

Комментарий. Строим эпюру M_p от внешней нагрузки (сосредоточенный момент $4M$) и эпюру $\bar{M}_1$ от единичного безразмерного момента $\bar{X}_1 = 1$, приложенного в том сечении, где ищем угол поворота (сечение B) (рис. 1.23).

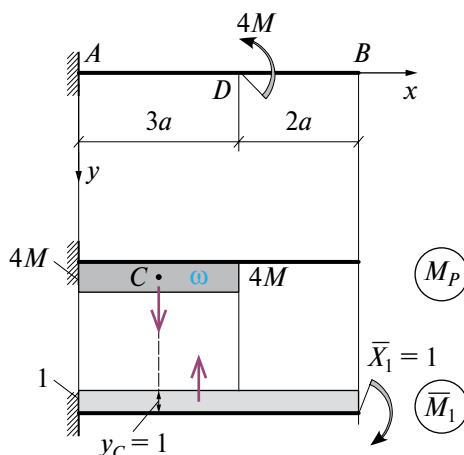


Рис. 1.23. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

В соответствии с правилом Верещагина вычисляем интеграл Мора на участке AD (на отрезке DB нет грузовой эпюры):

$$\varphi_B = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_p \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \omega y_C = -\frac{1}{EJ} 4M \cdot 3a \cdot 1 = -\frac{12Ma}{EJ},$$

где ω — площадь фигуры, ограниченной графиком функции M_p , то есть площадь прямоугольника; y_C — ордината в единичной эпюре $\bar{M}_1$, расположенная под центром тяжести C грузовой эпюры, $y_C = 1$. Знак «минус» говорит о том, что перемножаемые эпюры находятся с *разных* сторон от оси балки: стрелки-указатели ($\downarrow$ и $\uparrow$) направлены в разные стороны.

Отрицательный результат означает, что направление поворота сечения B противоположно указанному направлению единичного момента $\bar{X}_1 = 1$ (по часовой стрелке), т.е. соответствует ходу **против часовой стрелки**.

Правильный ответ: 2.

Тест 1.12. Жесткость балки EJ постоянна. Прогиб v_A в сечении A балки (рис. 1.24), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $v_A = \frac{192Pa^2}{EJ}$;
- 2) $v_A = \frac{288Pa^3}{EJ}$;
- 3) $v_A = -\frac{336Pa^3}{EJ}$;
- 4) $v_A = \frac{224Pa^3}{EJ}$;
- 5) $v_A = -\frac{56Pa^3}{EJ}$.

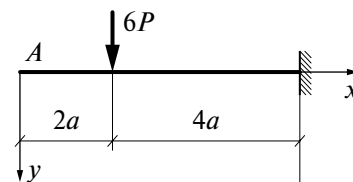


Рис. 1.24. Схема балки

Комментарий. Грузовая эпюра M_p на участке AD отсутствует. Эпюра $\bar{M}_1$ строится от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$, приложенной в сечении A , где требуется найти прогиб (рис. 1.25). Так как в пределах участка AD эпюра M_p нулевая, то вычисление интеграла Мора производим на участке DB . Удобно использовать формулу перемножения трапеций, так как это освобождает нас от отыскания центров тяжести фигур и их площадей.

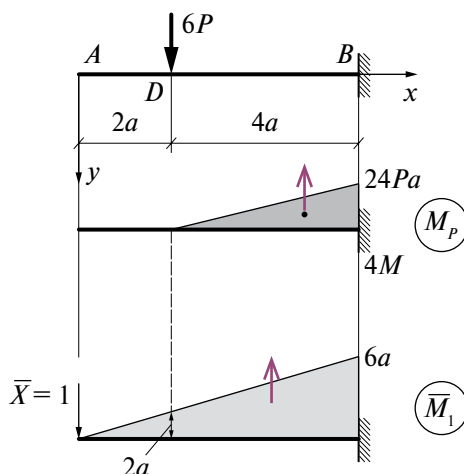


Рис. 1.25. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Все слагаемые в скобках положительные, так как ординаты в перемножаемых эпюрах расположены с одной стороны от оси балки ($\uparrow$):

$$v_A = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_p \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \frac{4a}{6} (2 \cdot 0 \cdot 2a + 2 \cdot 24Pa \cdot 6a + 0 \cdot 6a + 24Pa \cdot 2a) = \frac{224Pa^3}{EJ}.$$

Результат со знаком «плюс» означает, что вертикальное перемещение v_A направлено вниз, т.е. совпадает с направлением единичного усилия $\bar{X}_1$.

Правильный ответ: 4.

Тест 1.13. Жесткость балки EJ постоянна. Угол поворота φ_A в сечении A балки (рис. 1.26), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_A = \frac{10,5Pb^2}{EJ}$;
- 2) $\varphi_A = \frac{17Pb^2}{EJ}$;

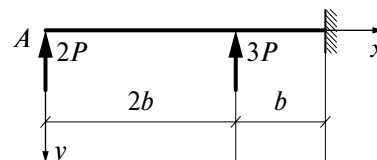


Рис. 1.26. Схема балки

- 3) $\varphi_A = \frac{4Pb^2}{EJ}$;
- 4) $\varphi_A = -\frac{8Pb^2}{EJ}$;
- 5) $\varphi_A = -\frac{21Pb^3}{EJ}$.

Комментарий. Единичная эпюра $\bar{M}_1$ строится от безразмерного момента $\bar{X}_1 = 1$, приложенного в сечении A , где требуется найти угол поворота (рис. 1.27). Эпюра от внешней нагрузки M_P и единичная $\bar{M}_1$ построены на растянутых нижних волокнах балки.

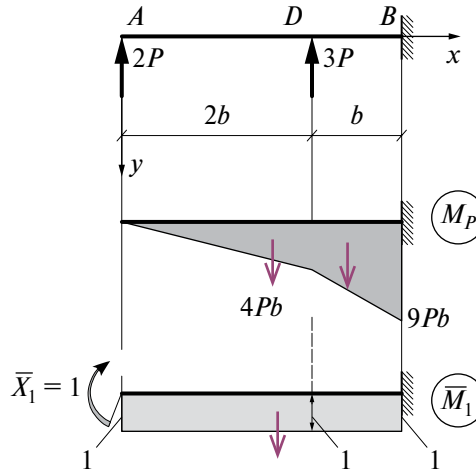


Рис. 1.27. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Грузовая эпюра M_P имеет излом в точке D , поэтому делим балку на 2 участка интегрирования — AD и DB . В пределах каждого участка используем формулы перемножения трапеций. Обе эпюры, M_P и $\bar{M}_1$, расположены снизу от оси, поэтому все слагаемые имеют знак «плюс»:

$$\begin{aligned}\varphi_A = \Delta_{1P} &= \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \frac{2b}{6} (2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4Pb \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4Pb \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EJ} \frac{b}{6} (2 \cdot 4Pb \cdot 1 + 2 \cdot 9Pb \cdot 1 + 4Pb \cdot 1 + 9Pb \cdot 1) = \frac{10,5Pb^2}{EJ}.\end{aligned}$$

Положительный результат означает, что поворот сечения A совпадает с указанным направлением единичного момента $\bar{X}_1 = 1$ (*по часовой стрелке*).

Правильный ответ: 1.

Тест 1.14. Жесткость балки EJ постоянна. Прогиб v_C в сечении C балки (рис. 1.28), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $v_C = \frac{24Pa^3}{EJ}$;
- 2) $v_C = \frac{9Pa^3}{EJ}$;
- 3) $v_C = -\frac{15Pa^2}{EJ}$;
- 4) $v_C = \frac{54Pa^3}{EJ}$;

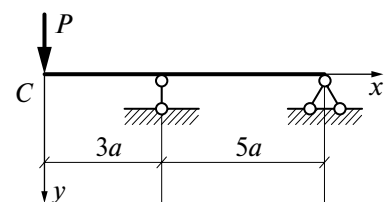


Рис. 1.28. Схема балки

○ 5) $v_C = -\frac{90Pa^2}{EJ}$.

Комментарий. Грузовая M_P и единичная $\bar{M}_1$ эпюры построены со стороны верхних волокон балки ($\uparrow$), поэтому все слагаемые при вычислении интеграла Мора будут со знаком «плюс» (рис. 1.29).

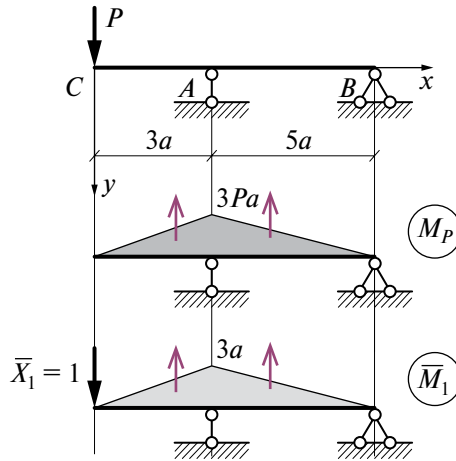


Рис. 1.29. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Используя удобную формулу для перемножения трапеций на каждом из участков балки (CA и AB), получим

$$v_C = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[\frac{3a}{6} (2 \cdot 3Pa \cdot 3a + 0 + 0 + 0) + \frac{5a}{6} (2 \cdot 3Pa \cdot 3a + 0 + 0 + 0) \right] = \frac{24Pa^3}{EJ}.$$

Положительный ответ говорит о том, что сечение C перемещается *вниз*.

Правильный ответ: 1.

Тест 1.15. Жесткость балки EJ постоянна. Угол поворота φ_B в сечении B балки (рис. 1.30), вычисленный с помощью метода Мора, равен:

- 1) $\varphi_B = \frac{24qb^2a^2}{EJ}$;
- 2) $\varphi_B = -\frac{6qba^2}{EJ}$;
- 3) $\varphi_B = \frac{4qb^2a}{3EJ}$;
- 4) $\varphi_B = \frac{4qba^2}{EJ}$;
- 5) $\varphi_B = \frac{8qa^2}{EJ}$.

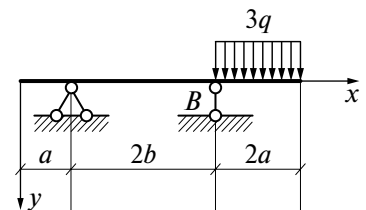


Рис. 1.30. Схема балки

Комментарий. Перемножение грузовой M_P и единичной $\bar{M}_1$ эпюр происходит только на участке AB (рис. 1.31). Для этого применяем формулу перемножения трапеций с учетом знаков их ординат:

$$\varphi_B = \Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int M_P \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2b}{6} (2 \cdot 6qa^2 \cdot 1) = \frac{4qba^2}{EJ}.$$

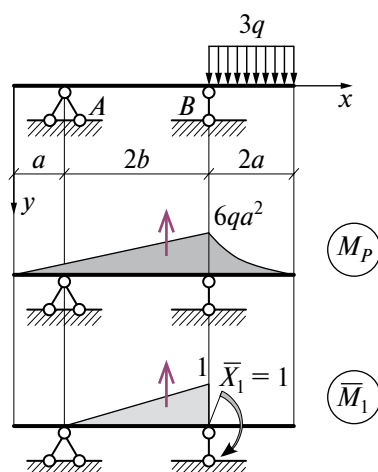


Рис. 1.31. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

Знак «плюс» в ответе означает, что сечение B повернулось *по часовой стрелке*.

Правильный ответ: 4.

Тест 1.16. Единичная эпюра моментов $\bar{M}$, построенная для указанной балки (рис. 1.32), позволяет вычислить от действия любых поперечных нагрузок следующее перемещение:

- 1) v_D ;
- 2) ϕ_B ;
- 3) v_C ;
- 4) v_B ;
- 5) ϕ_A .

Комментарий. Итак, задана единичная эпюра $\bar{M}$, по которой нужно определить, от какого единичного усилия она построена. Поскольку в точке D на эпюре излом, то очевидно, что в середине пролета приложена единичная сила $\bar{X}_1 = 1$, направленная вниз (рис. 1.33). От нее реакции в опорах равны $1/2$. Они и создают момент в сечении D , равный $2a$. А значит, заданная единичная эпюра позволяет вычислить прогиб v_D .

Правильный ответ: 1.

Тест 1.17. Единичная эпюра моментов $\bar{M}$, построенная для указанной балки (рис. 1.34), позволяет вычислить от действия любых поперечных нагрузок следующее перемещение:

- 1) $\Delta\phi_D$;
- 2) $\phi_D^{\text{лев}}$;
- 3) v_C ;
- 4) v_D ;
- 5) $\Delta\phi_C$.

Комментарий. На эпюре $\bar{M}$ в сечении D мы видим скачок, равный 1. Причем $M_D^{\text{лев}} = 1$, а $M_D^{\text{пр}} = 0$. Значит, слева от шарнира D приложен единичный момент $\bar{X}_1 = 1$, от которого и построена предлагаемая эпюра. На поэтажной схеме балки покажем соответствующие реакции (рис. 1.35):

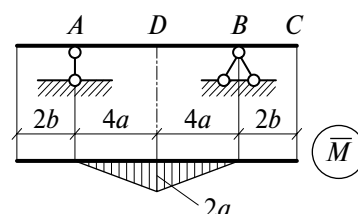


Рис. 1.32. Единичная эпюра

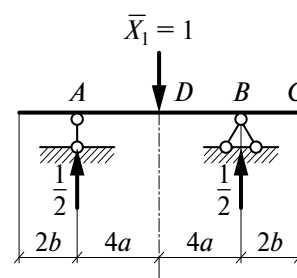


Рис. 1.33. Единичная нагрузка

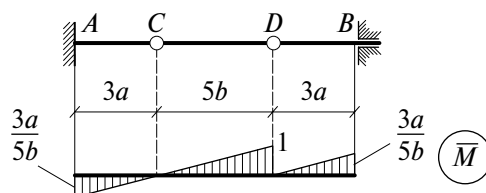


Рис. 1.34. Единичная эпюра

$$M_A = \frac{1}{5b}3a = \frac{3a}{5b}; \quad M_B = -\frac{1}{5b}3a = -\frac{3a}{5b}.$$

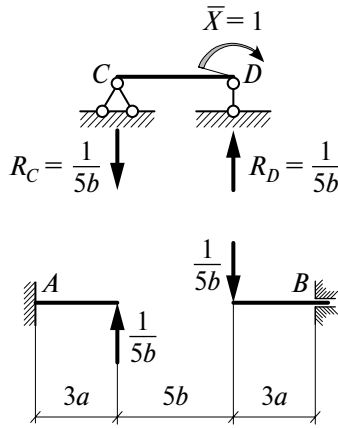


Рис. 1.35. Поэтажная схема балки

Таким образом, заданная единичная эпюра позволяет вычислить $\varphi_D^{\text{лев}}$ — угол поворота слева в шарнире D .

Правильный ответ: 2.

Тест 1.18. Единичная эпюра моментов $\bar{M}$, построенная для указанной балки (рис. 1.36), позволяет вычислить от действия любых поперечных нагрузок следующее перемещение:

- 1) $\Delta\varphi_C$;
- 2) $\varphi_C^{\text{лев}}$;
- 3) v_C ;
- 4) $\varphi_C^{\text{пр}}$;
- 5) φ_A .

Комментарий. Из графика $\bar{M}$ (см. рис. 1.36) видно, что в шарнире $M_C^{\text{лев}} = 0$, а $M_C^{\text{пр}} = 1$.

Значит, данная эпюра построена от единичного момента $\bar{X}_1 = 1$, приложенного справа от шарнира C (рис. 1.37). Поэтажная схема показывает, что в этом случае шарнирно-опертая балка AC — без нагрузки (момент по всей длине равен 0).

Следовательно, данная единичная эпюра позволяет вычислить $\varphi_C^{\text{пр}}$ — угол поворота в шарнире C справа.

Правильный ответ: 4.

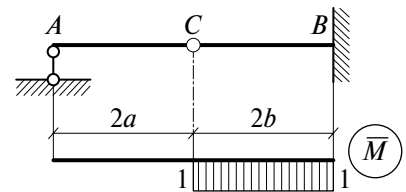


Рис. 1.36. Единичная эпюра

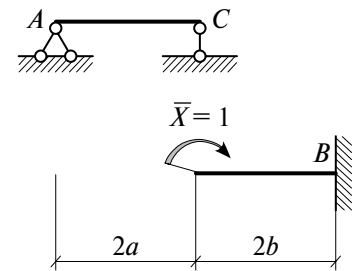


Рис. 1.37. Поэтажная схема балки

Тест 1.19. Правило Верещагина при вычислении интегралов Мора можно использовать, если:

- 1) грузовая и единичная эпюры имеют различные знаки;
- 2) грузовая и единичная эпюры изменяются по нелинейному закону;
- 3) грузовая эпюра изменяется по нелинейному закону;
- 4) грузовая эпюра изменяется по линейному закону;
- 5) одна из эпюр изменяется по линейному закону.

Комментарий. Правило Верещагина применяют для перемножения двух эпюр при условии, что одна из них — в общем случае *нелинейная* непрерывная, а другая — *линейная* непрерывная, без изломов. То есть обе эпюры могут быть линейными. Знаки на эпюрах могут быть любыми.

Правильные ответы: 1; 3; 4; 5.

Тест 1.20. Формула для перемножения трапеций по правилу Верещагина с крайними ординатами a , b и c , d и длиной основания l (рис. 1.38) имеет вид:

- 1) $\Delta = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)$;

- 2) $\Delta = \frac{l}{6}(2ad + 2bc + ac + bd)$;
- 3) $\Delta = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ab + cd)$;
- 4) $\Delta = \frac{l}{4}(2ac + 2bd + ad + bc)$;
- 5) $\Delta = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc)$.

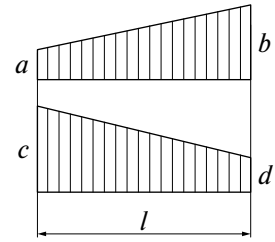


Рис. 1.38. Две линейные эпюры

Комментарий. Правило Верещагина применительно к перемножению изображенных трапеций имеет следующий вид: $\Delta = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc)$.

Правильный ответ: 5.

1.3. Расчет балок на жесткость

Тест 1.21. Жесткость балки при изгибе зависит:

- ☐ 1) от площади поперечного сечения A ;
- ☐ 2) модуля упругости E ;
- ☐ 3) длины балки l ;
- ☐ 4) точки приложения нагрузки;
- ☐ 5) осевого момента инерции J .

Комментарий. Жесткостью балки на изгиб называется произведение EJ .

Правильные ответы: 2; 5.

Тест 1.22. Консольная балка нагружена сосредоточенным моментом в середине пролета (рис. 1.39). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $f \leq \frac{l}{700}$. Площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E .

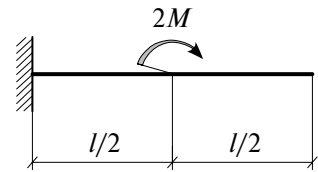


Рис. 1.39. Схема балки

Значение нагрузки M из условия жесткости балки определяют по формуле

- 1) $M \leq \frac{1}{525} \cdot \frac{EJ}{l}$;
- 2) $M \leq \frac{4}{525} \cdot \frac{EA}{l}$;
- 3) $M \leq \frac{1}{700} \cdot \frac{EJ}{l^2}$;
- 4) $M \leq \frac{3}{700} \cdot \frac{EJ}{l}$;
- 5) $M \leq \frac{1}{350} \cdot \frac{l}{EJ}$.

Комментарий. По условию задачи имеем $f \leq \frac{l}{700}$. Используя метод Мора, получим

наибольший прогиб f в заданной консоли на ее конце: $f = \frac{3Ml^2}{4EJ}$. Сравним правые части обе-

их формул и получим $\frac{3Ml^2}{4EJ} \leq \frac{l}{700}$. Тогда значение момента определится так: $M \leq \frac{1}{525} \cdot \frac{EJ}{l}$.

Правильный ответ: 1.

Тест 1.23. Консольная балка нагружена сосредоточенной силой (рис. 1.40). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $f \leq \frac{l}{400}$. Площадь и момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E .

Значение нагрузки P из условия жесткости балки определяют по формуле:

- 1) $P \leq \frac{1}{400} \cdot \frac{EA}{l^2}$;
- 2) $P \leq \frac{1}{200} \cdot \frac{EJ}{l^2}$;
- 3) $P \leq \frac{1}{800} \cdot \frac{EJ}{l^2}$;
- 4) $P \leq \frac{1}{300} \cdot \frac{EJ}{l^2}$;
- 5) $P \leq \frac{1}{800} \cdot \frac{l^3}{EJ}$.

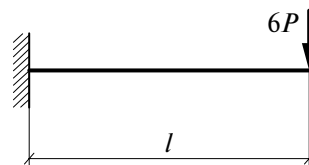


Рис. 1.40. Схема балки

Комментарий. Из условия жесткости по условию задачи имеем $f \leq \frac{l}{400}$. Наибольший прогиб в данной консоли, вычисленный по методу Мора: $f = \frac{(6P)l^3}{3EJ} = \frac{2Pl^3}{EJ}$. При сравнении правых частей обеих формул получаем $\frac{2Pl^3}{EJ} \leq \frac{l}{400}$. Отсюда значение силы: $P \leq \frac{1}{800} \cdot \frac{EJ}{l^2}$.

Правильный ответ: 3.

Тест 1.24. Консольная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1.41). Отношение наибольшего прогиба f к длине пролета l ограничено: $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{200}$. Площадь и осевой момент инерции поперечного сечения балки соответственно равны A и J . Модуль упругости материала балки — E .

Значение нагрузки q из условия жесткости балки определяют по формуле:

- 1) $q \leq \frac{5}{8} \cdot \frac{l^4}{EJ}$;
- 2) $q \leq \frac{125}{2} \cdot \frac{EJ}{l^3}$;
- 3) $q \leq \frac{8}{5} \cdot \frac{l^3}{EA}$;
- 4) $q \leq \frac{1}{50} \cdot \frac{EJ}{l^3}$;
- 5) $q \leq \frac{1}{125} \cdot \frac{EJ}{l^3}$.

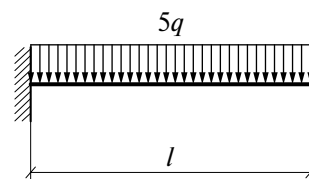


Рис. 1.41. Схема балки

Комментарий. Условие жесткости задачи следующее: $f \leq \frac{l}{200}$. Наибольший прогиб в данной консоли возникает на ее конце, он равен $f = \frac{(5q)l^4}{8EJ}$. Сравнивая правые части обеих формул, имеем $\frac{5ql^4}{8EJ} \leq \frac{l}{200}$. Отсюда получаем значение нагрузки: $q \leq \frac{1}{125} \cdot \frac{EJ}{l^3}$.

Правильный ответ: 5.

Глава 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Ключевые правила и формулы

Сложным сопротивлением называют такой вид деформирования стержня, при котором появление нормальных напряжений обусловлено действием нагрузок, приложенных по-разному по отношению к оси стержня.

Приведем формулы для определения нормальных напряжений при растяжении и изгибе.

1. При действии нагрузки вдоль оси стержня возникает одно внутреннее усилие — **продольная сила** N (рис. 2.1). **Нормальные напряжения** во всех точках сечения одинаковы, их значения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

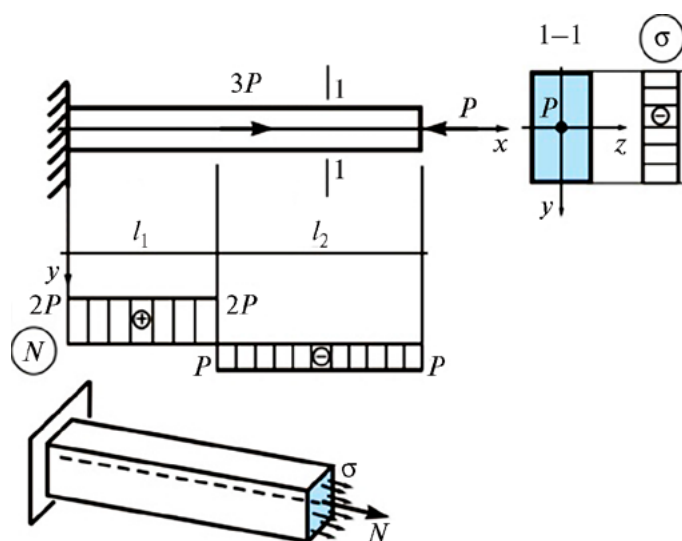


Рис. 2.1. Внутренние усилия и напряжения при центральном растяжении и сжатии стержня

2. При действии нагрузки в одной из главных плоскостей поперечного сечения перпендикулярно оси стержня в балке создается состояние плоского прямого изгиба, и возникают два внутренних усилия — **изгибающий момент** и **поперечная сила** (рис. 2.2).

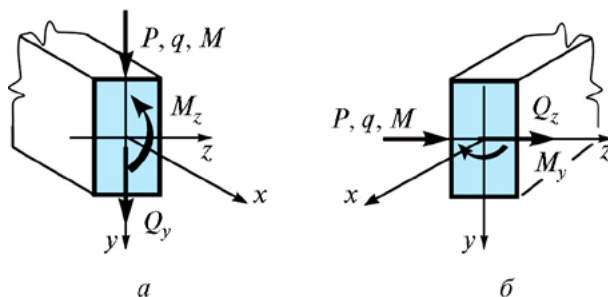


Рис. 2.2. Внутренние усилия в поперечном сечении стержня в двух случаях плоского прямого изгиба:

a — при действии нагрузки в плоскости xOy ; b — то же в плоскости xOz

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения (см. рис. 2.2) определяют по формулам:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y, \quad \sigma = \frac{M_y}{J_y} z. \quad (2.2)$$

Из этих соотношений следует, что при плоском прямом изгибе нормальные напряжения изменяются по линейному закону, причем они равны нулю на уровне центра тяжести сечения, а наибольшие значения возникают в крайних волокнах. При выражении наибольших нормальных напряжений и записи условия прочности используются моменты сопротивления сечения W_z или W_y .

В общем случае сложного сопротивления в поперечном сечении стержня могут действовать шесть внутренних усилий: N — продольная сила; Q_y , Q_z — поперечные силы (рис. 2.3, а); M_z и M_y — изгибающие моменты; M_k — крутящий момент (рис. 2.3, б).

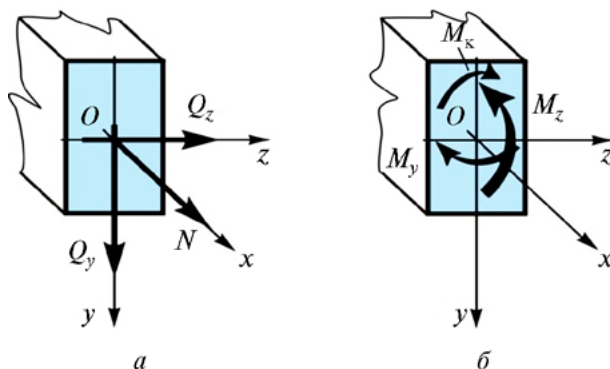


Рис. 2.3. Положительные направления внутренних усилий в поперечном сечении стержня

Приведем **правила знаков** внутренних усилий, введенные ранее для простых видов деформирования стержня.

Продольная сила N считается положительной, если вызывает растяжение волокон балки (см. рис. 2.3, а).

Изгибающий момент считается положительным, если растягивает волокна в области положительного направления оси координат. На рис. 2.3, б показаны положительные направления изгибающих моментов M_y и M_z .

В каждом случае сложного сопротивления формулу для нормальных напряжений составляют на основании *принципа независимости действия сил* (значение напряжений при действии нескольких нагрузок можно получить как сумму напряжений, определенных от каждой нагрузки отдельно).

Для построения общей эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении необходимо знать положение *нулевой линии*, т.е. положение точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим некоторые виды сложного сопротивления стержней.

Плоский косой изгиб возникает в случае, когда вся нагрузка, приложенная к балке, действует в одной плоскости, проходящей через ось балки и не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции Oxy и Oxz (рис. 2.4, а). Плоскость действия нагрузки называется **силовой плоскостью**, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки — **силовой линией** (с.л.). Обозначим через α_p угол между силовой линией и главной осью Oy (рис. 2.4, б).

При этом суммарный изгибающий момент $\bar{M}$ (рис. 2.4, в) можно разложить на два составляющих изгибающих момента — $\bar{M}_z$ и $\bar{M}_y$, действующих в главных плоскостях инерции:

$$\bar{M}_z = \bar{M} \cos \alpha_p, \quad \bar{M}_y = \bar{M} \sin \alpha_p. \quad (2.3)$$

Пространственный косой изгиб возникает, когда внутренние усилия имеют различные законы изменения по длине балки, так как определяются нагрузками, действующими в разных плоскостях (рис. 2.5, а).

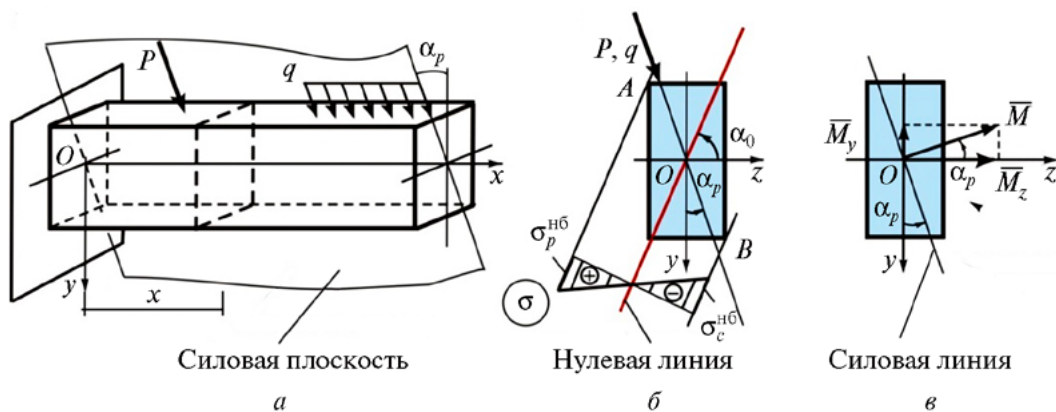


Рис. 2.4. Плоский косой изгиб

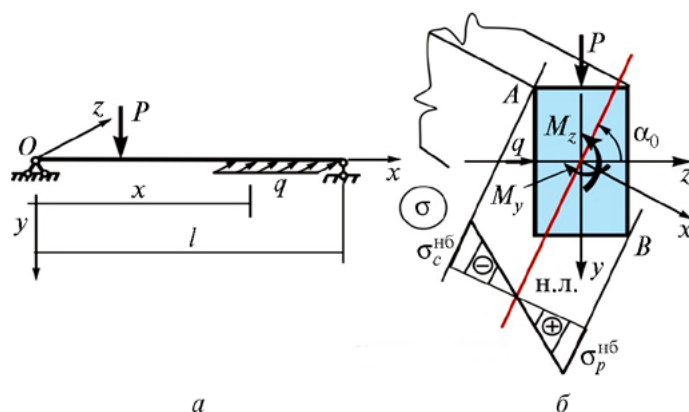


Рис. 2.5. Пространственный косой изгиб:

a — постановка задачи; *б* — примерный характер эпюры нормальных напряжений

Формулу для нормальных напряжений в случае косоугольного изгиба записывают как алгебраическую сумму для двух плоских прямых изгибов:

$$\sigma = \pm \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y, \quad (2.4)$$

где J_y и J_z — главные моменты инерции сечения; y и z — координаты точек сечения.

Приравняв соотношение (2.4) к нулю, получим уравнение *нулевой линии*

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_z}{M_y}. \quad (2.5)$$

Для плоского косоугольного изгиба нулевую линию можно определять по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha_p. \quad (2.6)$$

Знак «минус» в этих формулах указывает на то, что нулевая линия по отношению к силовой проходит через две другие четверти осей координат.

Отметим, что при пространственном изгибе (см. рис. 2.5) положение опасного сечения не всегда является очевидным. В этих случаях необходимо проверять прочность в нескольких сечениях балки, т.е. там, где M_z и M_y имеют наибольшие значения.

Внецентренное растяжение (сжатие) стержня возникает, когда равнодействующие внешних сил действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня (рис. 2.6).

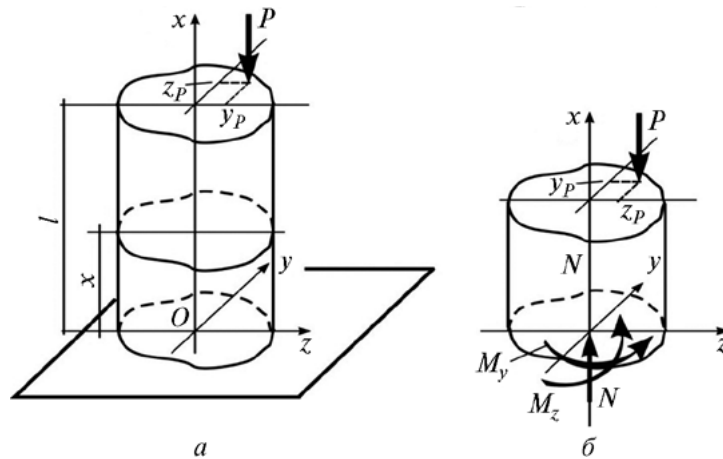


Рис. 2.6. Направление действия нагрузки (а) и внутренних усилий (б) при внецентренном сжатии

Рассмотрим стержень произвольного поперечного сечения (см. рис. 2.6, а), нагруженный на торце внецентренно приложенной сжимающей силой P , направленной параллельно оси Ox . Обозначим координаты точки приложения силы P через y_p и z_p .

Внутренние усилия в произвольном сечении стержня (см. рис. 2.6, б) определяют методом сечений из уравнений равновесия:

$\Sigma x = 0$, $N - P = 0$, $N = P$ — продольная сила,

$\Sigma M_y = 0$, $M_y - P \cdot z_p = 0$, $M_y = P \cdot z_p$ — изгибающий момент относительно оси Oy и аналогично $M_z = P \cdot y_p$ — изгибающий момент относительно оси Oz .

При этом значения внутренних усилий при внецентренном сжатии не изменяются по длине стержня.

Применяя принцип независимости действия сил, нормальное напряжение в поперечном сечении определим как сумму нормальных напряжений, полученных от каждого усилия. Знак «минус» в формуле (2.7) у продольной силы соответствует ее сжимающему действию. Что касается изгибающих моментов, то в области положительных значений z и y они вызывают сжатие и поэтому в формулу (2.7) также входят со знаком «минус»:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} z - \frac{M_z}{J_z} y. \quad (2.7)$$

Введем в соотношение (2.7) квадраты главных радиусов инерции сечения:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} \quad (2.8)$$

и получим формулу для нормальных напряжений при внецентренном сжатии стержня в виде

$$\sigma = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2} \right). \quad (2.9)$$

Принимая в формуле (2.9) $\sigma = 0$, запишем уравнение нулевой линии:

$$1 + \frac{z_p z_0}{i_y^2} + \frac{y_p y_0}{i_z^2} = 0, \quad (2.10)$$

где z_0 и y_0 — координаты точек пересечения нулевой линии с осями координат. Уравнение (2.10) является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения.

Полагая в уравнении (2.10) последовательно $y_0 = 0$, а затем $z_0 = 0$, соответственно получим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат (рис. 2.7):

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_P}, \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_P}. \quad (2.11)$$

Анализ соотношений (2.11) позволяет сделать следующие выводы:

1. Точка приложения силы и нулевая линия расположены по разные стороны от центра тяжести сечения (см. рис. 2.7).

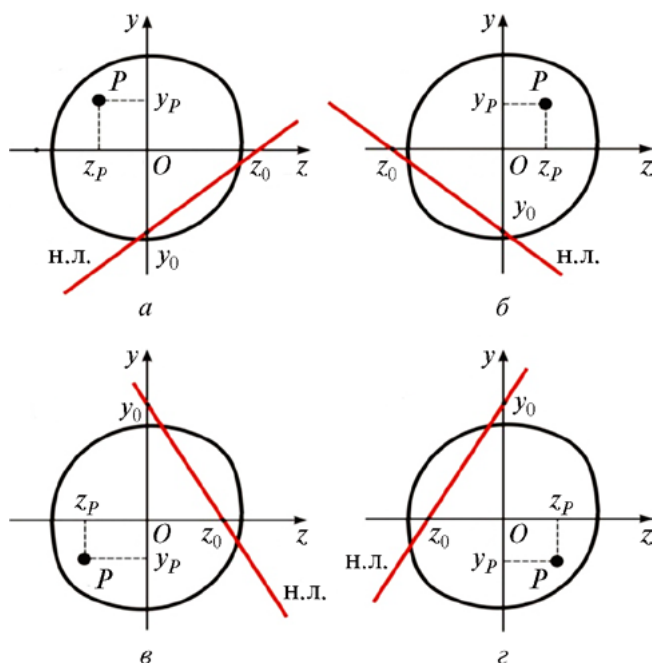


Рис. 2.7. Положение нулевой линии и соответствующей точки приложения силы в поперечном сечении при внецентренном сжатии или растяжении стержня:

a — сила приложена в четверти IV, а нулевая линия расположена в четверти II; *б* — сила приложена в четверти I, а нулевая линия — в четверти III; *в* — сила приложена в четверти III, а нулевая линия — в четверти I; *г* — сила приложена в четверти II, а нулевая линия — в четверти IV

2. Если нулевая линия вращается вокруг угловой точки, то соответствующие точки приложения сил располагаются на одной линии (рис. 2.8, *a*).

3. При приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения нулевая линия удаляется от центра тяжести сечения (рис. 2.8, *б, в*).

4. Если сжимающая сила находится на одной из главных осей инерции сечения, возникает так называемый плоский случай внецентренного сжатия. При этом нулевая линия проходит параллельно другой главной центральной оси (см. рис. 2.8, *б*).

В соответствии с расположением нулевой линии эпюра нормальных напряжений может иметь в сечении разные знаки (рис. 2.9, *a*) или один знак (рис. 2.9, *б*), что важно при расчете конструкций.

Ядро сечения. Многие строительные материалы (бетон, кирпичная кладка и др.) плохо сопротивляются растяжению. В элементах конструкций из указанных материалов нежелательно появление растягивающих напряжений. Выполнение этого условия возможно, если нулевая линия касается контура поперечного сечения или находится вне сечения. Таким нулевым линиям соответствует определенное положение точек приложения сил.

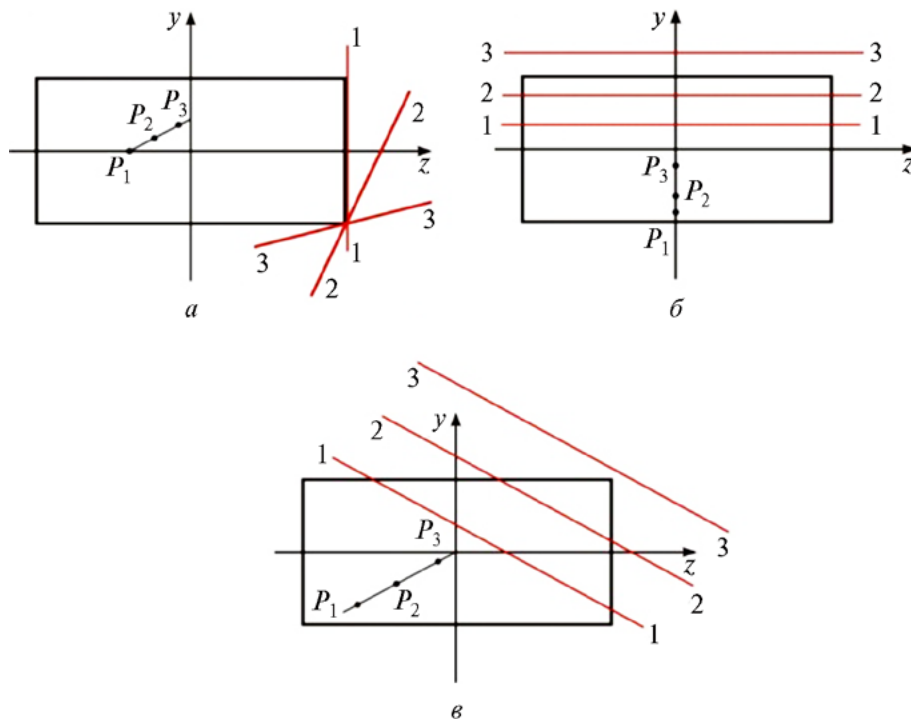


Рис. 2.8. Нулевые линии и соответствующие точки приложения сил

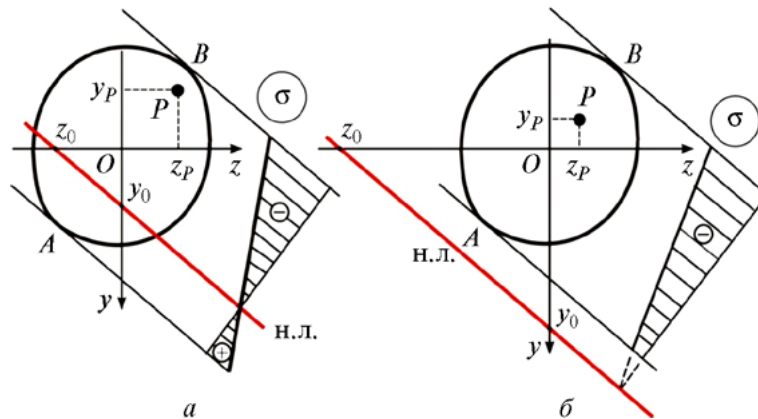


Рис. 2.9. Эпюры нормальных напряжений при внецентренном приложении силы

Ядром сечения называется область, расположенная вокруг центра тяжести сечения и обладающая следующим свойством: при расположении точки приложения силы внутри этой области или на ее границе во всех точках сечения напряжения имеют одинаковый знак. Координаты точек контура ядра сечения определяют с помощью следующих формул:

$$z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}, \quad y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}. \quad (2.12)$$

Ядро сечения является выпуклой фигурой, поскольку при его построении нулевые линии всегда задаются в виде касательных к контуру сечения.

Построим **ядро сечения для прямоугольника** (рис. 2.10). Будем задавать положение нулевой линии по касательной к контуру сечения и определять соответствующие ей коор-

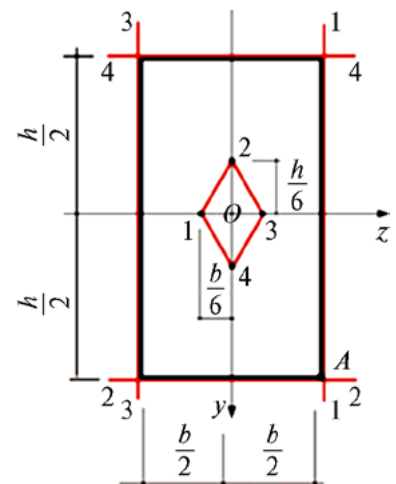


Рис. 2.10. Ядро сечения в прямоугольнике

динаты точки приложения силы, используя соотношения (2.12). Квадраты радиусов инерции прямоугольного сечения:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12}, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{hb^3}{12 \cdot bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Нулевая линия 1–1 параллельна оси Oy и имеет следующие параметры:

$$z_0 = \frac{b}{2}, \quad y_0 = \infty.$$

Соответствующая этой линии точка приложения силы имеет координаты

$$z_P = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6}, \quad y_P = -\frac{h^2}{12 \cdot \infty} = 0.$$

Точка приложения силы расположена на оси Oz с противоположной стороны от проведенной нулевой линии 1–1 (см. рис. 2.10). Аналогичный результат получим для точки приложения силы на оси z :

$$z_P = -\frac{b^2}{12 \cdot \infty} = 0, \quad y_P = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Согласно свойству 2, нулевым линиям, проходящим через точку A , соответствуют точки приложения сил, расположенные на прямой 1–2 ядра сечения (см. рис. 2.10).

Отметим симметрично расположенные точки 3 и 4 и получим ядро сечения прямоугольника в виде ромба, диагонали которого равны $b/3$, $h/3$.

Ядро сечения круга. В поперечном сечении в виде круга все центральные оси являются главными, поэтому при построении ядра сечения достаточно провести одну касательную I–I (рис. 2.11). При этом $y_0 = R$, $z_0 = \infty$.

Квадрат радиуса инерции круглого сечения:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{\pi R^4}{4 \cdot \pi R^2} = \frac{R^2}{4},$$

в результате получим $y_P^1 = -\frac{R^2}{4 \cdot R} = -\frac{R}{4}$, $z_P^1 = 0$.

Таким образом, ядро сечения представляет собой круг с радиусом $R/4$.

Ядро сечения кольца. В поперечном сечении в виде кольца, как и в круге, все центральные оси являются главными, поэтому при построении ядра сечения достаточно провести одну касательную (рис. 2.12). При этом $y_0 = R$, $z_0 = \infty$.

Квадрат радиуса инерции кольцевого сечения:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{\pi R^4 - \pi r^4}{4(\pi R^2 - \pi r^2)} = \frac{R^2 + r^2}{4},$$

в результате получим $y_P^1 = -\frac{R^2 + r^2}{4 \cdot R} = -\frac{R}{4} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$, $z_P^1 = 0$.

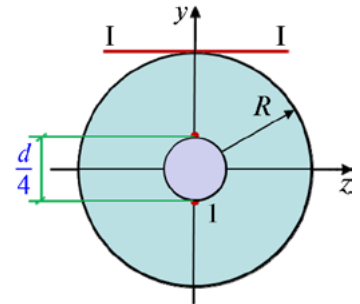


Рис. 2.11. Ядро сечения в круге

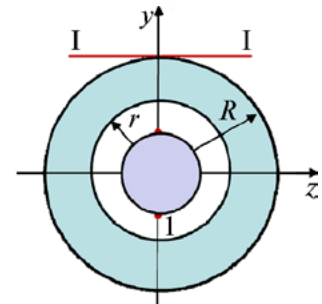


Рис. 2.12. Ядро сечения кольца

Таким образом, ядро сечения кольца представляет собой круг с радиусом, большим, чем $R/4$.

Ядро сечения равностороннего треугольника. Квадрат радиуса инерции треугольного сечения:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{bh^3 \cdot 2}{36 \cdot bh} = \frac{h^2}{18}.$$

Достаточно провести одну касательную I—I (рис. 2.13).

При этом $y_0 = -\frac{h}{3}$, $z_0 = \infty$, в результате получим

$$y_P^1 = -\frac{i_z^2}{y_0} = \frac{h^2 \cdot 3}{18 \cdot h} = \frac{h}{6}, z_P^1 = 0.$$

Таким образом, ядро сечения равностороннего треугольника представляет собой равносторонний треугольник.

Ядра сечений для двутавра и швеллера показаны на рис. 2.14. Касательные к контуру огибают каждое из сечений, нигде не пересекая его, так же как и прямоугольное сечение. Ядро сечения двутавра имеет форму ромба вследствие симметрии сечения. Швеллер — сечение, не симметричное относительно оси Oy , поэтому формой ядра является четырехугольник.

Еще раз отметим, что при действии сил, расположенных внутри ядра сечения, нулевые линии проходят вне контура сечения, и эпюра нормальных напряжений имеет один знак.

При силах, приложенных на контуре ядра сечения, нулевые линии проходят по касательной к контуру сечения, эпюра нормальных напряжений имеет форму треугольника одного знака. При приложении нагрузки вне ядра сечения нулевая линия пересекает сечение, при этом в стержне действуют растягивающие и сжимающие напряжения.

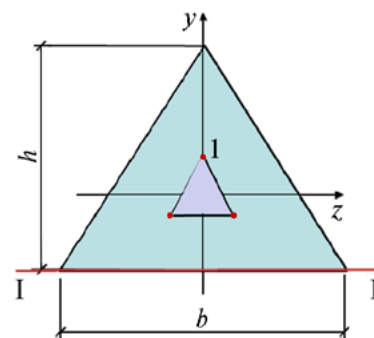


Рис. 2.13. Ядро сечения в равностороннем треугольнике

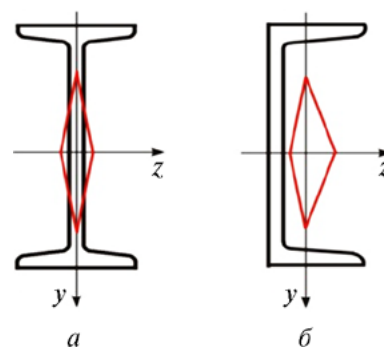


Рис. 2.14. Ядро сечения в двутавре (а) и в швеллере (б)

2.1. Плоский и пространственный косой изгиб

Тест 2.1. Условие прочности при косом изгибе для сечений с двумя осями симметрии записывают так:

- 1) $\sigma_x = \frac{M_z}{W_z} \leq R\gamma_c;$
- 2) $\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z \leq R\gamma_c;$
- 3) $\sigma_x = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z b(y)} \leq R\gamma_c;$
- 4) $\sigma_x = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R\gamma_c;$
- 5) $\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y \leq R\gamma_c.$

Комментарий. Условие прочности при косом изгибе формулируется для наиболее удаленных от нулевой линии точек опасного сечения. В сечении с двумя осями симметрии

эти же точки наиболее удалены от главных центральных осей сечения. Поэтому условие прочности по методу предельных состояний имеет вид

$$\sigma_x = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq R\gamma_c.$$

Ответы 1, 2, 5 неверны, так как относятся к плоскому прямому изгибу.

Ответ 3 — неверный, так как указанная формула характеризует не нормальные напряжения, а касательные τ .

Правильный ответ: 4.

Тест 2.2. При косом изгибе в поперечных сечениях балки возникают следующие внутренние силовые факторы:

- 1) изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z ;
- 2) продольная сила N , поперечные силы Q_z , Q_y , изгибающий момент M_z ;
- 3) поперечные силы Q_z , Q_y и изгибающие моменты M_z , M_y ;
- 4) поперечные силы Q_z , Q_y , изгибающие моменты M_z , M_y и крутящий момент M_x ;
- 5) изгибающий момент M_z , поперечная сила Q_y и крутящий момент M_x .

Комментарий. При косом изгибе (плоском и пространственном) в поперечных сечениях балки возникают четыре внутренних силовых фактора: две поперечные силы Q_z , Q_y и два изгибающих момента M_z , M_y (рис. 2.15).

Правильный ответ: 3.

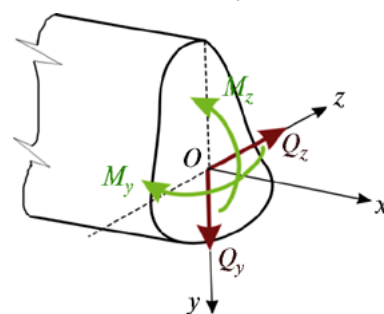


Рис. 2.15. Внутренние усилия при косом изгибе

Тест 2.3. Балка прямоугольного сечения (рис. 2.16) находится в условиях пространственного косоуго изгиба. Угол наклона $|\alpha_0|$ нулевой линии в опасном сечении балки равен:

- 1) $26,3^\circ$;
- 2) $42,9^\circ$;
- 3) $57,1^\circ$;
- 4) $89,1^\circ$;
- 5) $71,5^\circ$.

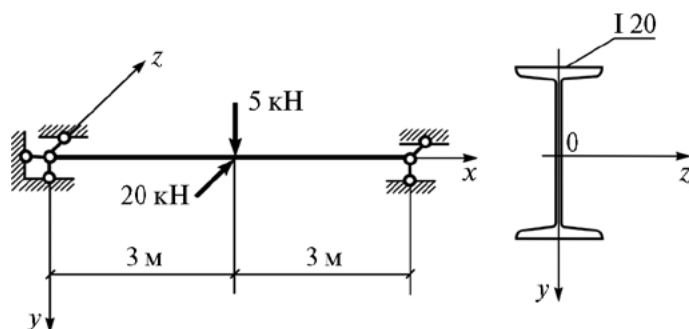


Рис. 2.16. Схема балки и характер ее нагружения

Комментарий. Эпюры моментов M_z и M_y показывают, что опасным является сечение C (рис. 2.17).

Изгибающие моменты в опасном сечении:

$$M_z^c = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y^c = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

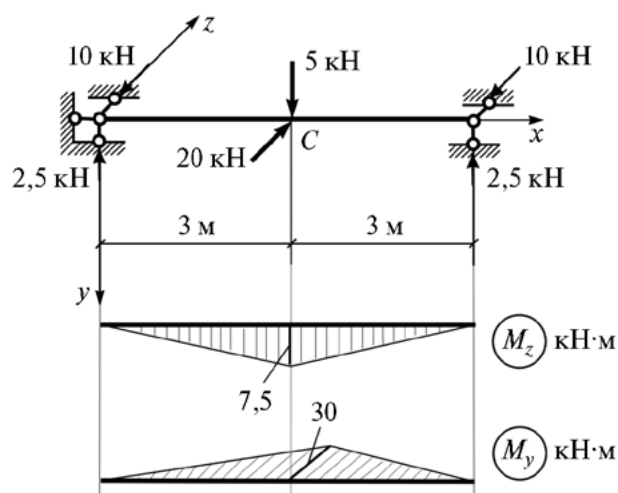


Рис. 2.17. Эпюры изгибающих моментов M_z и M_y

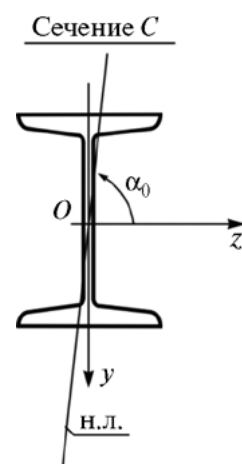


Рис. 2.18. Положение нулевой линии

Тангенс угла наклона $|\alpha_0|$ нулевой линии в опасном сечении балки:

$$|\operatorname{tg} \alpha_0| = \left| -\operatorname{tg} \alpha_p \frac{J_z}{J_y} \right| = \left| -\frac{M_y^c}{M_z^c} \frac{J_z}{J_y} \right| = \frac{30}{7,5} \frac{1840}{115} = 64.$$

Угол наклона нулевой линии к оси Oz : $|\alpha_0| = \operatorname{arctg} 64 = 89,1^\circ$.

Так как в опасном сечении растянуты нижние правые волокна (I четверть), а верхние левые (III четверть) сжаты (см. рис. 2.17), то нулевая линия пересекает II и IV четверти (рис. 2.18).

Правильный ответ: 4.

Тест 2.4. Стальная двутавровая балка (I 20) находится в условиях плоского косо го изгиба (рис. 2.19), $\alpha_p = 14^\circ$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Заданная нагрузка является нормативной. Угол β между силовой линией и полным прогибом на конце балки равен:

- 1) $24,13^\circ$;
- 2) $66,29^\circ$;
- 3) $31,26^\circ$;
- 4) $45,57^\circ$;
- 5) $16,48^\circ$.

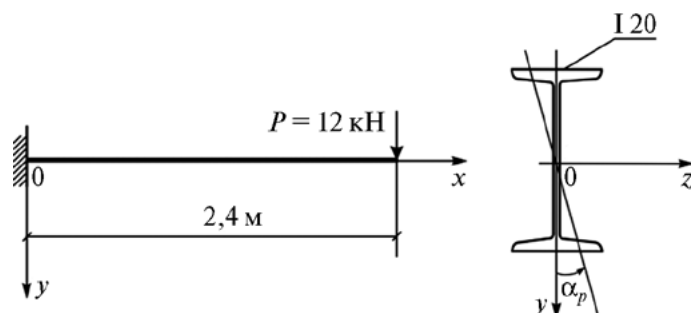


Рис. 2.19. Схема балки и характер ее нагружения

Комментарий. Составляющие нагрузки, разложенной по главным осям инерции поперечного сечения:

$$P_z = P \sin 14^\circ = 12 \cdot 0,242 = 2,90 \text{ кН};$$

$$P_y = P \cos 14^\circ = 12 \cdot 0,970 = 11,64 \text{ кН}.$$

Для вычисления полного перемещения на свободном конце консоли строят грузовую эпюру моментов M и эпюру $\bar{M}$ от единичной безразмерной силы $\bar{X} = 1$, приложенной в сечении C (рис. 2.20).

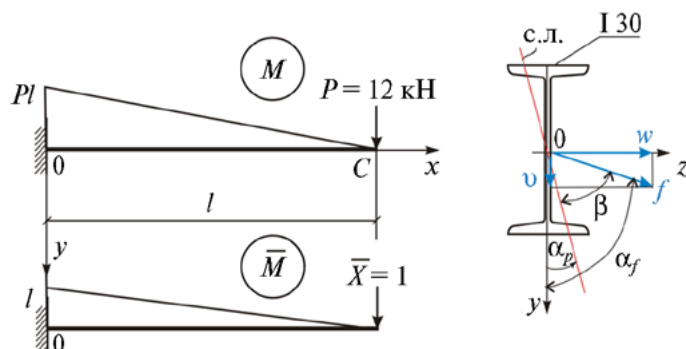


Рис. 2.20. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов

При вычислении интеграла Мора используем правило Верещагина. Составляющая нагрузки P_y вызывает вертикальное перемещение:

$$v = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{11,64 \cdot 240^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 9840} = 0,260 \text{ см},$$

а составляющая нагрузки P_z вызывает горизонтальное перемещение:

$$w = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{2,90 \cdot 240^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 419} = 1,519 \text{ см}.$$

Угол β между силовой линией и полным прогибом f на конце балки (см. рис. 2.20) определяют по формуле

$$\beta = \alpha_f - \alpha_P = \arctg \frac{w}{v} - 14^\circ = \arctg 5,842 - 14^\circ = 80,29^\circ - 14^\circ = 66,29^\circ.$$

Правильный ответ: 2.

2.2. Внецентренное растяжение и сжатие

Тест 2.5. Случай сложного сопротивления представляет приложение нагрузки:

- ☐ 1) вдоль оси стержня;
- ☐ 2) перпендикулярно оси стержня в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей сечения;
- ☐ 3) перпендикулярно оси стержня в одной из главных плоскостей сечения;
- ☐ 4) в произвольной точке поперечного сечения, параллельно оси стержня;
- ☐ 5) в виде момента, приложенного в плоскости поперечного сечения.

Комментарий. Известно, что нагрузка, приложенная вдоль оси стержня, вызывает *центральное растяжение или сжатие стержня*.

При приложении силы перпендикулярно оси стержня в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей сечения, имеем *случай плоского косоуго изгиба*.

Нагрузка, приложенная перпендикулярно оси стержня в одной из главных плоскостей сечения, представляет *случай плоского прямого изгиба*.

При действии силы в произвольной точке поперечного сечения стержня, параллельно его оси, получаем *внецентренное сжатие или растяжение стержня*.

Момент, действующий в плоскости поперечного сечения, вызывает *кручение стержня*.
Плоский косой изгиб и внецентренное сжатие или растяжение стержня представляют случаи *сложного сопротивления*.

Правильные ответы: 2; 4.

Тест 2.6. Нормальное напряжение в точке D (рис. 2.21) определяют по формуле:

- 1) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{b \cdot 12 \cdot b}{2 \cdot b^2 \cdot 2} + \frac{h \cdot 12 \cdot h}{2 \cdot h^2 \cdot 2} \right);$
- 2) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 + \frac{b \cdot 12 \cdot b}{2 \cdot b^2 \cdot 2} - \frac{h \cdot 12 \cdot h}{2 \cdot h^2 \cdot 2} \right);$
- 3) $\sigma = -\frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b \cdot 12 \cdot z}{2 \cdot b^2} - \frac{h \cdot 12 \cdot y}{2 \cdot h^2} \right);$
- 4) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b \cdot 12 \cdot b}{2 \cdot b^2 \cdot 2} - \frac{h \cdot 12 \cdot h}{2 \cdot h^2 \cdot 2} \right);$
- 5) $\sigma = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b \cdot 12 \cdot z}{2 \cdot b^2} - \frac{h \cdot 12 \cdot y}{2 \cdot h^2} \right).$

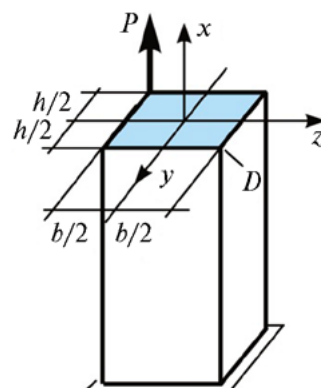


Рис. 2.21. Схема приложения нагрузки

Комментарий. Нормальные напряжения при внецентренном растяжении для любой точки сечения и в любом сечении по высоте стержня определяют по формуле

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z}{i_y^2} + \frac{y_P y}{i_z^2} \right).$$

Координаты точки приложения силы и рассматриваемой точки, а также площадь и квадраты радиусов инерции прямоугольного сечения относительно главных центральных осей Oz и Oy известны:

$$z_P = -\frac{b}{2}, \quad y_P = -\frac{h}{2}, \quad z_D = \frac{b}{2}, \quad y_D = \frac{h}{2},$$

$$A = bh, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{h^2}{12}, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{b^2}{12}.$$

$$\text{В результате получим } \sigma = \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{b \cdot 12 \cdot b}{2 \cdot b^2 \cdot 2} - \frac{h \cdot 12 \cdot h}{2 \cdot h^2 \cdot 2} \right).$$

Правильный ответ: 4.

Тест 2.7. Положение нулевой линии для заданной точки приложения силы (рис. 2.22) показано в:

- ☐ 1) варианте 1;
- ☐ 2) варианте 2;
- ☐ 3) варианте 3;
- ☐ 4) варианте 4;
- ☐ 5) варианте 5.

Комментарий. Точки пересечения нулевой линии с осями координат определяют по формулам:

$$z_0 = -\frac{i_y^2}{z_P}, \quad y_0 = -\frac{i_z^2}{y_P}.$$

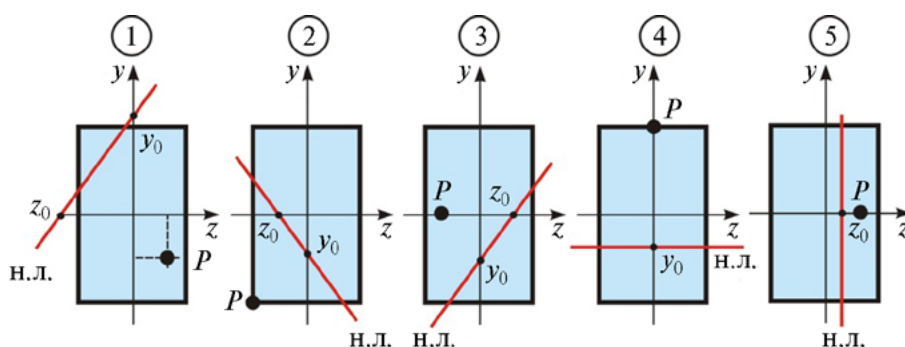


Рис. 2.22. Варианты положения нулевой линии в зависимости от точки приложения силы

Анализ этих соотношений показывает, что знаки z_0 , y_0 и z_P , y_P будут противоположными. В результате нулевая линия и точка приложения силы располагаются по разные стороны от центра тяжести сечения. Этим условиям удовлетворяет расположение точки приложения силы и соответствующей нулевой линии на рис. 2.22 — варианты 1 и 4. В вариантах 2, 5 точка приложения силы и нулевая линия расположены в одной четверти, в варианте 3 расположение точки приложения силы и положение нулевой линии не соответствуют результату, который получается на основании приведенных соотношений, так как $y_P = 0$, получается $y_0 = \infty$, т.е. нулевая линия должна быть параллельна оси Oy .

Правильные ответы: 1; 4.

Тест 2.8. Нулевая линия и соответствующая ей точка приложения силы расположена на контуре ядра сечения. Укажите правильные соотношения между точкой приложения силы на контуре ядра сечения и соответствующей нулевой линией (рис. 2.23):

- ☐ 1) нулевой линии I—I соответствует точка приложения силы 1;
- ☐ 2) нулевой линии I—I соответствует точка приложения силы 2;
- ☐ 3) нулевой линии II—II соответствует точка приложения силы 3;
- ☐ 4) нулевой линии II—II соответствует точка приложения силы 4;
- ☐ 5) нулевой линии III—III соответствует точка приложения силы 7.

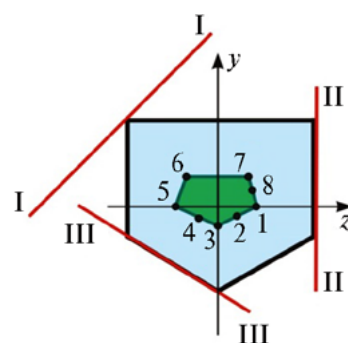


Рис. 2.23. Варианты нулевых линий

Комментарий. Из соотношений $z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}$, $y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}$ следует, что нулевая линия и соответствующая ей точка приложения силы расположены по разные стороны от центра тяжести сечения (рис. 2.24).

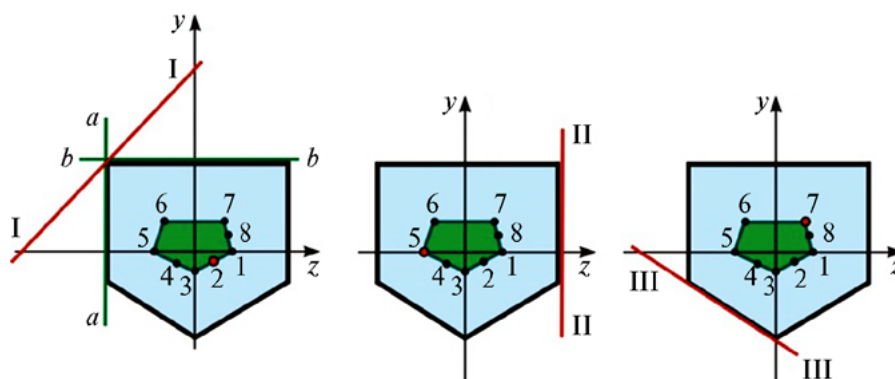


Рис. 2.24. Соответствие нулевых линий и точек приложения силы

При построении ядра сечения последовательно проводят нулевые линии по контуру сечения. Линия I—I занимает промежуточное положение между линиями $a-a$ и $b-b$, касаясь сечения в одной точке. При переходе от линии $a-a$ к линии $b-b$ можно провести бесчисленное множество касательных линий через угловую точку, соответствующие им точки приложения сил располагаются на прямой линии 1—3, поэтому нулевой линии I—I соответствует точка приложения силы 2. Нулевой линии II—II, параллельной оси Oy , соответствует точка приложения силы 5 на оси Oz . Касательная III—III пересекает оси координат Oz и Oy , имея отрицательные знаки для z_0, y_0 , соответствующая ей точка приложения силы 7 имеет положительные координаты.

Правильные ответы: 2; 5.

Тест 2.9. Ядро сечения для заданного поперечного сечения (рис. 2.25) соответствует варианту:

- ☐ 1) 1;
- ☐ 2) 2;
- ☐ 3) 3;
- ☐ 4) 4;
- ☐ 5) 5.

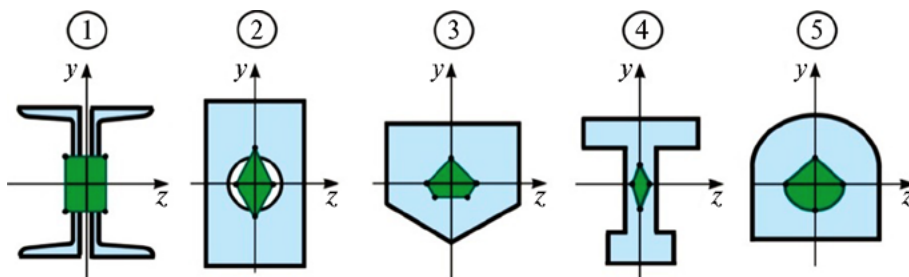


Рис. 2.25. Варианты поперечных сечений стержня и формы возможного ядра сечения

Комментарий. При построении ядра сечения последовательно проводят нулевые линии по касательной к контуру сечения. По соотношениям $z_P = -\frac{i_y^2}{z_0}$, $y_P = -\frac{i_z^2}{y_0}$ определяют соответствующие им координаты точек приложения сил z_P, y_P .

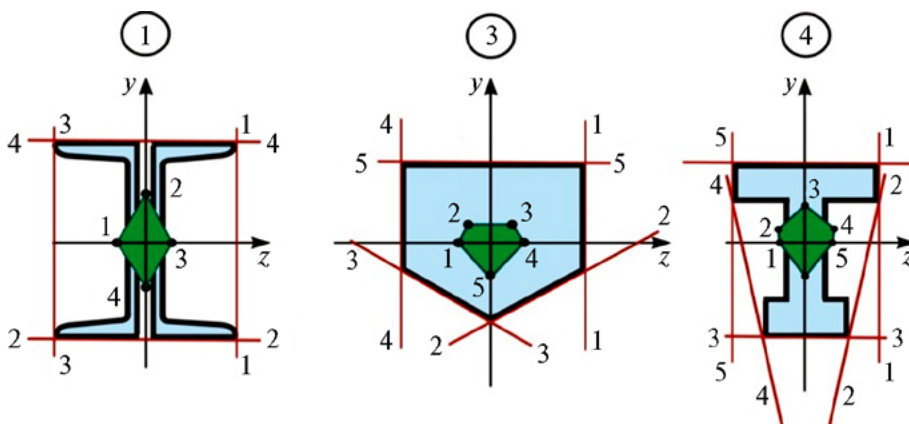


Рис. 2.26. Правильные формы ядра сечения:
1, 3, 4 — сечения

Плавный переход от одной касательной к другой позволяет построить ядро сечения. Нулевые линии и соответствующие им точки приложения сил обозначены одинаковыми цифрами.

Для сечений 1, 3, 4 правильная форма ядра сечения показана на рис. 2.26.

Правильные ответы: 2; 5.

Тест 2.10. Наибольшие нормальные растягивающие напряжения от действия сжимающей силы P (рис. 2.27) возникают в точке:

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 4;
- 5) 5.

Комментарий. Положение нулевой линии помогает построить характер эпюры нормальных напряжений, определить наиболее напряженные точки сечения.

Расположение точки приложения силы $(+z_p, +y_p)$ дает возможность провести нулевую линию $(-z_0, -y_0)$. Параллельно нулевой линии проводят касательные к контуру сечения (рис. 2.28).

Проводят нормаль к нулевой линии, строят эпюру нормальных напряжений. Наиболее напряженными в сечении являются точки, наиболее удаленные от нулевой линии. Наибольшее нормальное растягивающее напряжение действует в точке 2.

Правильный ответ: 2.

Тест 2.11. Эпюра нормальных напряжений при действии сжимающей силы P имеет следующий вид (рис. 2.29):

- 1) вариант 1;
- 2) вариант 2;
- 3) вариант 3;
- 4) вариант 4;
- 5) вариант 5.

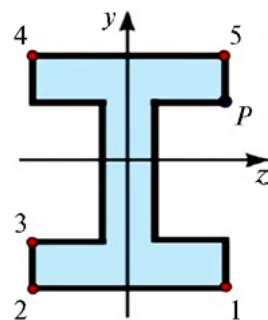


Рис. 2.27. Схема поперечного сечения

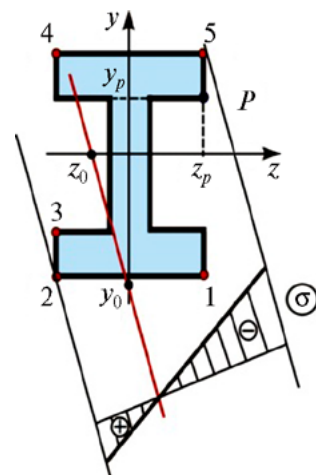


Рис. 2.28. Эпюра нормальных напряжений

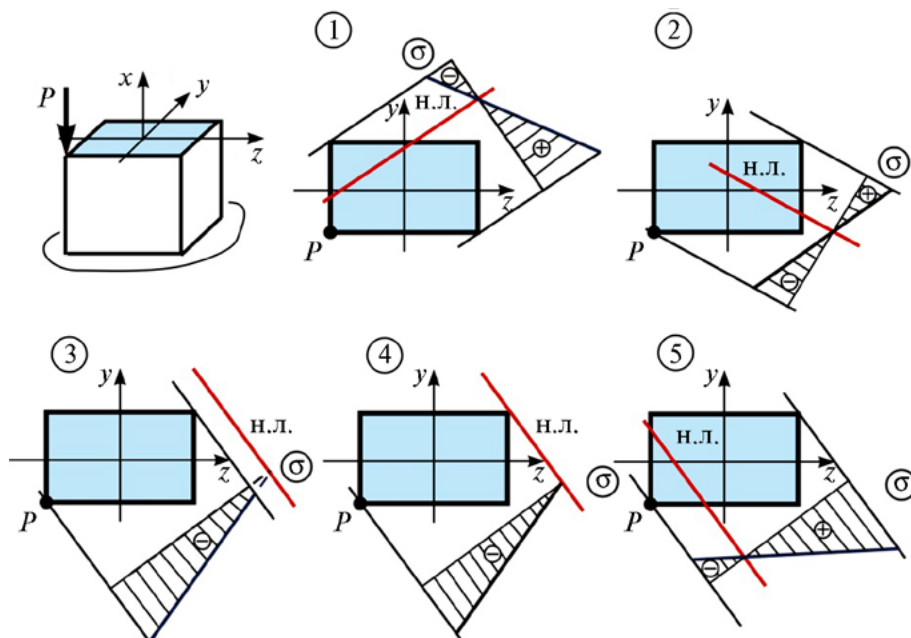


Рис. 2.29. Варианты эпюр нормальных напряжений (1–5)

Комментарий. Для выбора правильного ответа следует оценить, с одной стороны, приложена ли сила в ядре сечения или вне его, а с другой — как расположена нулевая линия. Заданной точке приложения силы, расположенной в третьей четверти сечения, соответствует нулевая линия, проходящая через первую четверть, причем по касательной к границе ядра сечения. В области действия сжимающей силы на эпюре σ должен стоять

знак «минус», за нулевой линией — знак «плюс». Этим условиям удовлетворяет вариант 2 на рис. 2.29.

Правильный ответ: 2.

Тест 2.12. Эпюра нормальных напряжений при действии растягивающей силы P имеет следующий вид (рис. 2.30):

- 1) вариант 1;
- 2) вариант 2;
- 3) вариант 3;
- 4) вариант 4;
- 5) вариант 5.

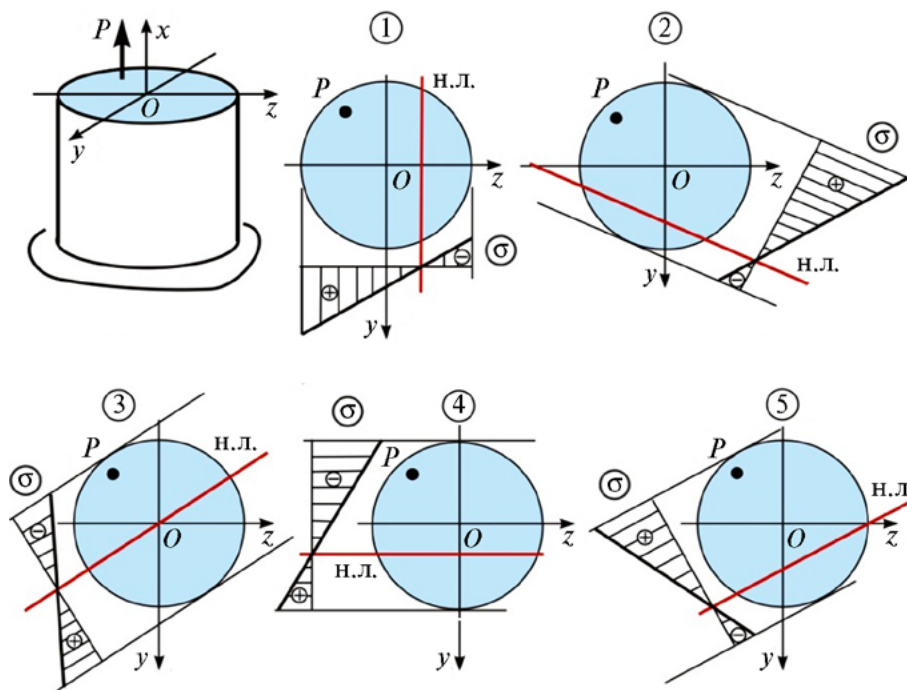


Рис. 2.30. Варианты эпюр нормальных напряжений

Комментарий. Растягивающая сила приложена вблизи внешней границы поперечного сечения, т.е. вне ядра сечения. Поэтому нормальные напряжения в сечении должны быть двух знаков. Это условие выполняется во всех пяти представленных случаях. Заданной точке приложения силы, расположенной в третьей четверти, должна соответствовать нулевая линия, пересекающая первую четверть, не параллельная ни одной из главных осей. Причем в области действия растягивающей силы должен стоять знак «плюс», а за нулевой линией — знак «минус». Этим условиям удовлетворяет вариант 5 на рис. 2.30.

Правильный ответ: 5.

Глава 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Ключевые правила и формулы

При изучении равновесия идеально прямого гибкого стержня из упругого материала, находящегося под действием центрально приложенной к верхнему сечению сжимающей силы P (рис. 3.1), возможны следующие три случая.

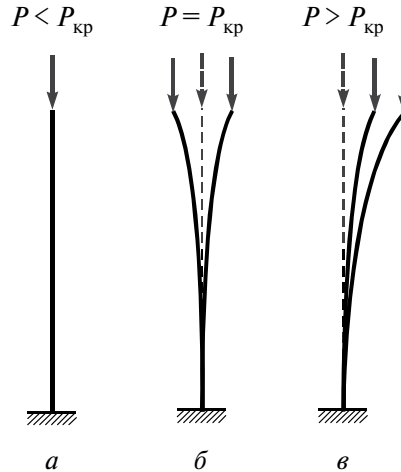


Рис. 3.1 Устойчивая (а), неустойчивая (б) формы равновесия и потеря устойчивости (в)

1. Сжимающая продольная сила P относительно невелика. Если стержень с помощью какой-либо поперечной нагрузки слегка отклонить, а затем эту нагрузку снять, то стержень вновь примет первоначальную прямолинейную форму равновесия (рис. 3.1, а). В этом случае ($P < P_{кр}$) прямолинейная форма равновесия стержня является *устойчивой*.

2. При достижении силой P критического значения $P = P_{кр}$ теоретически возможны как прямолинейная, так и искривленная формы равновесия (рис. 3.1, б). Однако прямолинейная форма равновесия становится *неустойчивой*.

3. При дальнейшем, даже незначительном увеличении сжимающей силы ($P > P_{кр}$) происходит резкое нарастание прогибов, возникают значительные дополнительные деформации и напряжения изгиба. Такое явление называется *потерей устойчивости* (рис. 3.1, в).

Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (3.1)$$

где l_0 — приведенная длина стержня, $l_0 = \mu l$; μ — коэффициент приведения длины, который зависит от вида опорных закреплений стержня.

Выражения для критических сил и значения коэффициента приведения длины в основных случаях опорных закреплений приведены на рис. 3.2. В зависимости от условий закрепления стержня потеря устойчивости может происходить в одной из двух главных плоскостей инерции Oxy или Oxz .

Критические силы, соответствующие потере устойчивости стержня в главных плоскостях, определяют по формулам:

$$P_{кр}^{(y)} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(\mu_y l)^2}, \quad P_{кр}^{(z)} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu_z l)^2}, \quad (3.2)$$

критические напряжения — по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (3.3)$$

где λ — гибкость стержня, $\lambda = l_0/i$; i — радиус инерции поперечного сечения.

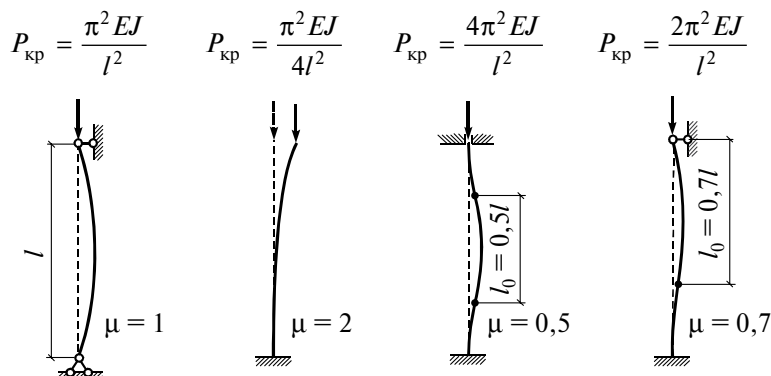


Рис. 3.2 Формы потери устойчивости и значения коэффициентов приведения при различных граничных условиях сжатого стержня

Формулы Эйлера для критической силы и критических напряжений для стержней из малоуглеродистой стали с пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 200 \div 220$ МПа можно использовать в пределах упругой работы материала при гибкости $\lambda \geq 100$.

При работе стержня за пределом упругости и значениях гибкости $60 \leq \lambda < 100$ можно использовать:

эмпирическую формулу Тетмайера — Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (3.4)$$

где для указанной стали $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа,

или квадратичную зависимость

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{пц}) \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, \quad (3.5)$$

где σ_T — предел текучести; $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности стали.

При гибкости $\lambda < 60$ принимается $\sigma_{кр} = \sigma_T$.

Коэффициент запаса устойчивости стержня можно определить как отношение критической силы $P_{кр}$ к заданному нормативному значению P_n продольной сжимающей силы

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_n}. \quad (3.6)$$

3.1. Устойчивость стержней

Тест 3.1. При сжатии гибкого стержня критической называется:

- 1) сила, вызывающая пластические деформации в стержне;
- 2) сила, при которой в стержне возникают предельные деформации;
- 3) сила, при которой в сжатом стержне возникают деформации изгиба;
- 4) наименьшая сжимающая сила, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной искривленная форма;

- 5) сила, при которой сжатый стержень разрушается.

Комментарий. При достижении силой P критического значения $P = P_{кр}$ теоретически возможны как прямолинейная, так и искривленная формы равновесия (см. рис. 3.1, б). Однако прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Правильный ответ: 4.

Тест 3.2. Критическая сила Эйлера для сжатого гибкого стержня, шарнирно опертого на концах, равна:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2};$

- 2) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l};$

- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{i^2};$

- 4) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EF}{l^2};$

- 5) $P_{кр} = \frac{\pi EJ}{l^2}.$

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1); в случае шарнирного закрепления $\mu = 1$.

Правильный ответ: 1.

Тест 3.3. Критическое напряжение в сжатом гибком стержне при его деформировании в пределах упругости определяют по формуле:

- 1) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2};$

- 2) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{i^2};$

- 3) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{F};$

- 4) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{l^2};$

- 5) $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{l}.$

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1).

Формула для критических напряжений получается при делении силы на площадь поперечного сечения:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \frac{J}{A} = \frac{\pi^2 E i^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Правильный ответ: 1.

Тест 3.4. Для гибкого стержня, центрально сжатого силой P (рис. 3.3), укажите правильную формулу для определения критической силы:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2};$

- 2) $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$;
- 4) $P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 5) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}$.

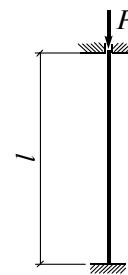


Рис. 3.3. Схема гибкого стержня

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1). В данном случае $\mu = 0,5$.

Правильный ответ: 2.

Тест 3.5. Для гибкого стержня, центрально сжатого силой P (рис. 3.4), укажите правильную формулу для определения критической силы:

- 1) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 2) $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 3) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$;
- 4) $P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$;
- 5) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{2l^2}$.

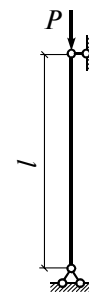


Рис. 3.4. Схема гибкого стержня

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1). В случае шарнирного закрепления $\mu = 1$.

Правильный ответ: 1.

Тест 3.6. Стальной стержень длиной $l = 4,3$ м имеет разные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.5). Радиусы инерции поперечного сечения: $i_z = 5,6$ см, $i_y = 3,17$ см.

Наибольшее значение гибкости стержня равно:

- 1) 154;
- 2) 123;
- 3) 195;
- 4) 144;
- 5) 182.

Комментарий. Гибкость стержня в плоскости Oxz :

$$\lambda_z = \frac{\mu_z \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 430}{3,17} = 95,0.$$

Гибкость стержня в плоскости Oxy :

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_z} = \frac{2 \cdot 430}{5,6} = 153,6 = 154.$$

Значит, наибольшее значение гибкости стержня равно $\lambda_{нб} = \lambda_y = 154$.

Правильный ответ: 1.

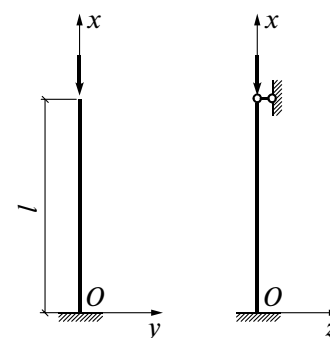


Рис. 3.5. Схема гибкого стержня

Тест 3.7. Стальной стержень длиной $l = 4,0$ м имеет разные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.6). Радиусы инерции поперечного сечения: $i_z = 6,71$ см, $i_y = 3,0$ см.

Наибольшее значение гибкости стержня равно:

- 1) 167;
- 2) 102;
- 3) 119;
- 4) 178;
- 5) 181.

Комментарий. Гибкость стержня в плоскости Oxz :

$$\lambda_z = \frac{\mu_z \cdot l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 400}{3} = 66,7.$$

Гибкость стержня в плоскости Oxy :

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_z} = \frac{2 \cdot 400}{6,71} = 119,2 = 119.$$

Значит, наибольшее значение гибкости стержня равно $\lambda_{\text{нб}} = \lambda_z = 119$.

Правильный ответ: 3.

Тест 3.8. Сжатый деревянный стержень квадратного сечения 10×10 см, длиной $l = 5,0$ м имеет разные условия закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.7). Модуль упругости материала стержня $E = 10^4$ МПа. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 5;
- 2) 6;
- 3) 7;
- 4) 8;
- 5) 9.

Комментарий. Так как стержень имеет разные опорные закрепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , но одинаковые радиусы инерции $i = i_z = i_y$, то возможная потеря устойчивости произойдет в плоскости Oxy , где коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$ является наибольшим.

Радиус инерции сечения:

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{10^4}{12 \cdot 10^2}} = \frac{10}{\sqrt{12}} = 2,89 \text{ см.}$$

Наибольшая гибкость $\lambda = \lambda_{\text{нб}} = \frac{\mu_y l}{i} = \frac{0,7 \cdot 500}{2,89} = 121,1 > 70$, где предельная гибкость

для дерева $\lambda_d = 70$.

Тогда критические напряжения определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10^4}{121,1^2} = 6,72 \text{ МПа} \approx 7 \text{ МПа.}$$

Правильный ответ: 3.

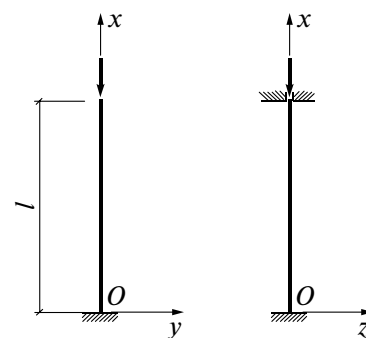


Рис. 3.6. Схема гибкого стержня

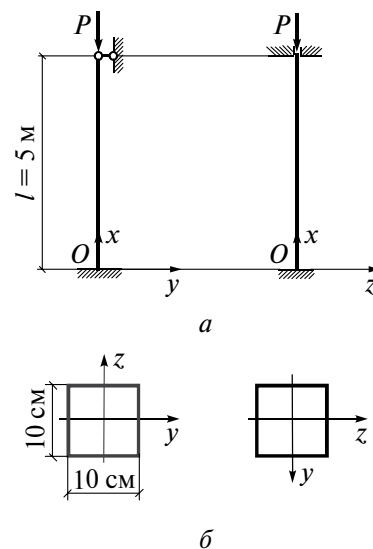


Рис. 3.7. Схема гибкого стержня (а) и его сечение (б)

Тест 3.9. Центральнo сжатый стальной стержень двутаврового сечения I 22, длиной $l = 2,2$ м одинаково закреплён в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz (рис. 3.8). Модуль упругости материала стержня $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Радиусы инерции $i_z = 9,13$ см, $i_y = 2,27$ см. Критическое напряжение равно, МПа:

- 1) 20;
- 2) 31;
- 3) 14;
- 4) 55;
- 5) 24.

Комментарий. Так как стержень имеет одинаковые опорные крепления в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz , то при определении $\sigma_{кр}$ необходимо брать наименьшее значение радиуса инерции поперечного сечения.

Наибольшая гибкость:

$$\lambda = \lambda_{нб} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 220}{2,27} = 193,83 > 100.$$

Критические напряжения определяют по формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{193,83^2} = 55,11 \text{ МПа} \approx 55 \text{ МПа}.$$

Правильный ответ: 4.

Тест 3.10. Критической силой при сжатии гибкого стержня называется наименьшая сила, при которой возможны:

- ☐ 1) прямолинейная форма равновесия;
- ☐ 2) искривленная форма равновесия;
- ☐ 3) возникновение предельных деформаций;
- ☐ 4) возникновение пластических деформаций;
- ☐ 5) возникновение больших деформаций.

Комментарий. При достижении силой P критического значения $P = P_{кр}$ теоретически возможны как прямолинейная, так и искривленная формы равновесия (см. рис. 3.1, б). Однако прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Правильные ответы: 1; 2.

Тест 3.11. Критическая сила Эйлера для сжатого гибкого стержня:

- ☐ 1) прямо пропорциональна модулю упругости E ;
- ☐ 2) прямо пропорциональна моменту инерции J ;
- ☐ 3) обратно пропорциональна квадрату длины стержня l^2 ;
- ☐ 4) обратно пропорциональна модулю упругости E ;
- ☐ 5) обратно пропорциональна моменту инерции J .

Комментарий. Критическую силу Эйлера $P_{кр}$ при различных случаях закрепления концов стержня определяют по формуле (3.1).

Правильные ответы: 1; 2; 3.

Тест 3.12. Критическое напряжение в сжатом гибком стержне при его деформировании в пределах упругости:

- ☐ 1) прямо пропорционально модулю упругости E ;
- ☐ 2) обратно пропорционально квадрату коэффициента гибкости λ^2 ;

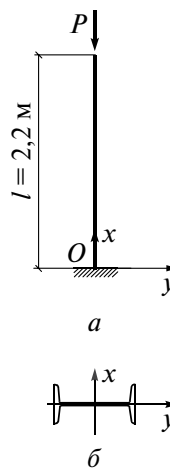


Рис. 3.8. Схема гибкого стержня (а) и его сечение (б)

- 3) обратно пропорционально модулю упругости E ;
- 4) прямо пропорционально квадрату коэффициента гибкости λ^2 ;
- 5) обратно пропорционально площади поперечного сечения F .

Комментарий. Критическое напряжение в сжатом гибком стержне при его деформировании в пределах упругости определяют по формуле (3.3).

Правильные ответы: 1; 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учебник / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. — Москва : ИНФРА-М, 2011. — 636 с. — ISBN 978-5-16-003872-8.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов) : учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. — Москва : Издательство АСВ, 2013. — 256 с. — ISBN 978-5-93093-867-8.
3. Сопротивление материалов (с примерами решения задач) : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Строительство» / Н.М. Атаров, Г.С. Варданян [и др.]; под ред. Н.М. Атарова. — Москва : КНОРУС, 2017. — 332 с. — ISBN 978-5-406-04555-8.
4. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах : учебное пособие / Н.М. Атаров. — Москва : ИНФРА-М, 2010. — 407 с. — ISBN 978-5-16-003871-1.
5. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2012. — 64 с. — ISBN 978-5-7264-0626-8.
6. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 2 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2013. — 97 с. — ISBN 978-5-7264-0738-8.
7. Сопротивление материалов : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 3 / Н.М. Атаров [и др.]. — Москва : МГСУ, 2014. — 73 с. — ISBN 5-7264-0484-X.
8. Сидоров В.Н. Сопротивление материалов : учебник / В.Н. Сидоров; под редакцией В.А. Смирнова. — Москва : Издательство «Архитектура—С», 2013. — 304 с. — ISBN 978-5-9647-0242-9.