

Пример расчета рамы на устойчивость

Рассмотрим уже знакомую нам раму под действием сжимающих сил, приложенных к стойкам.

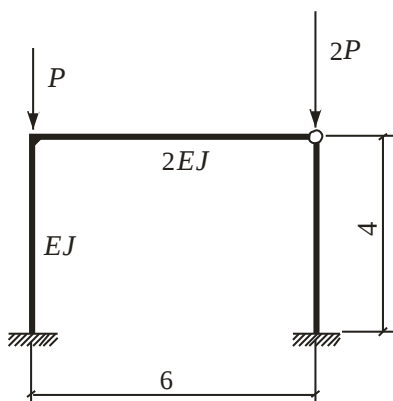


Рис.1

Будем следовать порядку расчета, который был изложен в основном файле «Гл.10_Устойчивость» п.10.7, стр.11.

1. Получить основную систему метода перемещений, закрепив жесткие узлы от поворотов, а пояса от смещений.

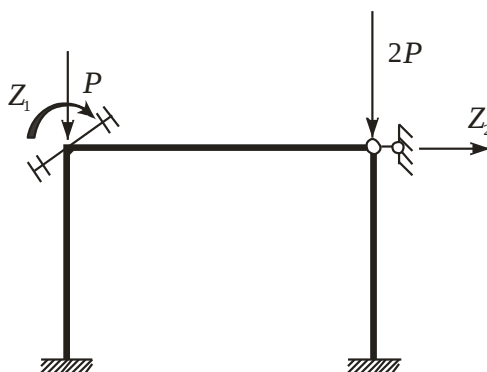


Рис.2

2. Для сжатых стоек ввести обозначения для параметров, зависящих от приложенной сжимающей силы, длины и жесткости: $v_i = k_i l_i = l_i \sqrt{\frac{P_i}{EJ_i}}$;

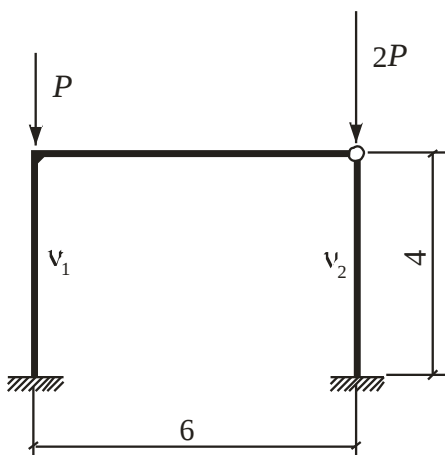


Рис.3

$$v_1 = 4\sqrt{\frac{P}{EJ}}, \quad v_2 = 4\sqrt{\frac{2P}{EJ}}$$

3. Составить соотношения между ними, выразив все через одно, например через v_1 , по принципу: $v_i = \alpha_i v_1$. Тогда этот параметр становится основным, определяющим критическую силу P_1 .

$$v_2 = \sqrt{2}v_1$$

4. Построить единичные эпюры в основной системе метода перемещений. При этом для сжатых стоек эпюры будут криволинейными и строятся по «новым» таблицам.

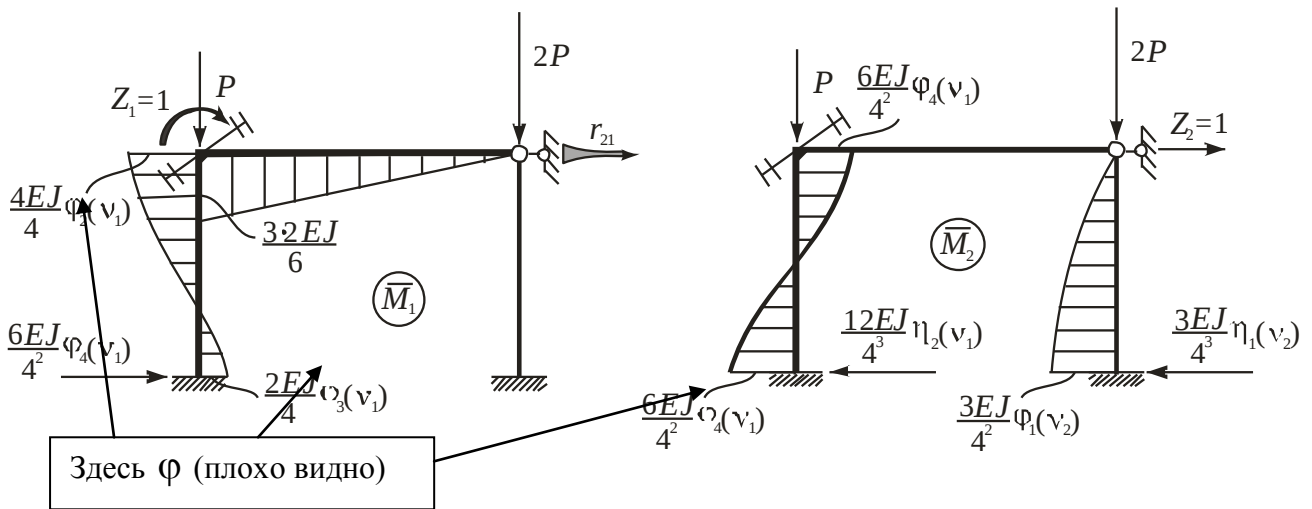


Рис.4

5. Вырезанием узлов и поясов определить единичные реакции r_{ij} в установленных в соответствии с методом перемещений связях. При этом, для сжатых стоек реакции определяются с использованием «новых» таблиц и, в связи с этим, содержат функции $\varphi_j(v_i)$ или $\eta_j(v_i)$.

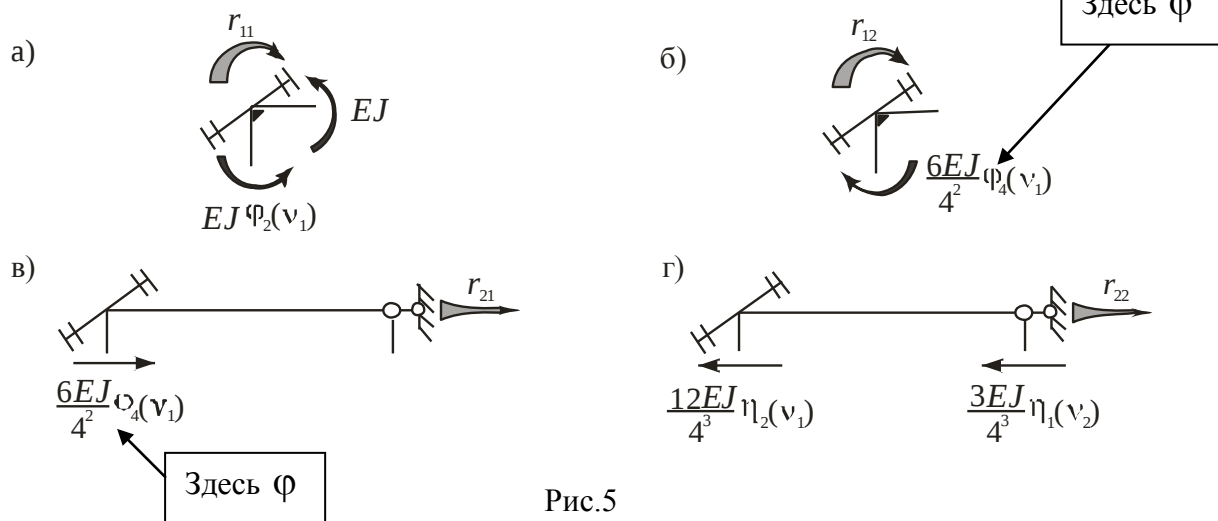


Рис.5

$$r_{11} = EJ[1 + \varphi_2(v_1)], \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{3}{8}EJ\varphi_4(v_1), \quad r_{22} = EJ\left[\frac{12}{64}\eta_2(v_1) + \frac{3}{64}\eta_1(v_2)\right].$$

6. Составляется система канонических уравнений метода перемещений. Учитывая, что поперечных нагрузок в задачах на определение критических сил нет, и, следовательно, грузовой эпюры тоже нет, все $R_{iq} = 0$. Таким образом, в случае двух неизвестных система имеет вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

7. Такая система называется однородной и имеет два решения:

1. $Z_1 = Z_2 = 0$ – тривиальное решение (отсутствие потери устойчивости),
2. $Z_1 \neq 0, Z_2 \neq 0$ – потеря устойчивости. Но тогда определитель должен быть равен нулю:

$$\det = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = r_{11}r_{22} - (r_{12})^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \det &= EJ[1 + \varphi_2(v_1)]EJ\left[\frac{12}{64}\eta_2(v_1) + \frac{3}{64}\eta_1(v_2)\right] - \left[\frac{3}{8}EJ\varphi_4(v_1)\right]^2 = \\ &= EJ^2[1 + \varphi_2(v_1)][4\eta_2(v_1) + \eta_1(v_2)]\frac{3}{64} - EJ^2\frac{9}{64}[\varphi_4(v_1)]^2 = 0. \end{aligned}$$

8. Получаем трансцендентное уравнение, зависящее от основного параметра v_1 . Подбором (или как-то ещё – Excel, Маткад) находится наименьший корень этого уравнения.

$$[1 + \varphi_2(v_1)][4\eta_2(v_1) + \eta_1(v_2)] - 3[\varphi_4(v_1)]^2 = 0.$$

Привожу подбор корня «по-старинке» при помощи таблицы. Берем наугад значения для v_1 и смотрим, как меняется детерминант. При переходе через ноль в прежние времена, когда не было подробных таблиц, дальнейшие действия сводились к графической линейной интерполяции (см.далее).

Сейчас можно уточнять и уточнять или записать в Excel'е это уравнение и искать его корень (Этим каждый может заняться по своему усмотрению).

v_1	v_2	$\varphi_2(v_1)$	$\eta_2(v_1)$	$\eta_1(v_2)$	$\varphi_4(v_1)$	$[\] [\]$	$3[\]^2$	det
0	0	1	1	1	1	10,0	3,0	7,0
1	1,414	0,96622	0,89988	0,19188	0,98321	7,454	2,9	4,55
1,7	2,404	0,89978	0,70997	-1,398	0,95081	2,739	2,712	0,027
1,8	2,545	0,88708	0,6747	-1,7056	0,9447	1,874	2,677	-0,803

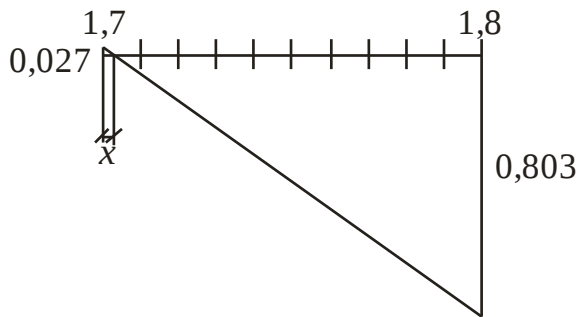


Рис.6

По графику получаем $x = 0,003$, и $v_1 = 1,703$. Графическое решение можно подкрепить составлением пропорции: $\frac{0,027}{x} = \frac{0,803}{0,1 - x}$.

То есть $(0,1 - x)0,027 = 0,803x$ или $0,0027 = 0,83x$, откуда $x = 0,0032$, что уточняет результат, полученный графически.

Разумеется, в данном случае график можно было и не строить, так как при $v_1 = 1,7$ детерминант практически уже равен нулю. Но методику всё-таки надо было показать.

Принимаем $v_1 = 1,703$.

Определяем критическую силу по формуле

$$P = \frac{v_1^2 EJ}{4^2} = \frac{(1,703)^2 EJ}{4^2} = 0,181 EJ.$$

9. Проверим «местную» устойчивость правой стойки – возможность её потери устойчивости без смещения узлов.

С учетом условий закрепления по формуле Эйлера

$$2P_{кр}^э = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7 \cdot 4)^2} = 1,259 EJ.$$

$$P_{кр}^э = 0,628 EJ > 0,181 EJ.$$

Делаем вывод о том, местная устойчивость обеспечена.

Проверка устойчивости левой стойки не требуется, так как приложенная сила там меньше, а условия закрепления более жесткие: заделка-заделка.

Далее следует показать форму потери устойчивости.

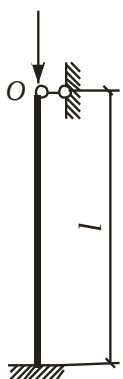


Рис.7

10. Форма потери устойчивости.

Установлено, что $P_{кр} = 0,181 EJ$, при этом $v_1 = 1,703$, $v_2 = 2,408$.

Выпишем значения функций, входящих в детерминант, а также во все ординаты единичных эпюр:

v_1	v_2	$\varphi_2(v_1)$	$\eta_2(v_1)$	$\eta_1(v_2)$	$\varphi_4(v_1)$	$\varphi_3(v_1)$	$\varphi_1(v_2)$	
1,703	2,408	0,89941	0,70894	-1,4064	0,9506	1,05306	0,52646	

Здесь в первой таблице добавлены 2 столбца, соответствующие тем функциям, которые не вошли в выражение детерминанта, но присутствуют на единичных эпюрах.

Вторая таблица позволяет ещё раз проверить найденный корень трансцендентного уравнения. Она показывает, что даже приближенный графический способ позволил достаточно точно найти корень этого уравнения.

$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$	$0,75 \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}^2$	det
2,715	2,711	0,004

Вспомним, что определитель системы канонических уравнений равен нулю, и поэтому найти значения перемещений Z_1 и Z_2 нельзя, но, используя любое из двух уравнений, можно найти соотношение между ними (напоминает проблему построения собственных векторов).

Воспользуемся первым каноническим уравнением: $r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0$.

Тогда
$$Z_2 = -\frac{r_{11}}{r_{12}} Z_1.$$

Имеем
$$r_{11} = EJ[1 + \varphi_2(v_1)] = EJ(1 + 0,8994) = 1,8994 EJ,$$

$$r_{12} = -\frac{3}{8} EJ\varphi_4(v_1) = -\frac{3}{8} EJ \cdot 0,9506 = -0,3565 EJ,$$

$$Z_2 = -\frac{1,8994}{-0,3565} Z_1 = 5,328 Z_1. \quad \text{Примем } Z_1 = 1, \quad Z_2 = 5,328.$$

Построим эпюру моментов, соответствующую форме потери устойчивости:

$$M_{\text{п.уст.}} = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 = \bar{M}_1 + 5,328 \bar{M}_2.$$

Единичные эпюры:

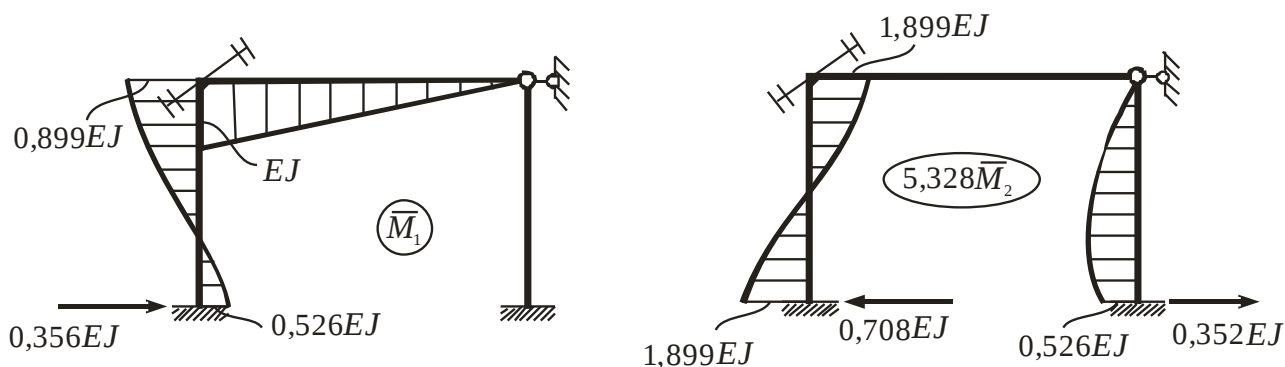


Рис.8

Суммарная эпюра и форма потери устойчивости:

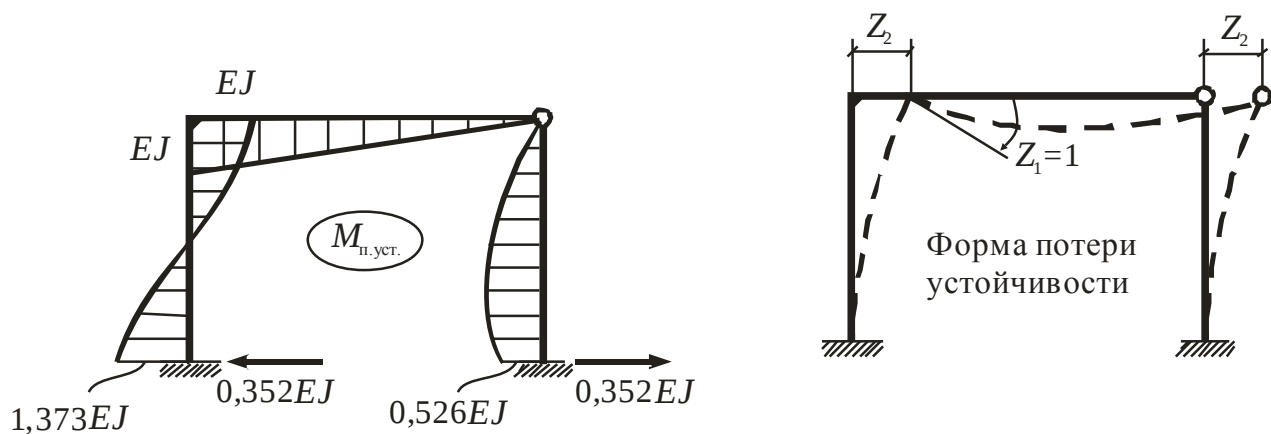


Рис.9

Можно видеть, что жесткий узел находится в равновесии. Уравновешены также и горизонтальные реакции.

11. Деформационный расчет рамы на заданную поперечную нагрузку

Рассмотрим расчет рамы при совместном действии поперечных и продольных нагрузок (рис.10,а).

1. Примем $P = 0,5P_{кр} = 0,0906 EJ$. При этом $v_1 = 4\sqrt{\frac{0,0906}{EJ}} = 1,204$, $v_2 = 1,703$.

2. Выпишем значения функций, входящих во все ординаты единичных и грузовой эпюр:

v_1	v_2	$\varphi_2(v_1)$	$\eta_2(v_1)$	$\eta_1(v_2)$	$\varphi_4(v_1)$	$\varphi_3(v_1)$	$\varphi_1(v_2)$	$\varphi_6(v_1)$
1,204	1,703	0,95073	0,85478	-0,1785	0,9756	1,0253	0,78823	1,0313

и построим грузовую (рис.10,б) и единичные (рис.11) эпюры в основной системе метода перемещений.

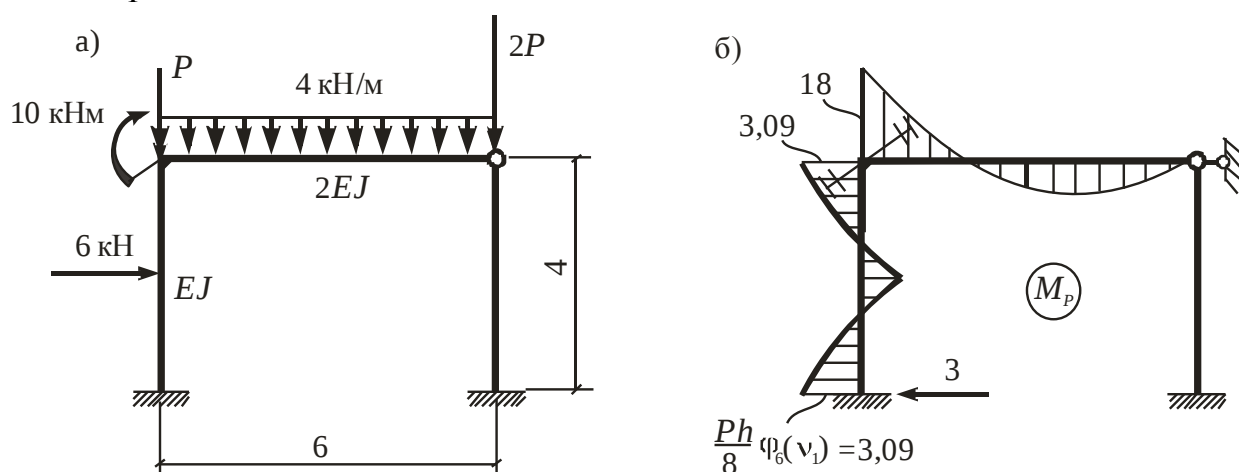


Рис.10

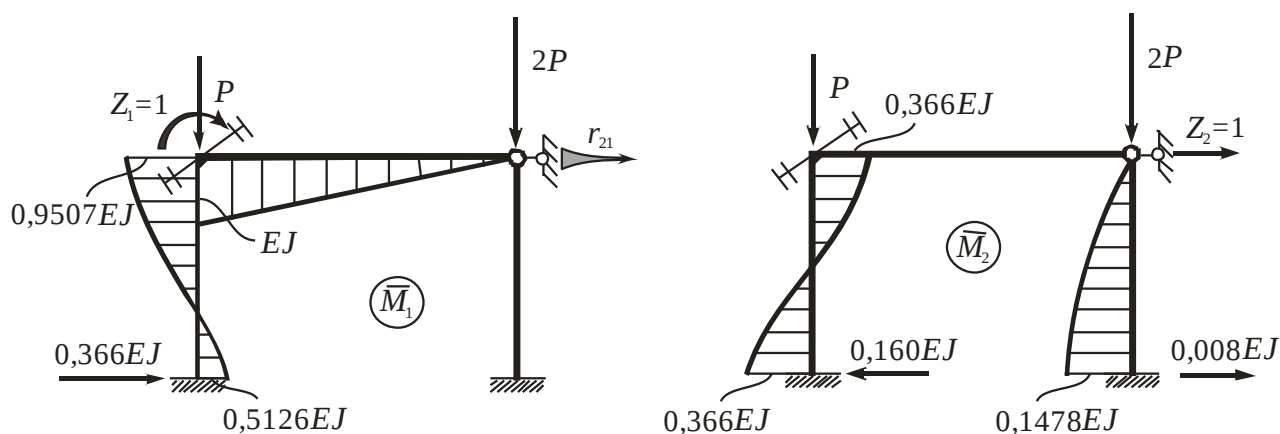


Рис.11

3. Вырезанием узлов и поясов определяем единичные r_{ij} и грузовые R_{iP} реакции в установленных в соответствии с методом перемещений связях (рис.12).

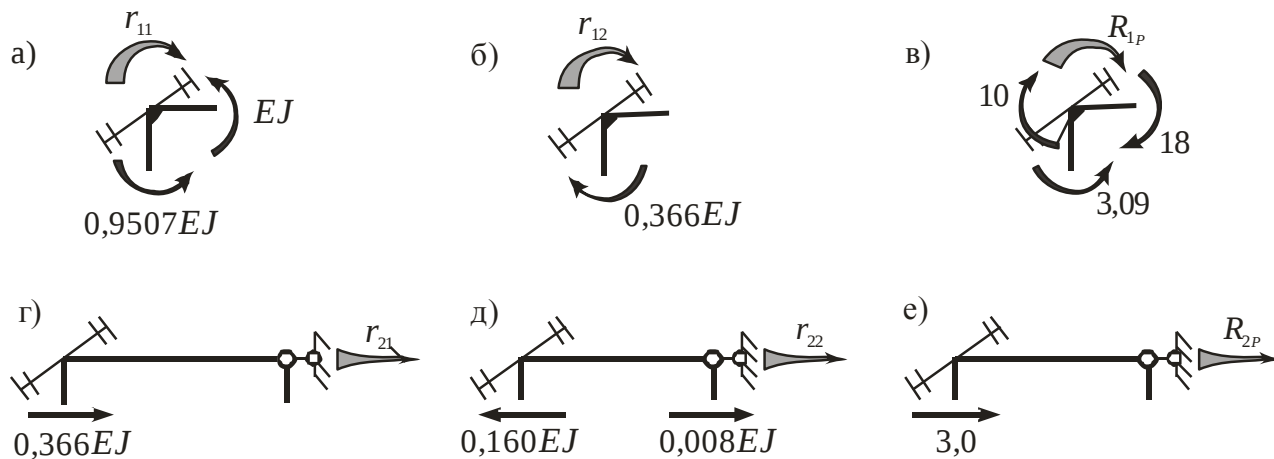


Рис.12

$$r_{11} = 1,9507 EJ, \quad r_{12} = r_{21} = -0,366 EJ, \quad r_{22} = 0,152 EJ, \\ R_{1P} = -24,91, \quad R_{2P} = -3,0.$$

4. Составляем и решаем систему канонических уравнений метода перемещений

$$1,9507 EJZ_1 - 0,366Z_2 - 24,91 = 0, \\ -0,366Z_1 + 0,152Z_2 - 3,0 = 0.$$

$$Z_1 = 30,05 / EJ, \quad Z_2 = 92,09 / EJ.$$

5. Строим окончательную эпюру моментов $M_{ок.} = \bar{M}_1Z_1 + \bar{M}_2Z_2 + M_P$:

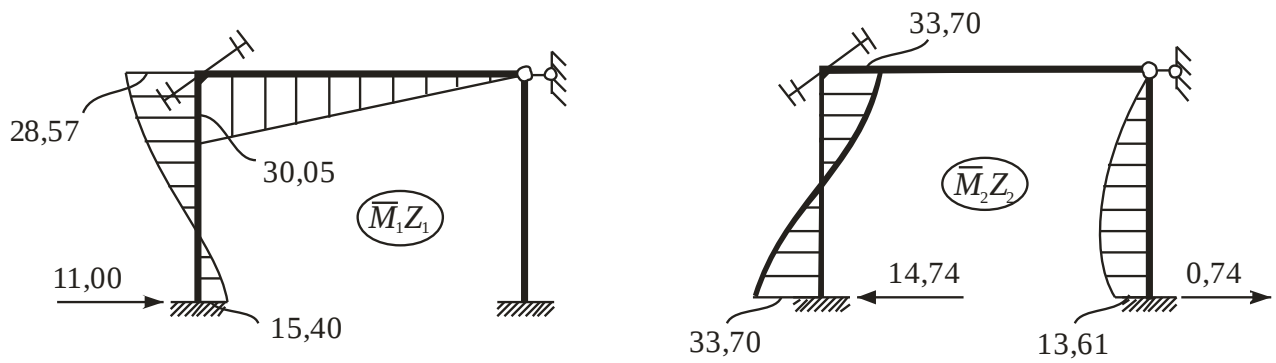


Рис.13

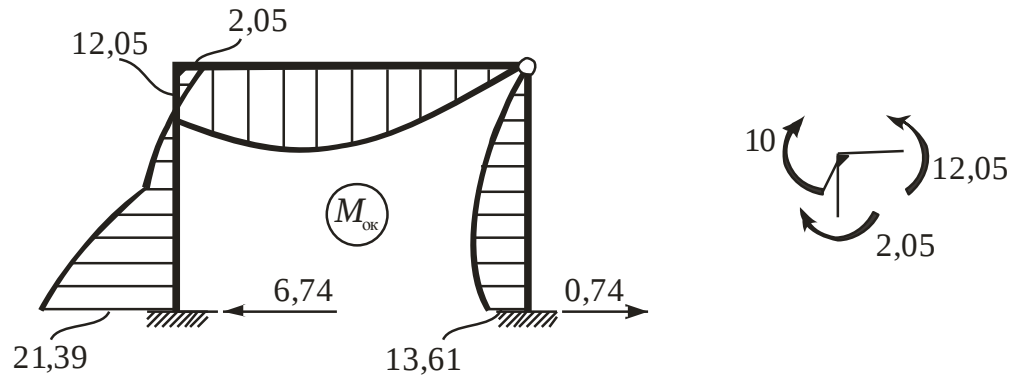


Рис.14

Можно видеть, что жесткий узел находится в равновесии. Уравновешены также и горизонтальные реакции.

Сравним эпюру изгибающих моментов с той, что была получена ранее для рамы в отсутствие сжимающих нагрузок

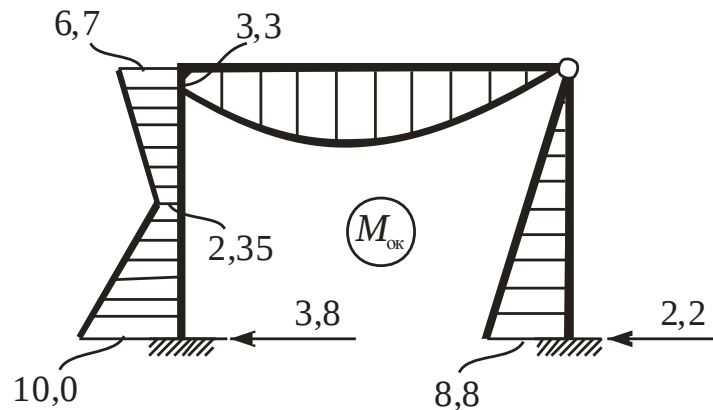


Рис.15

Приведем также для сравнения значения перемещений, полученные ранее.

$$Z_1 = 21,28 / EJ, \quad Z_2 = 46,86 / EJ.$$

Можно видеть, что при действии продольных сил угол поворота жесткого узла Z_1 увеличился в 1,5 раза, а горизонтальное перемещение верхнего пояса Z_2 – в 2 раза. Заметно изменилась количественно и качественно и эпюра изгибающих моментов.