



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.Г. Паушкин

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рекомендовано

Учебно-методическим советом НИУ МГСУ в качестве учебного пособия
для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность,
27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство
(№ 3 от 12.03.2024)

ISBN 978-5-7264-

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2024

УДК 539.3
ББК 30.121
П21

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент *В.И. Иванов-Дятлов*,
доцент кафедры строительной механики
Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ);
доктор технических наук, профессор *В.И. Андреев*,
профессор кафедры сопротивления материалов НИУ МГСУ

Паушкин, Александр Глебович.

П21

Техническая механика. Решение задач по расчету стержней и стержневых систем [Электронный ресурс] : [учебное пособие для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство] / А.Г. Паушкин ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра сопротивления материалов. — Электрон. дан. и про- гр. (9,5 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2024. — URL: <http://lib.mgsu.ru>. — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-7264-xxxx-x (сетевое)

ISBN 978-5-7264-xxxx-x (локальное)

Учебное пособие может использоваться для изучения дисциплины бакалавриата «Техническая механика». Целью изучения дисциплины является освоение обучающимися компетенций, позволяющих грамотно решать простейшие задачи сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. В учебное пособие включены следующие разделы: «Центральное растяжение и сжатие прямого стержня», «Геометрические характеристики сечений», «Плоский прямой изгиб стержня», «Кинематический анализ стержневых систем», «Эпюры внутренних усилий в рамах», «Определение перемещений стержневых систем», «Статически неопределимые системы», «Устойчивость сжатых стержней».

Для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство.

Учебное электронное издание

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Учебное электронное издание

Паушкин Александр Глебович

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Светличная*
Корректор *Ю.М. Викторова*
Верстка и дизайн титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2010, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию *xx.xx.202x*. Объем данных 9,5 Мб.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 14-23, (499) 183-91-90, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ	7
1.1. Основные определения и формулы	7
1.1.1. Продольная сила	7
1.1.2. Способы построения эпюры N	9
1.1.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении	9
1.1.4. Определение деформаций	10
1.1.5. Расчеты на прочность по строительным нормам	12
1.2. Примеры решения задач	14
1.2.1. Расчет стержня ступенчато-постоянного сечения	14
1.2.2. Подбор сечения стального стержня при растяжении	18
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ	22
2.1. Основные определения и формулы	22
2.1.1. Понятие о геометрических характеристиках сечений	22
2.1.2. Статические моменты. Определение центра тяжести	23
2.1.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей	24
2.1.4. Моменты инерции при повороте осей	25
2.1.5. Понятие о главных осях и моментах инерции	25
2.1.6. Определение моментов инерции простейших сечений	26
2.1.7. Радиусы инерции	29
2.1.8. Моменты сопротивления сечения	29
2.2. Примеры решения задач	30
2.2.1. Сечение с одной осью симметрии 1	30
2.2.2. Сечение с одной осью симметрии 2	34
2.2.3. Несимметричное сечение из прокатных профилей	37
3. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ	41
3.1. Основные определения и формулы	41
3.1.1. Внутренние силы и правило знаков	41
3.1.2. Способы определения внутренних усилий	42
3.1.3. Балки с промежуточными шарнирами	46
3.1.4. Напряжения	48
3.1.5. Расчеты на прочность при изгибе	52
3.2. Примеры решения задач	52
3.2.1. Расчет жестко-защемленной балки с консолью	52
3.2.2. Расчет балки на двух опорах	57
3.2.3. Расчет балки с промежуточным шарниром	60
3.2.4. Подбор сечения балки	63

4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	73
4.1. Основные определения и формулы.....	73
4.2. Примеры решения задач	75
4.2.1. Примеры вычисления числа степеней свободы W	75
4.2.2. Исследование схемы балки с двумя шарнирами	76
4.2.3. П-образная рама на двух опорах.....	77
4.2.4. Пример мгновенно-изменяемой рамы.....	78
4.2.5. Трехшарнирная рама	79
4.2.6. Трехшарнирная рама с затяжкой	80
5. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В РАМАХ	81
5.1. Основные определения и формулы.....	81
5.2. Примеры решения задач	82
5.2.1. Расчет рамы 1	82
5.2.2. Расчет рамы 2	88
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	93
6.1. Основные определения и формулы.....	93
6.1.1. Формула Мора	93
6.1.2. Определение перемещений от температуры	96
6.2. Примеры решения задач	97
6.2.1. Подбор сечения и определение перемещений в балке от нагрузки	97
6.2.2. Определение перемещений в раме 1 от нагрузки.....	99
6.2.3. Определение перемещений в раме 2 от нагрузки	101
6.2.4. Определение перемещений в раме от температуры	109
7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	111
7.1. Основные определения и формулы	111
7.2. Примеры решения задач.....	113
7.2.1. Расчет один раз статически неопределимой рамы	113
7.2.2. Расчет два раза статически неопределимой балки	118
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	121
8.1. Основные определения и формулы.....	121
8.1.1. Критическая сила	121
8.1.2. Практический метод расчета на устойчивость	123
8.2. Примеры решения задач	126
8.2.1. Определение критической силы для стального стержня составного сечения	126
8.2.2. Определение критической и допускаемой силы для стального стержня из двух двутавров	129
8.2.3. Подбор сечения деревянного стержня квадратного сечения	131
8.2.4. Подбор сечения стержня из стального двутавра	134
Библиографический список.....	141
ПРИЛОЖЕНИЯ	143

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие включает подробные примеры решения задач, которые самостоятельно выполняются студентами в рамках расчетно-графических работ (РГР) и подготовки к мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации. Предлагаемые решения сопровождаются краткими пояснениями по теории. Перед выполнением расчетно-графических работ студент должен разобрать и понять методику решения задач с целью дальнейшего применения полученной информации для выполнения РГР. Для лучшего освоения материала учащемуся рекомендуется ознакомиться с учебной литературой, рекомендуемой кафедрой сопротивления материалов [1, 2, 3, 4].

Учебное пособие охватывает разделы: «Центральное растяжение и сжатие прямого стержня», «Геометрические характеристики сечений», «Плоский прямой изгиб стержня», «Кинематический анализ стержневых систем», «Эпюры внутренних усилий в рамах», «Определение перемещений стержневых систем», «Статически неопределимые системы», «Устойчивость сжатых стержней».

В настоящем учебном пособии учтены последние изменения в строительных нормах, а также актуализированный сортамент.

1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

1.1.1. Продольная сила

Когда равнодействующие нагрузок направлены вдоль оси прямого стержня, возникает вид напряженно-деформированного состояния, который называют *центральным растяжением и сжатием*. На рис. 1.1, а приведен пример центрального растяжения. Стержень загружен двумя одинаковыми внешними сосредоточенными силами P , расположенными на равных расстояниях a от оси стержня. Если привести эти силы к точке, расположенной на оси стержня, то их равнодействующая будет равна $2P$.

В поперечном сечении прямого стержня при таком нагружении из внутренних усилий остается только одно — *продольная сила N* . Так как она, действуя вдоль оси стержня, направлена по нормали к поперечному сечению, то ее также называют *нормальной силой*. В данном примере эта продольная сила будет равна $2P$, как будет показано далее.

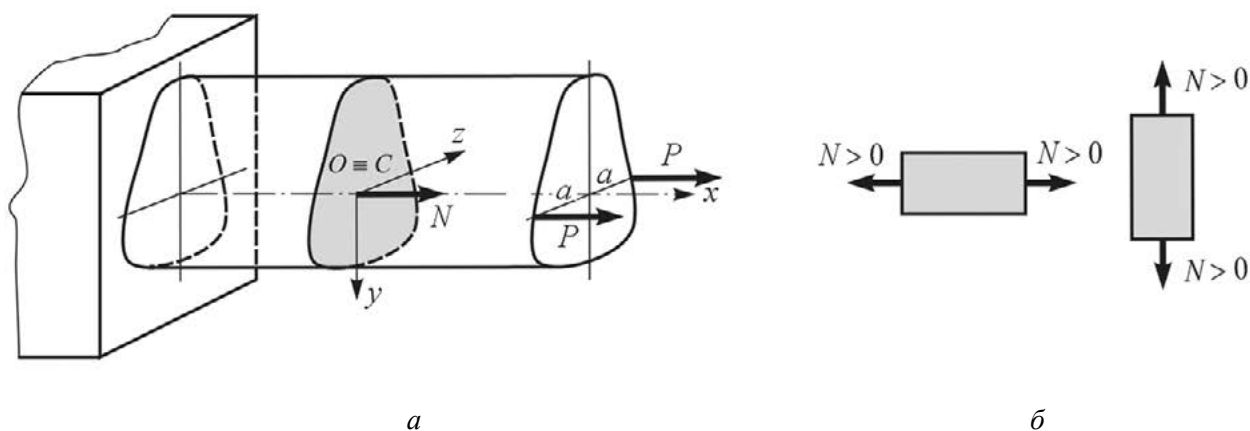


Рис. 1.1. Стержень при центральном растяжении и правило знаков продольной силы N

Напомним, что *ось стержня* — это линия, проходящая через *центры тяжести поперечных сечений* и ориентированная вдоль стержня. На рис. 1.1, а ось стержня показана прямой линией Ox .

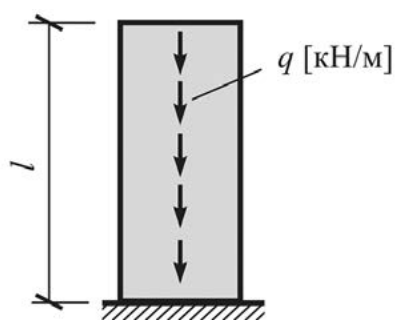


Рис. 1.2. Равномерно распределенная нагрузка q

Собственный вес стержня можно представить в виде *распределенной нагрузки q* . Она обычно изображается рядом стрелочек, действующих вдоль оси стержня, и измеряется в кН/м. На рис. 1.2 показан стержень с постоянным поперечным сечением.

При постоянном сечении стержня нагрузка будет *равномерно-распределенной*, т.е. она не изменяется по длине стержня ($q = \text{const}$). Можно считать, что нагрузка q равна весу одного метра

стержня (его иногда называют погонным метром — обозначается пог. м). Чтобы найти вес всего стержня, надо умножить интенсивность нагрузки q на длину стержня: $P_{с.в} = ql$.

Правило знаков: продольная сила N будет положительной, если она приводит к растяжению стержня, т.е. направлена от сечения.

Знак продольной силы определяется по ее физическому воздействию на сечение и не зависит от направления продольной оси. На рис. 1.1, б представлена иллюстрация правила знаков N . Из стержня вырезан малый элемент. На его грани действуют положительные силы N , направленные от поверхности поперечного сечения, т.е. вызывающие растяжение.

Обычно при проведении расчетов в строительстве размерность внешних и внутренних сил берут в килоньютонах (кН). В одном килоньютоне содержится 1000 ньютонов ($1 \text{ кН} = 1000 \text{ Н}$). Также в проектной документации для сил иногда используют размерности кгс (килограмм-сила) и тс (тонна-сила). Полезно знать, что $10 \text{ Н} \approx 1 \text{ кгс} = 0,001 \text{ тс}$. Тогда одна тонна-сила эквивалентна 10 кН. Так, например, если кран поднимает груз 3 тс, то продольная сила в тросе равна 30 кН. Обычно собственный вес вертикального стержня учитывают как распределенную нагрузку q . Являясь весом одного метра длины стержня, она имеет размерность кН/м. Для того чтобы узнать общий вес стержня при равномерно-распределенной нагрузке, следует умножить q на длину стержня.

Для определения продольной силы используют *метод сечений*, в соответствии с которым:

- 1) **разрезают** стержень на две части;
- 2) **отбрасывают** одну из двух частей стержня;
- 3) заменяют действие отброшенной части на оставшуюся неизвестной продольную силу N (она является силой реакции, действующей со стороны отброшенной части на оставшуюся);
- 4) уравнение статики, записанное для оставшейся части, позволяет определить продольную силу N (сумма проекций всех сил на продольную ось оставшейся части стержня равна нулю).

Для лучшего запоминания метода сечений рекомендуется *прочитать сверху вниз первые буквы этих предложений*. Получим название известного цветка.

Отметим, что данный метод предполагает отыскание реакции отброшенной части на оставшуюся. Эта реакция и является продольной силой. Однако, в соответствии с 3-м законом Ньютона о равенстве сил действия силам противодействия, можно заменить поиск реакции (силы противодействия) определением активной силы (силы действия), являющейся суммой внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Таким образом, *продольная сила N в любом сечении прямого стержня может быть найдена как сумма внешних сил, действующих вдоль его оси, расположенных с одной стороны от сечения.*

Так, если мы имеем горизонтальный стержень, показанный на рис. 1.3, загруженный четырьмя силами, то продольную силу в сечении K можно найти, суммируя как левые, так и правые силы.

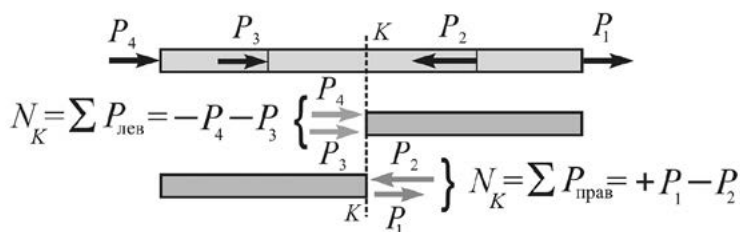


Рис. 1.3. Равномерно распределенная нагрузка q

Если перенести левые силы P_4 и P_3 к месту разреза, то они будут сжимать правую часть (мы их берем с минусом), а если перенести правые силы и приложить их к левой части, то P_1 будет растягивать левую часть (мы ее учитываем с плюсом), а P_2 — сжимать (она берется с минусом).

1.1.2. Способы построения эпюры N

График функции $N(x)$ называют эпюрой продольной силы N . Параллельно оси стержня проводится базовая линия, от которой откладываются значения продольной силы в масштабе. На эпюре выполняется штриховка перпендикулярно базовой линии. Принято обозначать этот график буквой N , а рядом указывать размерность продольной силы, например, в килоньютонах (кН). На эпюре N также должны быть обозначены «плюс» и «минус», причем однозначного правила, куда откладывать положительные значения (вправо, влево, вниз, вверх), не существует.

Различают различные способы построения эпюры продольных сил N . Например, используя метод сечений, можно провести некоторое сечение на расстоянии x от начала координат, рассмотреть одну из частей и, записав для нее уравнение равновесия, получить некоторую функцию $N(x)$, график которой и будет являться эпюрой продольных сил. Можно, суммируя активные силы, приложенные с одной стороны от сечения, также получить выражение $N(x)$. В инженерной практике, как правило, пропускают составление аналитической зависимости $N(x)$, график которой (эпюру) затем нужно будет построить. В характерных сечениях определяют значения продольной силы, откладывают полученные значения (ординаты) в масштабе перпендикулярно базовой линии, а затем соединяют полученные точки эпюры линиями. Это можно делать, зная вид функции $N(x)$ на каждом характерном участке, который ограничивается характерными сечениями, которыми можно считать те сечения, где приложены внешние силы, имеет место изменение размеров сечения, начинается и заканчивается распределенная нагрузка. Другими словами, на каждом характерном участке имеет место присущий ему вид функции $N(x)$.

Напомним, что между продольной распределенной нагрузкой q и продольной силой N существует следующая дифференциальная зависимость:

$$\frac{dN}{dx} = -q.$$

В дальнейшем, для решения задачи на построение эпюры продольной силы нам пригодятся два следствия, вытекающие из приведенной формулы:

1) если $q = 0$ (участок не загружен), то $N(x)$ — постоянная функция (на эпюре N изображается прямой, параллельной оси стержня);

2) если $q(x)$ — постоянная функция (случай равномерно распределенной нагрузки), то $N(x)$ имеет вид линейной функции (на эпюре N изображается наклонной прямой).

Исходя из приведенной выше дифференциальной зависимости, можно сделать вывод, что функция $N(x)$ на порядок выше $q(x)$. Например, если $q(x)$ представляет собой линейную функцию, то график $N(x)$ будет иметь вид квадратной параболы. В этом случае эпюру продольной силы придется строить минимум по трем точкам, как для кривой линии.

Таким образом, на участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра продольных сил будет иметь вид прямоугольника (здесь достаточно найти продольную силу в одном сечении), а на участках с равномерно распределенной нагрузкой q , чтобы построить прямую наклонную линию, следует найти продольную силу по меньшей мере в двух сечениях.

1.1.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении

В соответствии с гипотезами, которые используют при выводе формул при растяжении и сжатии прямого стержня [1], распределение нормальных напряжений в поперечном сечении стержня будет носить равномерный характер (рис. 1.4). Их определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N — продольная сила; A — площадь поперечного сечения.

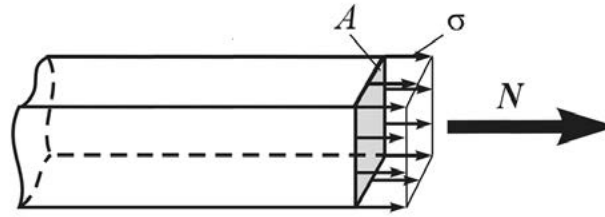


Рис. 1.4. Нормальные напряжения в поперечном сечении

Очевидно, что в формуле идет речь о σ_x — нормальном напряжении, действующем в направлении оси x (вдоль стержня). В дальнейшем для упрощения записи индекс нормального напряжения будем опускать.

Размерность напряжений — это сила, деленная на площадь. При расчете строительных конструкций напряжение обычно измеряют в мегапаскалях (МПа). Напомним, что $1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Также стоит запомнить, что $1 \text{ кН/см}^2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ МН/} 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 10 \text{ МПа}$. Поэтому полученный результат в кН/см^2 надо просто умножить на 10, чтобы получить его в мегапаскалях. В советской проектной документации для напряжений использовали размерности тс/м^2 и кгс/см^2 . Полезно знать, что $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2 = 100 \text{ тс/м}^2$. Это также пригодится, например, при расчете бетонных конструкций. Так, если марка цемента составляет М300, что соответствует его прочности на сжатие 300 кгс/см^2 , то в мегапаскалях прочность на сжатие можно принять равной 30 МПа.

Иногда в нормативных источниках используют размерность напряжений в Н/мм^2 . Однако, если учесть, что $1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2$, то перевод единиц не представляет труда ($1 \text{ МПа} = 1 \text{ МН/м}^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ Н/} 1 \cdot 10^6 \text{ мм}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2$).

1.1.4. Определение деформаций

Также важным является определение величин деформаций строительных конструкций, чтобы затем сравнить их с предельными величинами, представленными в строительных нормах.

Удлинение — это сокращенное название *абсолютной линейной продольной деформации* Δl , которая является разностью длины стержня l после приложения нагрузки и первоначальной длины стержня l_0 (рис. 1.5), т.е. можно записать равенство $\Delta l = l - l_0$.

Отношение абсолютной деформации к первоначальной длине называется *относительной линейной продольной деформацией*:

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}.$$

Исследования показывают, что поперечные размеры прямого стержня при растяжении уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются. Абсолютные поперечные деформации можно найти по формулам

$$\Delta b = b - b_0; \Delta h = h - h_0.$$

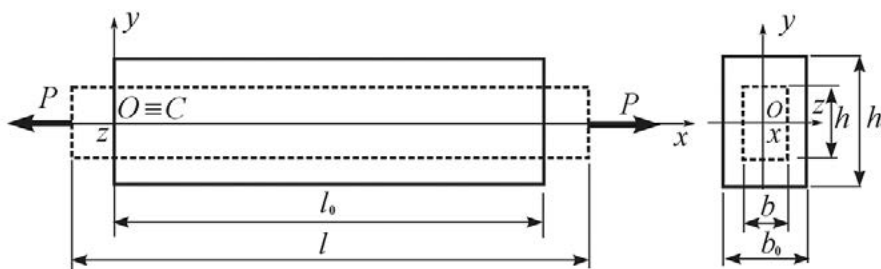


Рис. 1.5. Деформирование прямого стержня при центральном растяжении

Относительными поперечными деформациями называют величины:

$$\varepsilon' = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Коэффициент Пуассона — это модуль отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Коэффициент Пуассона обозначается ν и является одной из физических констант материала. Его величина изменяется от 0 до 0,5 ($0,5 \geq \nu \geq 0$). Значения ν , близкие к нулевым, имеют пористые материалы, например, пробка. У стержней, выполненных из подобных материалов, поперечные размеры при растяжении и сжатии не изменяются. Максимальные значения $\nu = 0,5$ имеют материалы типа резины на основе каучука. Сталь имеет величину ν , равную примерно 0,3.

Очевидно, что абсолютная деформация имеет размерность длины (м, см, мм), а относительные деформации и коэффициент Пуассона являются безразмерными величинами.

В учебной литературе приводятся различные формулы для определения удлинения. При изложении решения задач по данной теме будут использоваться следующие формулы.

Первая из них применяется при условии, что на участке $N = \text{const}$:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где N — продольная сила; l — длина участка; A — площадь поперечного сечения; E — модуль упругости материала. Произведение EA в знаменателе называется *жесткостью при растяжении и сжатии*.

Величина E (модуль упругости) представляет собой размерный коэффициент пропорциональности в формуле закона Гука, связывающего нормальное напряжение σ с относительной деформацией ε .

$$\sigma = E\varepsilon \text{ — закон Гука.}$$

При испытаниях стальных образцов на растяжение начальный участок диаграммы напряжений имеет линейный характер (рис. 1.6).

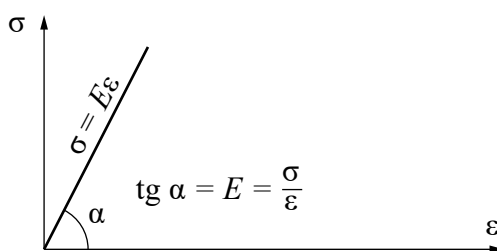


Рис. 1.6. Графическое представление закона Гука

Модуль упругости E является еще одной физической константой материала, наряду с коэффициентом Пуассона. Так, для стали приближенно можно принять $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, а для бетонов различных классов он изменяется и в среднем составляет $3 \cdot 10^4$ МПа.

Следующее выражение для нахождения удлинения справедливо для произвольной функции $N(x)$, а следовательно, и произвольной функции $\sigma(x)$.

$$\Delta l = \frac{\Omega_N}{EA} = \frac{\Omega_\sigma}{E},$$

где Ω_N — площадь эпюры продольных сил; Ω_σ — площадь эпюры нормальных напряжений; E — модуль упругости.

1.1.5. Расчеты на прочность по строительным нормам

Метод расчета по предельным состояниям является основным методом расчета строительных конструкций [5].

Надежность строительного объекта — это его способность выдерживать нагрузки в течение всего срока эксплуатации.

Очевидно, что жилое здание не должно разрушаться (тогда его *нельзя эксплуатировать*). Но также нельзя допускать и того, чтобы, например, плита перекрытия прогнулась на полметра, что, по меньшей мере, не эстетично и *затрудняет его нормальную эксплуатацию*, условия которой представлены в строительных нормах и проектом задания.

В строительных нормах применяют термин «*предельное состояние*». Это — *такое состояние, при превышении которого эксплуатация недопустима, затруднена или нецелесообразна*.

Существуют следующие группы предельных состояний строительных объектов:

– *первая группа* предельных состояний — состояния, превышение которых приводит к потере несущей способности зданий и сооружений, а их эксплуатация становится полностью невозможной. К этой группе относят: разрушение или потерю устойчивости объекта строительства или его части, а также все явления, при которых эксплуатация строительного объекта *полностью прекращается* (например, при чрезмерных деформациях, значительном раскрытии трещин и др.);

– *вторая группа* предельных состояний — состояния, превышение которых приводит к невозможности *нормальной эксплуатации* строительной конструкции, резко снижается ее ресурс долговечности, нарушается комфортность пребывания людей и др., т.е. нарушаются те критерии, которые мало влияют на несущую способность конструкции. Так, например, строительные нормы устанавливают предельные величины прогибов балок в основном из эстетических соображений. Также не допускаются появления значительных уровней колебаний конструкций или оснований, вызывающих дискомфорт или наносящих вред здоровью людей, а также другие явления, снижающие время эксплуатации здания или расчетного срока службы (например, повреждения, вызванные коррозией). Отметим, что *при превышении критериев второй группы эксплуатация здания или сооружения не прекращается*. Однако нарушения должны быть устранены.

Особые предельные состояния возникают при особых воздействиях и ситуациях, которые приводят к разрушению конструкций с катастрофическими последствиями. Такие разрушения могут быть вызваны взрывами, сейсмическими воздействиями, пожаром, провалами или оползнями грунта и другими внезапными явлениями.

В машиностроении применяют *метод расчета по допускаемым напряжениям*. Условие прочности для нормальных напряжений в соответствии с этим методом записывают в виде неравенства

$$\sigma \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение, которое получено делением опасного напряжения σ_0 , при котором может произойти разрушение конструкции или появляются чрезмерные необратимые деформации, на коэффициент запаса прочности $n_{\text{зап}}$, значение которого назначается больше единицы.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n_{\text{зап}}}.$$

При проведении расчетов на прочность в строительстве *по первой группе предельных состояний* вводят не один, а несколько частных коэффициентов надежности. Это — коэффициент надежности по нагрузке γ_f , коэффициент надежности по материалу γ_m , коэффициент условий работы γ_c и коэффициент надежности по ответственности γ_n . Каждый из этих коэффициентов отвечает за свою определенную группу отклонений реальных расчетных параметров в большую сторону, что повышает надежность строительного объекта.

Начальный этап расчета строительных конструкций по первой группе предельных состояний посвящен вычислению *расчетных нагрузок*:

$$P_p = \gamma_f \gamma_n P_n;$$

$$q_p = \gamma_f \gamma_n q_n,$$

где P_p — расчетная сила; P_n — нормативная сила; q_p — расчетная нагрузка; q_n — нормативная распределенная нагрузка.

Коэффициент надежности по нагрузке γ_f учитывает возможные отличия реальных нагрузок от нормативных. Трудность состоит в том, что проектировщики точных величин реальных нагрузок не имеют. Не известно, сколько выпадет снега, какой силы ветер будет воздействовать на конструкцию, даже учет собственного веса осложняется разбросом в характеристиках строительных материалов. Поэтому *вместо реальных нагрузок в расчет вводят расчетные нагрузки.*

Нормативные нагрузки от веса здания могут быть определены исходя из размеров его конструктивных элементов и объемного веса материалов. Если производится расчет перекрытий здания, учитывается нагрузка от всех слоев, входящих в их состав, каждый из которых обладает своим собственным весом. *Нормативный собственный вес* перекрытия можно вычислить, определив на основе данных проекта его объем, умножением его на объемный вес. Если речь идет об определении *расчетного собственного веса* перекрытия, то *нормативный вес* надо умножить на указанные ранее коэффициенты надежности.

К нормативным нагрузкам можно также отнести *полезную нагрузку*. Расстановка мебели, число и место расположения проживающих в квартирах людей неизвестны. Строительные нормы заранее назначают эту нагрузку, исходя из опыта эксплуатации уже построенных объектов. Например, для квартир жилых зданий *полезная нагрузка принимается* 1,5 кПа или ~150 кгс/м² [6]. При расчете перекрытий общественных зданий и стадионов полезная нагрузка может достигать до 4–5 кПа, так как речь идет о значительном количестве людей, поведение которых непредсказуемо. Нормативные значения ветровых и снеговых нагрузок устанавливаются исходя из многолетних наблюдений для различных районов России.

По времени действия нормативные нагрузки делят на две группы: *постоянные* и *временные*. Временные нагрузки в свою очередь подразделяют на *длительные*, *кратковременные* и *особые* (более детальное описание видов нагрузок представлено в [6]). *Постоянные нагрузки воздействуют на сооружение постоянно* (к ним относят, например, собственный вес). *Временные нагрузки* действуют какое-то время, а затем не действуют (действуют время от времени). К временным относятся *снеговая* и *ветровая* нагрузки. Как правило, коэффициенты надежности по нагрузке γ_f для постоянных нагрузок принимаются меньше ($\gamma_f = 1,05–1,3$), чем для временных ($\gamma_f = 1,1–1,4$), так как действие постоянных нагрузок более предсказуемо.

Коэффициент надежности по ответственности γ_n вводят для повышения надежности особо ответственных объектов строительства [10]. Различают следующие *уровни ответственности: повышенный, нормальный или пониженный*. В соответствии с [5] объекты строительства подразделяются на классы: КС-3, КС-2 и КС-1 (КС — класс сооружений).

КС-3 (повышенный) — это особо опасные, технически сложные и уникальные объекты, перечисленные в статье 48.1 [11]. Это — важные объекты, обеспечивающие жизнеобеспечение населения, зданий и сооружений высотой более 100 м, большепролетные строения с пролетом более 100 м, объекты, имеющие заглубление более чем на 15 м, тоннели протяженностью больше 500 м и др. Гидро- и теплоэлектростанции, атомные станции, стадионы, театры, теле- и радиобашни, тоннели метро, железнодорожные и автомобильные мосты относятся к классу КС-3, для которых принимают $\gamma_n = 1,1$.

КС-2 (нормальный) — это объекты строительства, не вошедшие в классы КС-1 и КС-3. Для них принимают $\gamma_n = 1,0$. Жилые и производственные здания и сооружения, как правило, относятся к данному классу.

КС-1 (пониженный) — это здания и сооружения, указанные в части 10 статьи 4 [10]. К нему относят временные постройки с ограниченным сроком службы и пребывания людей. Это — склады временного содержания, бытовки, теплицы, парники и др. Для класса КС-1 строительные нормы принимают $\gamma_n = 0,8$.

Может оказаться, что при некоторой комбинации нагрузок напряжения и деформации будут больше, чем при их учете. Такое опасное сочетание нагрузок называют *неблагоприятным*.

Строительные нормы устанавливают, что при расчете по второй группе предельных состояний коэффициенты надежности по нагрузке γ_f и по ответственности γ_n не учитываются (принимают равными единице).

В соответствии с современными нормами для расчета стальных конструкций [7] на прочность при растяжении и сжатии продольной силой N будем использовать выражение:

$$\sigma = \frac{N_p}{A} \leq R \gamma_c,$$

где A — площадь поперечного сечения; γ_c — коэффициент условий работы; R — расчетное сопротивление.

Смысл условия прочности состоит в том, что нормальное напряжение от расчетных нагрузок должно быть меньше предельного нормального напряжения $R \gamma_c$.

Расчетное сопротивление R [7] можно найти по формуле

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m},$$

где R_n — нормативное сопротивление; γ_m — коэффициент надежности по материалу.

Нормативное сопротивление R_n принимается равным пределу текучести стали σ_T , т.е. опасному напряжению, при котором наблюдается явление «текучести», когда резко возникают значительные необратимые деформации без увеличения нагрузки. Так, например, для марки строительной стали С245, предел текучести которой равен $\sigma_T = 245$ МПа, нормативное сопротивление принимается $R_n = 245$ МПа.

Коэффициент надежности по материалу обычно принимают больше единицы ($\gamma_m \geq 1$), он учитывает отклонения в механических свойствах материала.

Коэффициент условий работы γ_c учитывает осложнение работы стального элемента при неблагоприятных условиях. Как правило, этот коэффициент меньше единицы. Так, например, для стальных элементов сплошного сечения, работающих на растяжение и изгиб, $\gamma_c = 0,9$.

Аналогичные подходы применяются также для расчетов на прочность алюминиевых и деревянных конструкций [8; 9].

1.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.2.1. Расчет стержня ступенчато-постоянного сечения

Задание

Для статически определимого стального стержня ступенчато-постоянного сечения (рис. 1.7) при модуле упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа требуется:

- 1) найти реакции опор;
- 2) построить эпюру N ;
- 3) построить эпюру σ ;
- 4) найти удлинения участков стержня Δl_i и всего стержня Δl ;
- 5) рассчитать значения осевых перемещений четырех характерных сечений.

Решение

1. Определение опорной реакции.

В жесткой заделке для плоской системы сил имеем три опорных реакции. Однако, очевидно, что горизонтальная опорная реакция и реактивный момент в заделке в случае соосных вертикальных нагрузок будут равны нулю.

Ось Ox направим вверх. Начало координат O совместим с т. A — основанием. Заметим, что при нахождении опорной реакции применяется правило знаков теоретической механики, в соответствии с которым при записи уравнения равновесия значение силы считается положительным, когда вектор силы ориентирован по направлению соответствующей оси. Направляя опорную реакцию R_A вверх (выбираем произвольное направление), запишем уравнение равновесия проекций сил на эту ось:

$$\Sigma X = 0; R_A + 15 - 19 \cdot 1,5 + 30 = 0.$$

В этом уравнении произведение $19 \cdot 1,5$ представляет собой равнодействующую равномерно распределенной нагрузки, которая направлена вниз, т.е. противоположно оси Ox , что объясняет отрицательный знак этого члена в уравнении. Все остальные члены в уравнении имеют знак «плюс», так как они направлены в сторону оси Ox .

Из уравнения равновесия следует: $R_A = -16,5$ кН.

Знак «-» перед величиной опорной реакции означает, что первоначально заданное ее направление «вверх» оказалось неверным, и его нужно изменить на противоположное. Зачеркнем вектор, направленный вверх, и рядом изобразим опорную реакцию, направленную вниз. Напишем около нее ее значение, равное 16,5 кН.

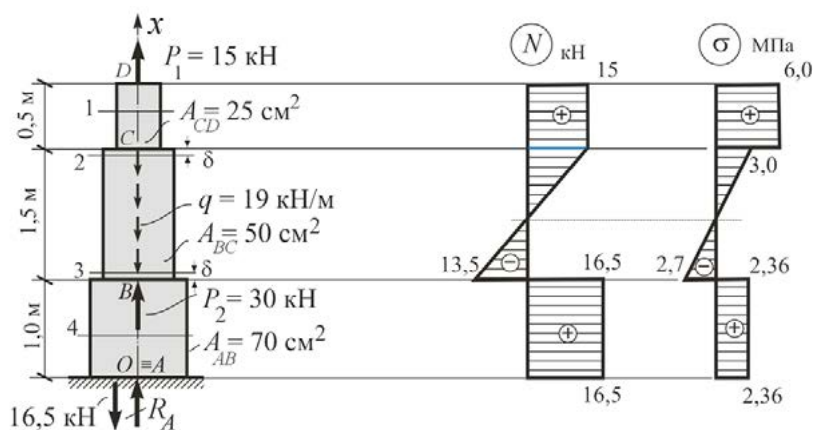


Рис. 1.7. Эпюры N и σ

2. Построение эпюры продольных сил N .

В характерных сечениях будем находить значения продольной силы, откладывая их на графике, а затем соединять прямыми линиями.

Будем как бы собирать «верхние» или «нижние» силы к центру тяжести сечений. Если речь идет о «верхних» силах, то прикладываем их к нижней части, как активные силы, а если «нижние» силы, то прикладываем их к верхней части. С позиций теоретической механики указанный процесс равноценен нахождению главного вектора системы сил, расположенных сверху или снизу от сечения.

Напомним, что в соответствии с принятым в сопротивлении материалов правилом знака продольная сила N считается положительной, если она направлена от сечения, создавая растяжение.

Эпюру N начнем строить «сверху», т.е. со свободного конца стержня (рис. 1.8).

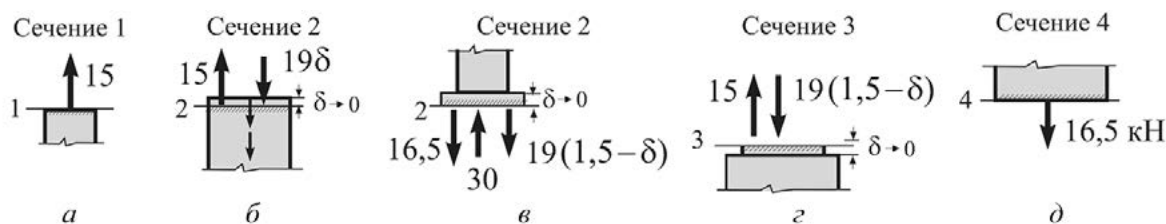


Рис. 1.8. Определение продольных сил в сечениях стержня

Участок CD

Так как на данном участке отсутствует распределенная нагрузка q , здесь мы ожидаем наличия постоянной поперечной силы N . Поэтому достаточно одного сечения. Проводим сечение 1. Оставляя нижнюю часть (мы не будем изображать ее полностью для экономии места), собираем с верхней части все силы и прикладываем их к нижней части (рис. 1.8, а). Сверху от сечения 1 находится единственная сила $P_1 = 15$ кН. Она направлена от сечения по отношению к нижней части, т.е. вызывает растяжение, $N_1 = +15$ кН. Откладываем на уровне сечения 1 вправо это значение в масштабе и изображаем прямоугольник на всю длину участка CD (рис. 1.7), так как продольная сила здесь является постоянной на всем его протяжении. Производим штриховку перпендикулярно базовой линии и обозначаем знак усилия.

Участок BC

Здесь на эпюре N мы имеем график линейной функции, так как $q = \text{const}$. Проведем на малом расстоянии $\delta \rightarrow 0$ сечение 2 чуть ниже точки C (рис. 1.8, б). Лучше избегать на участках с линейной функцией проводить сечения непосредственно по месту соединения участков (в данном случае это сечение C). Скачок продольной силы на графике $N(x)$ в сечении C в данном примере наблюдаться не будет, так как он появляется исключительно в сечениях, где приложена сосредоточенная внешняя сила (например, в сечении B), однако здесь будет происходить скачок в эпюре нормальных напряжений из-за различия в площадях. В сечении 2 имеем:

$$N_2 = \Sigma P_{\text{верх}} = +15 - 19\delta.$$

Произведение 19δ — это равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной δ , которая обычно находится по формуле ql , где q — интенсивность нагрузки в кН/м, а l — длина участка в метрах. При условии $\delta \rightarrow 0$ (т.е. очень близко сверху от сечения C) получаем $N_2 = N_1 = +15$ кН.

Проверим полученный результат, суммируя «нижние» силы. Снизу от сечения (рис. 1.8, в) находятся: растягивающая верхнюю часть опорная реакция $R_A = 16,5$ кН, действующая вниз; сосредоточенная сжимающая сила $P_2 = 30$ кН, действующая вверх, а также направленная вниз, вызывающая растяжение верхней части равнодействующая распределенной нагрузки $q = 19$ кН/м, действующая по длине $l = (1,5 - \delta)$ м. Итак, в сечении 2 имеем следующую сумму «нижних» сил:

$$N_2 = \Sigma P_{\text{ниж}} = +16,5 - 30 + 19(1,5 - \delta).$$

При условии $\delta \rightarrow 0$ получаем $N_2 = N_1 = +15$ кН. Получен тот же самый результат, что и при суммировании «верхних» сил (рис. 1.8, б). Таким образом, чтобы избежать ошибок, можно рекомендовать каждый раз выполнять проверку правильности определения значений продольных сил в сечении, суммируя сначала «верхние» силы, а затем «нижние». Результаты должны совпадать.

Найдем продольную силу в сечении 3 как сумму «верхних» сил (рис. 1.8, г):

$$N_3 = \Sigma P_{\text{верх}} = +15 - 19(1,5 - \delta).$$

При условии $\delta \rightarrow 0$ получаем $N_3 = -13,5$ кН. Откладываем в масштабе ординаты в сечениях 1 и 2 и соединяем прямой линией.

Участок AB

На участке AB достаточно определить продольную силу лишь в одном произвольном сечении, так как здесь ожидается постоянная продольная сила $N = \text{const}$ из-за отсутствия распределенной нагрузки. Проводим произвольное сечение 4. Наиболее рационально в сечении 4 определять сумму «нижних» сил, представленных всего лишь одной опорной реакцией $R_A = 16,5$ кН. Прикладывая ее к оставшейся верхней части, получим растягивающую продольную силу $N_4 = R_A = +16,5$ кН (рис. 1.8, д). Откладываем на эпюре N это значение вправо и изображаем прямоугольник.

3. Построение эпюры нормальных напряжений σ .

Здесь речь пойдет о нормальных напряжениях с индексом x , обозначаемых σ_x , так как они действуют перпендикулярно поперечному сечению и направлены вдоль оси x . Однако в целях упрощения записи будем обозначать их без индекса σ .

Найдем нормальные напряжения и построим эпюру σ .

Участок CD

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{+15 \text{ кН}}{25 \text{ см}^2} = 0,6 \text{ кН/см}^2 = 6,0 \text{ МПа}.$$

Вспомним, что $1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$. В дальнейших расчетах будем вводить коэффициент 10 для перевода кН/см^2 в мегапаскали (МПа), на который будем умножать значение дроби.

Участок BC

В сечениях 2 и 3 имеем:

$$\sigma_{BC}^{(2)} = \frac{N_2}{A_{BC}} = \frac{+15}{50} 10 = +3,0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BC}^{(3)} = \frac{N_2}{A_{BC}} = \frac{-13,5}{50} 10 = -2,70 \text{ МПа}.$$

Участок AB

$$\sigma_{AB} = \frac{N_4}{A_{AB}} = \frac{+16,5}{70} 10 = +2,36 \text{ МПа}.$$

Откладываем значения σ перпендикулярно базовой линии (рис. 1.7) и строим эпюру нормальных напряжений. Заметим, что пересечение базовой линии эпюрами N и σ происходит в одном и том же сечении по высоте стержня.

Несмотря на отсутствие скачка в эпюре N , на эпюре σ имеет место скачок в сечении, где происходит резкая смена площадей сечения (сечение C) за счет скачка в знаменателе формулы.

4. Определение удлинений характерных участков.

Для определения удлинения будем использовать выражение:

$$\Delta l = \frac{\Omega_\sigma}{E},$$

где Ω_σ — площадь эпюры нормальных напряжений; E — модуль упругости.

Участок AB

Записывая в числителе выражение для определения площади прямоугольной эпюры σ на нижнем участке AB длиной $1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$, получим:

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_1 = \frac{+2,36 \text{ МПа} \cdot 1000 \text{ мм}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = +1,120 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Участок BC

В числителе для удлинения среднего участка следует записать площадь разнознаковой трапеции на участке BC как произведение средней линии трапеции $\frac{1}{2} (+3,0 - 2,7)$ на ее основание $1,5 \text{ м} = 1500 \text{ мм}$.

$$\Delta l_{BC} = \Delta l_2 = \frac{\frac{1}{2} (+3,0 - 2,7) \text{ МПа} \cdot 1500 \text{ мм}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = +0,107 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Участок CD

В числителе записываем выражение для площади прямоугольника ординатой $6,0 \text{ МПа}$ длиной $0,5 \text{ м} = 500 \text{ мм}$.

$$\Delta l_{CD} = \Delta l_3 = \frac{+6,0 \text{ МПа} \cdot 500 \text{ мм}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = +1,429 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Суммарное удлинение всего стержня равно:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = +1,120 \cdot 10^{-2} + 0,107 \cdot 10^{-2} + 1,429 \cdot 10^{-2} = 2,656 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Если бы на каком-то участке мы получили удлинение с минусом, это бы означало уменьшение длины участка, т.е. его укорочение.

5. Определение перемещений характерных сечений.

Перемещение по оси x обозначим u . Будем считать его положительным, когда перемещение направлено в положительную сторону оси соответствующей оси.

Опорное сечение A считаем неподвижным, поэтому его перемещение равно нулю: $u_A = 0$.

Так как участок AB удлиняется, а сечение A неподвижно, то, очевидно, что сечение B будет перемещаться вверх на величину:

$$u_B = \Delta l_1 = +1,120 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Знак «плюс» означает, что перемещение происходит в направлении оси Ox , направленной вверх.

Перемещение сечения C равно:

$$u_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = +1,120 \cdot 10^{-2} + 0,107 \cdot 10^{-2} = 2,227 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Перемещение сечения D равно удлинению всего стержня:

$$u_D = \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 2,656 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

1.2.2. Подбор сечения стального стержня при растяжении

Задание

Для статически определимой системы (рис. 1.9), относящейся классу ответственности КС-3 ($\gamma_n = 1,1$), состоящей из шарнирно закрепленного в точке C абсолютно жесткого стержня, который поддерживается невесомым ненагруженным стержнем AB , требуется:

- 1) определить значение расчетной силы P_p , нормативное значение которой равно $P_n = 300 \text{ кН}$ (для силы назначить коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f^{(P)} = 1,2$);
- 2) определить расчетное значение собственного веса G_p стержня AB , приняв для него нормативную нагрузку (вес 1 пог. м) $q_n = 10 \text{ кН/м}$ (для распределенной нагрузки назначить коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f^{(q)} = 1,2$);
- 3) определить значение расчетной продольной силы N_p в стержне BC ;
- 4) приняв, что сечение стержня AB представляет собой два стальных прокатных равнополочных уголка (марка стали С245), назначив коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$, коэффициент надежности по материалу $\gamma_m = 1,025$;

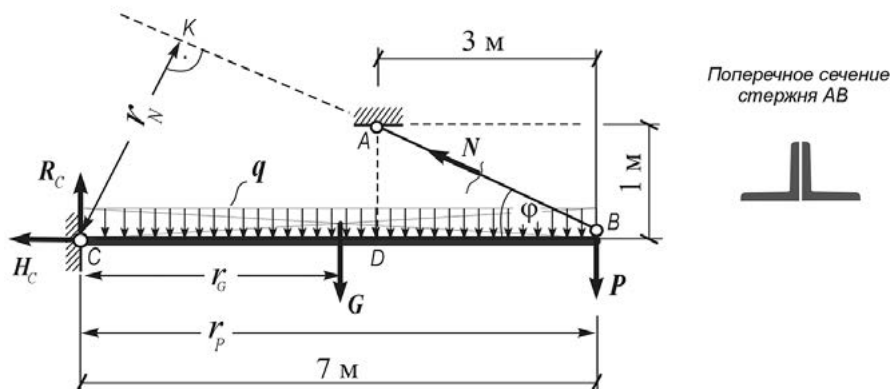


Рис. 1.9. Расчетная схема

- 5) проверить условие прочности для найденного сечения;
 6) найти удлинение Δl стержня AB , назначив $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, и проверить условие жесткости $\Delta l/l \leq 1/200$.

Решение

1. Определение расчетной силы P_p .

$$P_p = P_n \gamma_f^{(P)} \gamma_n = 300 \cdot 1,2 \cdot 1,1 = 396 \text{ кН.}$$

2. Определение расчетного собственного веса силы G_p .

Сначала определяем расчетную распределенную нагрузку:

$$q_p = q_n \gamma_f^{(q)} \gamma_n = 10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 12,1 \text{ кН/м.}$$

Затем определяем величину расчетной силы собственного веса балки, приложенной в ее центре:

$$G_p = q_p l = 12,1 \cdot 7 = 84,7 \text{ кН.}$$

3. Определение расчетной продольной силы N_p в стержне AB .

Применим метод сечений. Рассечем стержень AB , мысленно отбросим верхнюю часть стержня и в месте разреза приложим неизвестную продольную силу N . Известно, что для плоской системы сил можно записать три уравнения равновесия, которые, в данном случае, позволят определить две опорные реакции R_C и H_C , возникающие в шарнирном закреплении (шарнир в кинематическом и статическом отношении полностью эквивалентен шарнирно-подвижной опоре), и значение расчетной продольной силы N . Однако, если записать уравнение равновесия моментов относительно точки C , то можно сразу определить искомое внутреннее усилие (так как плечи опорных реакций равны нулю и моменты от них также будут нулевыми). Мы определяем продольную силу от расчетных нагрузок, поэтому в расчет вводим расчетные значения сосредоточенной силы и силы собственного веса:

$$\Sigma M_C = 0; N_p r_N - P_p r_P - G_p r_G = 0,$$

где r_N — плечо продольной силы N_p ; r_P — плечо сосредоточенной силы P_p , $r_P = 7$ м; r_G — плечо результирующей G_p собственного веса стержня CB (соответствует расстоянию от т. C до середины участка CB), $r_G = 3,5$ м.

Плечо расчетной продольной силы — это перпендикуляр, опущенный из т. C на линию действия продольной силы (продолжение стержня AB). Его величину можно найти из прямоугольного треугольника CBK .

$$r_N = 7 \text{ м} \cdot \sin \varphi.$$

Сначала найдем угол φ из треугольника ABD :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 \text{ м}}{3 \text{ м}} = 0,333; \varphi = 18^\circ 26'; \sin \varphi = 0,316.$$

Тогда:

$$r_N = 7 \text{ м} \cdot \sin \varphi = 7 \cdot 0,316 = 2,21 \text{ м.}$$

Уравнение равновесия запишется в виде:

$$\Sigma M_A = 0; N_p 2,21 - 396 \cdot 7 - 84,7 \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда находим расчетную силу $N_p = 1388$ кН.

4. Подбор сечения стержня AB .

Ранее было рассмотрено условие прочности:

$$\sigma = \frac{N_p}{A} \leq R\gamma_c.$$

Так как нормативное сопротивление R_n соответствует пределу текучести стали марки С245, то предел текучести в нашем примере равен $\sigma_T = 245$ МПа. Для нахождения расчетного сопротивления R его следует разделить на заданное значение коэффициента надежности по материалу $\gamma_m = 1,025$:

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m} = \frac{245}{1,025} = 239 \text{ МПа} = 23,9 \text{ кН/см}^2.$$

Решая неравенство, представленное условием прочности, найдем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A \geq \frac{N_p}{R\gamma_c} = \frac{1388 \text{ кН}}{23,9 \text{ кН/см}^2 \cdot 0,9} = 64,53 \text{ см}^2.$$

Итак, требуемая площадь сечения равна $A_{тр} = 64,53 \text{ см}^2$. Сечение с большей площадью можно использовать, однако при значительном отклонении от этой величины оно будет считаться неэкономичным, что также недопустимо. Так как по условию задачи требуется подобрать сечение из двух равнополочных уголков, то, прежде чем обратиться к сортаменту, следует разделить требуемую площадь пополам: $A_{тр}/2 = 64,53/2 = 32,27 \text{ см}^2$.

Учитывая одновременные требования по прочности и экономичности, предъявляемые к строительным конструкциям, из сортамента следует выбирать профиль с наименьшей площадью сечения (ближайший «сверху»). Из сортамента по ГОСТ 8509-93 «Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент» [12] (прил. 1) подбираем равнополочный уголок № 14; $140 \times 140 \times 12$ мм площадью сечения $32,49 \text{ см}^2$. Фактическая площадь сечения двух уголков равна: $A_{ф} = 32,49 \cdot 2 = 64,98 \text{ см}^2$.

5. Проверка прочности стержня AB .

Нормальное напряжение в стержне AB не должно превышать предельного нормального напряжения (произведения $R\gamma_c$):

$$\sigma = \frac{N_p}{A_{ф}} = \frac{1388}{64,98} = 21,36 \text{ кН/см}^2 = 213,6 \text{ МПа} \leq R\gamma_c = 239 \cdot 0,9 = 215,1 \text{ МПа};$$

$$213,6 \text{ МПа} \leq 215,1 \text{ МПа}.$$

Прочность по нормальным напряжениям обеспечена.

6. Определение удлинения стержня AB и проверка условия жесткости.

Расчет на жесткость относится ко второй группе предельных состояний и требует определения нормативной продольной силы N_n . Как было отмечено, расчет по второй группе проводится от нормативных нагрузок, т.е. коэффициенты надежности принимаются равными единице.

Нормативная сосредоточенная сила равна $P_n = 300 \text{ кН}$.

Нормативный собственный вес балки равен

$$G_n = q_n l = 10 \cdot 7 = 70 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение равновесия моментов относительно т. C для нормативных нагрузок и найдем нормативную продольную силу N_n .

$$\Sigma M_C = 0; N_n \cdot 2,21 - 300 \cdot 7 - 70 \cdot 3,5 = 0, \text{ откуда } N_n = 1061 \text{ кН}.$$

Удлинение стержня определим по формуле

$$\Delta l = \frac{N_n l}{EA_\phi}.$$

Сначала найдем длину l стержня AB как гипотенузу прямоугольного треугольника ABD :

$$\Delta l = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,16 \text{ м.}$$

Теперь найдем удлинение стержня AB :

$$\Delta l = \frac{1061 \text{ кН} \cdot 316 \text{ см}}{2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 64,98 \text{ см}^2} = 0,246 \text{ см} = 2,46 \text{ мм.}$$

Проверяем условие жесткости:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{2,46 \text{ мм}}{3160 \text{ мм}} = \frac{1}{1285} \leq \frac{1}{200}.$$

Условие жесткости выполняется.

Таким образом, выбранное сечение стержня AB удовлетворяет требованиям по прочности и по жесткости.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

2.1.1. Понятие о геометрических характеристиках сечений

Геометрическими характеристиками сечения являются следующие интегралы.

Площадь сечения, см^2 (рис. 2.1):

$$A = \int_A dA.$$

Статические моменты относительно осей Oz и Oy , см^3 , м^3 :

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A z dA.$$

Осевые моменты инерции сечения относительно осей Oz и Oy , см^4 :

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA.$$

Центробежный момент инерции сечения относительно осей Oz и Oy , см^4 :

$$J_{zy} = \int_A zy dA.$$

Полярный момент инерции сечения относительно полюса O , см^4 :

$$J_p = \int_A \rho^2 dA.$$

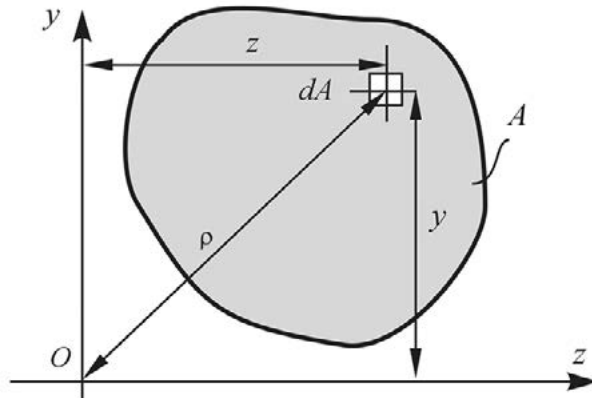


Рис. 2.1. Произвольное поперечное сечение стержня

Так как $\rho^2 = z^2 + y^2$, то $J_p = J_z + J_y$.

Отметим, что величины J_z , J_y и J_p могут быть только положительными, так как интегралы содержат координаты во второй степени, а S_z и S_y , а также J_{zy} могут иметь как положительный, так и отрицательный знак.

Из сортамента уголков (прил. 1), где приводятся только положительные значения центробежных моментов, в расчете следует брать их с учетом знака.

Знак J_{zy} уголка (рис. 2.2, а) можно определить следующим образом. Сечение уголка мысленно представим в виде суммы трех интегралов, которые вычисляются отдельно для частей сечения, расположенных в четвертях системы координат. Очевидно, что для частей, расположенных в I и III четвертях, будем иметь положительное значение этого интеграла, так как произведение $zydA$ будет положительным из-за того, что обе координаты z и y будут положительными, а интегралы, вычисляемые для частей, расположенных во II и IV четвертях, будут отрицательными (произведение $zydA$ будет отрицательным, так как одна из координат меньше нуля). Таким образом, для уголка на рис. 2.2, а знак J_{zy} будет отрицательным.

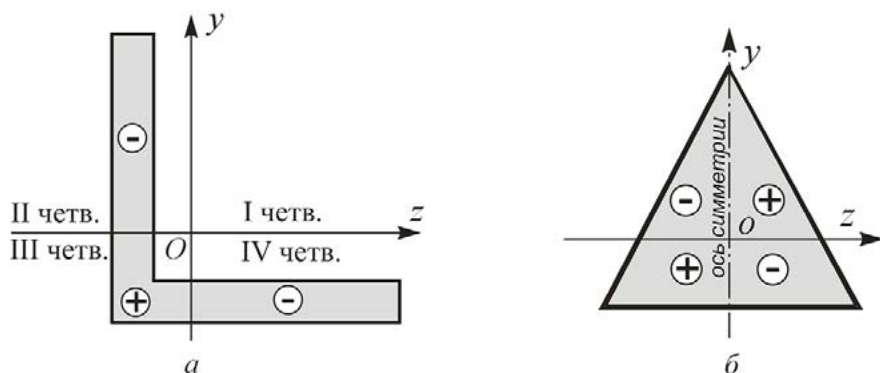


Рис. 2.2. К определению знака J_{zy}

Очевидно, что, если сечение содержит хотя бы одну ось симметрии (рис. 2.2, б), можно утверждать, что J_{zy} равен нулю. Действительно, для частей треугольника, расположенных в I и II четвертях, центробежные моменты инерции будут отличаться только знаком, так как области по конфигурации одинаковы, а координаты любой точки этих частей будут иметь разный знак. То же можно сказать относительно частей, которые находятся в III и IV четвертях.

2.1.2. Статические моменты. Определение центра тяжести

Статические моменты могут определяться без вычисления интегралов путем умножения площади поперечного сечения A на координаты центров сечения y_C и z_C (рис. 2.3, а):

$$S_z = Ay_C; \quad S_y = Az_C.$$

Когда координаты центра тяжести равны нулю (рис. 2.3, б), статические моменты также равны нулю.

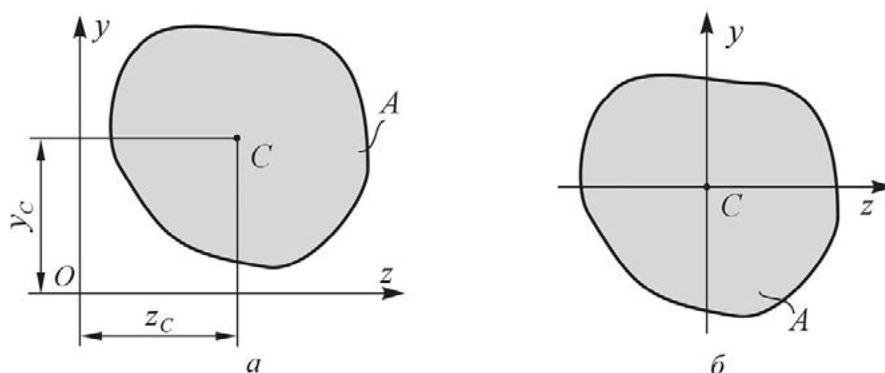


Рис. 2.3. К вычислению статических моментов

Определение. Центр тяжести сечения — это точка, обладающая следующим свойством: относительно произвольной оси, проходящей через эту точку, статический момент равен нулю.

Это свойство центра тяжести обычно используется для проверки правильности нахождения центра тяжести сложного сечения.

Определение. Оси, которые проходят через центр тяжести, называют центральными осями.

Разбив сечение сложной формы на n частей, площади и координаты центров тяжести которых известны, можно найти координаты центра тяжести z_C и y_C :

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_z^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Для того, чтобы определить положение центра тяжести сечения, выполняют следующие действия:

- 1) разбивают сечение на простые части, площади и центры тяжести которых известны;
- 2) задают начальные оси (произвольную систему координат);
- 3) вычисляют площади и находят координаты центров тяжести каждой части;
- 4) находят координаты y_C и z_C центра тяжести сечения по приведенным выше формулам;
- 5) выполняют проверку правильности определения центра тяжести сечения, вычисляя статические моменты относительно найденных центральных осей. Очевидно, что они должны равняться нулю.

2.1.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Допустим, что моменты инерции J_z , J_y и J_{zy} относительно центральных осей Oyz известны (рис. 2.4).

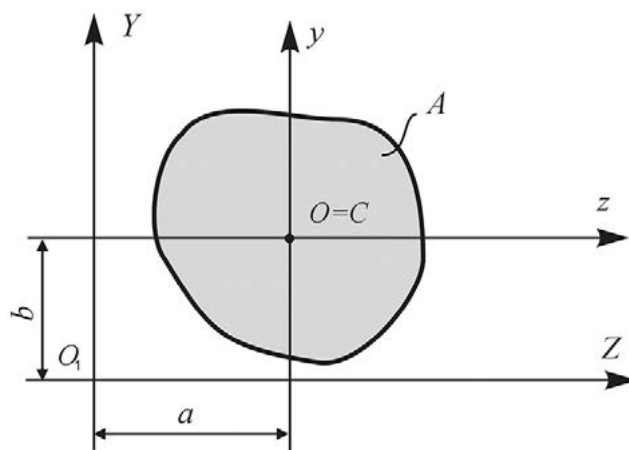


Рис. 2.4. Моменты инерции при параллельном переносе осей

Перенесем центральные оси Oyz в положение O_1YZ , отступив вниз на расстояние b и влево на a . Моменты инерции J_Z , J_Y и J_{ZY} относительно новых осей O_1YZ можно найти по формулам:

$$J_Z = J_z + b^2 A;$$

$$J_Y = J_y + a^2 A;$$

$$J_{ZY} = J_{zy} + abA.$$

Представим теперь, что сечение состоит из n частей. Пусть координаты центров тяжести фигур относительно центральных осей равны Z_i и Y_i . Полагая, что $a_i = Z_i$, а $b_i = Y_i$, можно записать:

$$J_{ZY} = \sum_{i=1}^n (J_{z_i} + Y_i^2 A_i);$$

$$J_Y = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + Z_i^2 A_i);$$

$$J_{ZY} = \sum_{i=1}^n (J_{z_i y_i} + Z_i Y_i A_i).$$

Координаты Y_i и Z_i следует брать со своими знаками. Осевые моменты от знака координат не зависят (Y_i и Z_i во второй степени), а второй член в скобках $Z_i Y_i A_i$ может оказаться отрицательным.

2.1.4. Моменты инерции при повороте осей

Предположим, что J_z , J_y и J_{zy} относительно осей Oyz (рис. 2.5) известны. Если необходимо вычислить моменты инерции J_u , J_v и J_{uv} относительно повернутых осей Ouv на угол α , применяют формулы:

$$J_u = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{zy} \sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{zy} \sin 2\alpha;$$

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha.$$

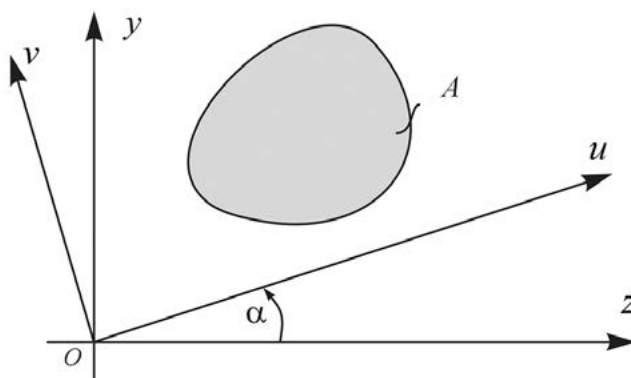


Рис. 2.5. Моменты инерции при повороте осей

Если найти сумму J_u и J_v , то получим $J_u + J_v = J_z + J_y$, т.е., если повернуть начальные оси на любой угол, сумма осевых моментов останется постоянной (инвариантом).

2.1.5. Понятие о главных осях и моментах инерции

Исследуя $J_u(\alpha)$ на экстремум, приравняем нулю производную $J_u(\alpha)$ по α :

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -2 \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha,$$

получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}.$$

Если приравняем нулю центробежный момент инерции

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = 0,$$

получим ту же формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}.$$

Определение. Главными осями называют оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают значения максимума и минимума, а центробежный момент инерции равен нулю.

Главные оси инерции можно провести через любую точку, а вот главных центральных осей инерции существует всего одна пара, начало координат таких осей совпадает с центром тяжести сечения. Принято обозначать максимальную ось цифрой «1», а минимальную «2».

Результат расчета по представленной формуле для угла наклона главных осей инерции может нас привести к углу наклона либо максимальной, либо минимальной оси (учитывая, что

экстремум — это либо максимум, либо минимум). Максимальную ось достаточно легко можно отличить от минимальной, принимая во внимание тот факт, что центры тяжести отдельных фигур отстоят от максимальной оси дальше, чем от минимальной.

Используя формулы для моментов инерции при повороте осей и формулу для $\operatorname{tg} 2\alpha_0$, можно избавиться от тригонометрических функций [1] и получить следующее выражение:

$$J_{1,2} = J_{\max, \min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}.$$

Эта формула дает два значения. Если перед корнем учесть знак «+», то получим максимальный момент инерции, а если поставить перед корнем «-», то расчет даст нам минимальный момент инерции.

Следует заметить, что ось симметрии — всегда главная ось инерции, так как центробежный момент в этом случае равен нулю.

Для симметричных профилей, представленных в сортаменте, швеллера или двутавра, главными центральными осями инерции будут вертикальная и горизонтальная оси, пересекающиеся на половине высоты профиля.

2.1.6. Определение моментов инерции простейших сечений

Прямоугольник со сторонами b и h (рис. 2.6), в котором C_z и C_y являются главными центральными осями инерции.

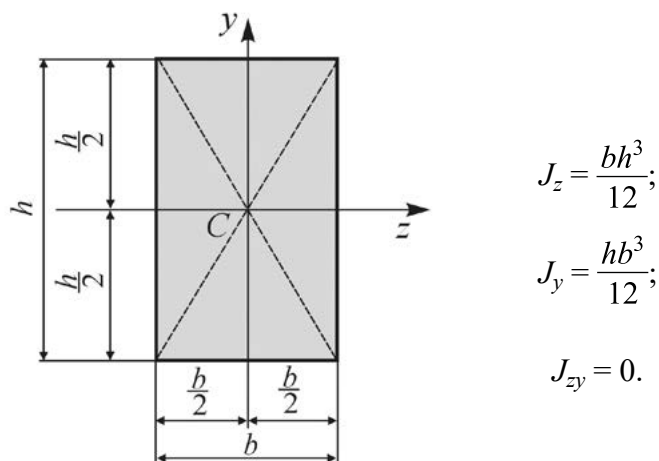


Рис. 2.6. Прямоугольное сечение

Треугольники. Произвольный треугольник. Известно, что для любого из треугольников, показанных на рис. 2.7, центр тяжести расположен по отношению его основания на расстоянии одной трети его высоты. Формула для вычисления осевого момента инерции относительно центральной оси Cz представлена ниже.

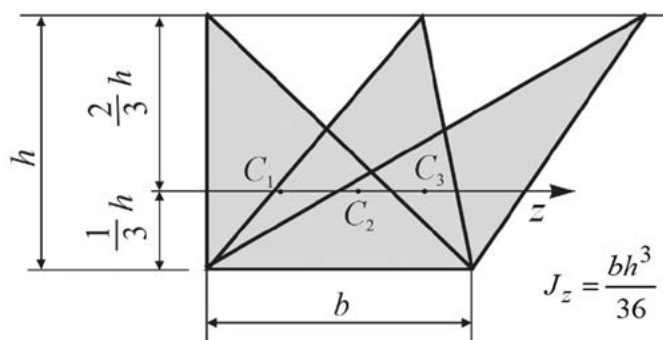


Рис. 2.7. Момент инерции треугольника

Равнобедренный треугольник с основанием b и высотой h (рис. 2.8).

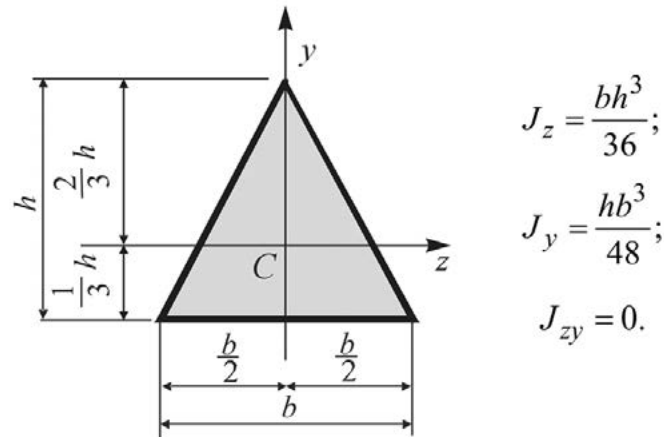


Рис. 2.8. Равнобедренный треугольник

Прямоугольные треугольники с основанием b и высотой h изображены на рис. 2.9, а, б. Осевые моменты инерции относительно центральных осей равны:

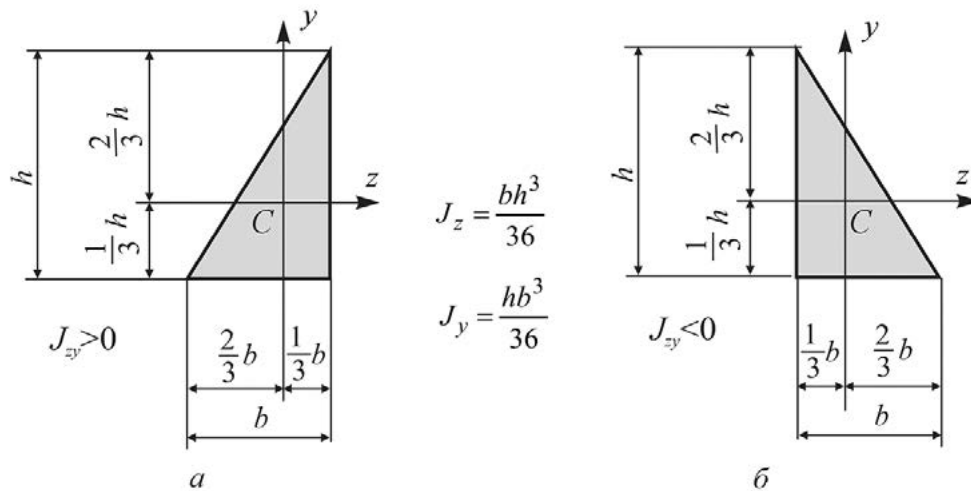


Рис. 2.9. Прямоугольные треугольники

Центробежный момент инерции будет иметь различный знак:

– для треугольника, показанного на рис. 2.9, а:

$$J_{zy} = + \frac{h^2 b^2}{72},$$

– для треугольника, изображенного на рис. 2.9, б:

$$J_{zy} = - \frac{h^2 b^2}{72}.$$

Если разбить сечение треугольника, представленного на рис. 2.9, а, на четыре части и по каждой из них отдельно определить центробежные моменты инерции, то интегралы, вычисленные для частей, расположенных в I и III четвертях, будут положительными (произведение zy больше нуля), а для частей во II и IV четвертях будут отрицательными. Однако за счет того, что части в I и III четвертях сами по себе больше и дальше удалены от осей, положительная составляющая окажется больше. На рис. 2.9, б представлено другое положение прямоугольного треугольника относительно осей координат. В этом случае похожие рассуждения приведут к тому, что сумма центробежных моментов инерции по всем четырем частям будет отрицательной.

Круг и кольцо. Моменты инерции круглого и кольцевого сечений (рис. 2.10, а, б) приведены ниже.

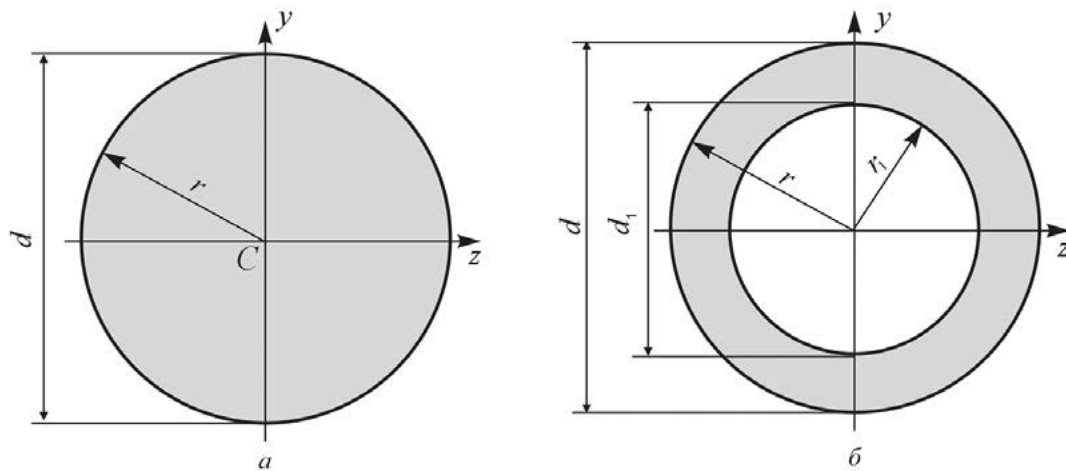


Рис. 2.10. Моменты инерции круглого и кольцевого сечений

Полярный момент инерции круга равен:

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Учитывая равенство $J_p = J_z + J_y$, приходим к выражению для определения осевого момента инерции:

$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Очевидно, что центробежный момент инерции круга равен нулю, как и для любой симметричной фигуры, т.е.

$$J_{zy} = 0.$$

Приведем формулы для кольцевого сечения, вводя обозначение $k = d_1/d$:

$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{4} - \frac{\pi r_1^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} (1 - k^4);$$

$$J_{zy} = 0.$$

Полукруг. На рис. 2.11 показано положение центра тяжести для полукруга радиусом r . Ниже представлены формулы для определения моментов инерции.

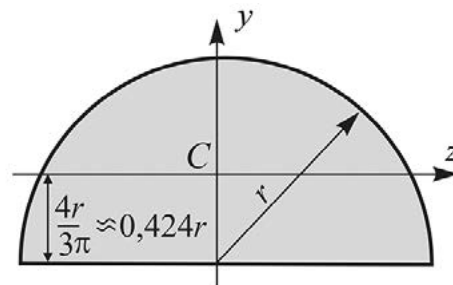


Рис. 2.11. Положение центра тяжести полукруга

$$J_z = 0,11r^4; \quad J_y = \frac{\pi r^4}{8}; \quad J_{zy} = 0.$$

2.1.7. Радиусы инерции

Они определяются по формулам и имеют размерность длины:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

2.1.8. Моменты сопротивления сечения

При расчете балок на прочность при изгибе используют геометрические характеристики, которые называются *моментами сопротивления сечения*. Продольные волокна балки, расположенные ниже центральной оси z , называются *нижними волокнами*, а волокна, которые находятся выше этой оси, — *верхними волокнами*. Также можно определить *правые* и *левые волокна* (рис. 2.12).

Если разделить осевые моменты инерции на расстояния от центра тяжести до наиболее удаленного волокна, можно найти четыре (в общем случае) момента сопротивления:

- для нижних и верхних волокон: $W_z^H = \frac{J_z}{y_H}; \quad W_z^B = \frac{J_z}{y_B};$
- для правых и левых волокон: $W_y^П = \frac{J_y}{z_П}; \quad W_y^Л = \frac{J_y}{z_Л}.$

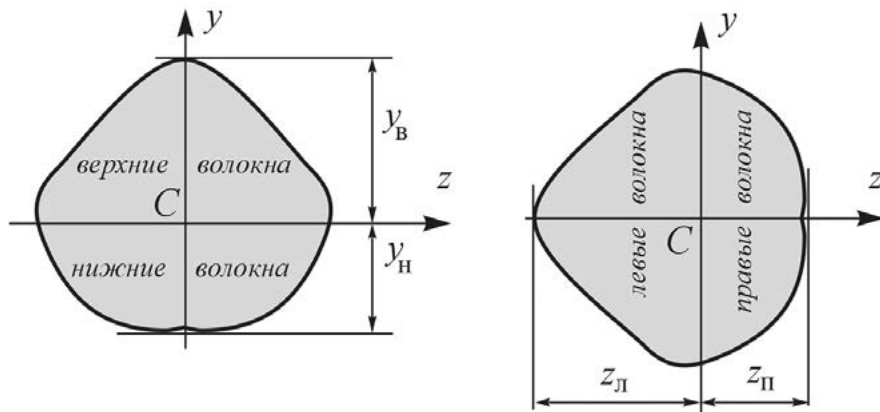


Рис. 2.12. Моменты сопротивления сечения

Размерность моментов сопротивления сечения — $\text{м}^3, \text{см}^3$. Для прямоугольного сечения с основанием b и высотой h моменты сопротивления равны:

$$W_z = W_z^H = W_z^B = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6};$$

$$W_y = W_y^П = W_y^Л = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}.$$

Для круглого сечения радиусом r :

$$W = W_z^H = W_z^B = W_y^П = W_y^Л = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Моменты сопротивления прокатных профилей можно найти в сортаменте, который представлен в приложении.

2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.2.1. Сечение с одной осью симметрии 1

Задание

Для сечения (рис. 2.13) требуется:

- 1) определить положение центра тяжести сечения;
- 2) вычислить моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) найти положение главных центральных осей инерции;
- 4) определить величины главных радиусов инерции;
- 5) найти моменты сопротивления сечения.

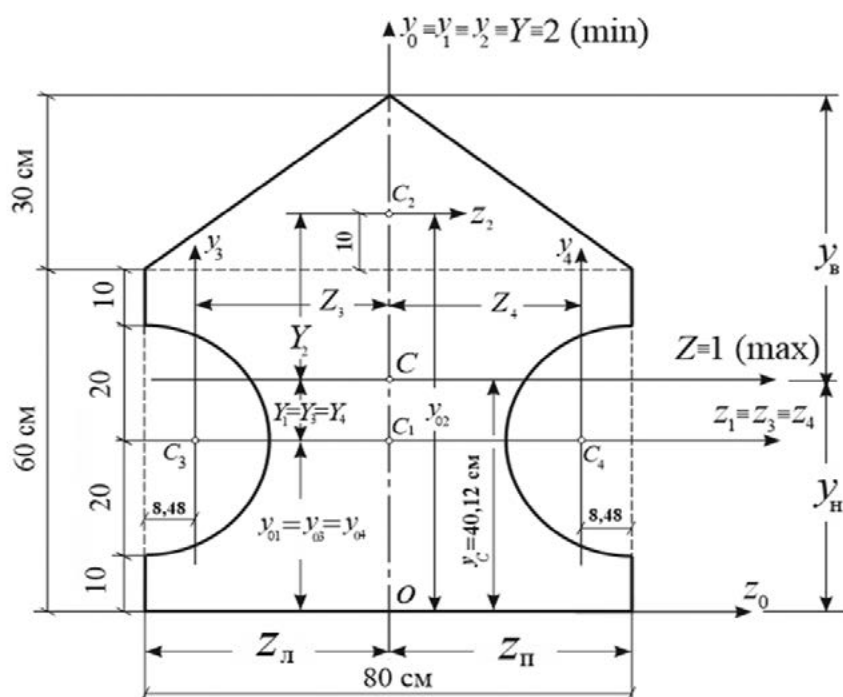


Рис. 2.13. Поперечное сечение стержня к зад. 2.2.1

Решение

1. Центр тяжести.

Разобьем сечение на 4 части (рис. 2.14):

- 1 — прямоугольник ($b = 80$ см, $h = 60$ см);
- 2 — равнобедренный треугольник ($h = 30$ см, $b = 80$ см);
- 3 — полукруг радиусом $r = 20$ см (вырез);
- 4 — полукруг радиусом $r = 20$ см (вырез).

Примем для удобства вычислений моменты инерции вырезанных фигур со знаком «-».

Сначала найдем площади каждой части.

1 — прямоугольник:

$$A_1 = 80 \cdot 60 = 4800 \text{ см}^2.$$

2 — треугольник:

$$A_2 = \frac{80 \cdot 30}{2} = 1200 \text{ см}^2.$$

3, 4 — два полукруга радиусом $r = 20$ см (вырезы):

$$A_3 = A_4 = -\frac{\pi r^2}{2} = -\frac{3,14 \cdot 20^2}{2} = -628,0 \text{ см}^2.$$

Суммарная площадь сечения равна:

$$A = 4800 + 1200 - 628 - 628 = 4744 \text{ см}^2.$$

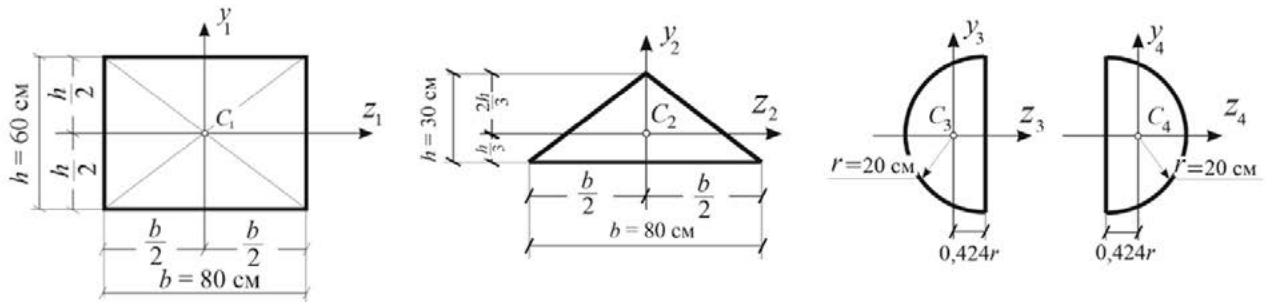


Рис. 2.14. Выделенные части сечения с осями к зад. 2.2.1

Центр тяжести сечения лежит на оси симметрии фигуры. Пусть одна из начальных осей Oy_0z_0 совпадает с основанием фигуры, а другая — с осью симметрии (рис. 2.13). Тогда координаты центров тяжести y_{0i} каждой части будут равны:

1) $y_{01} = y_{03} = y_{04} = 30 \text{ см}$ (центры тяжести прямоугольника и двух полукругов находятся на одном расстоянии от оси Oz_0);

2) $y_{02} = 70 \text{ см}$ (центр тяжести треугольника расположен на одной трети его высоты плюс высота прямоугольника).

Найдем координату центра тяжести:

$$y_C = \frac{S_{z0}}{A} = \frac{A_1 y_{01} + A_2 y_{02} + A_3 y_{03} + A_4 y_{04}}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4} =$$

$$= \frac{4800 \cdot 30 + 1200 \cdot 70 + (-628)30 + (-628)30}{4800 + 1200 - 628 - 628} = \frac{190\,320}{4744} = 40,12 \text{ см}.$$

Отмечаем точку C , откладывая вверх от оси Oz_0 расстояние $y_C = 40,12 \text{ см}$, после чего проводим две центральные оси CY и CZ .

Для дальнейшего решения задачи нам необходимо найти новые координаты Y_i центров тяжести каждой части относительно центральных осей.

$$Y_1 = y_{01} - y_C = 30 - 40,12 = -10,12 \text{ см};$$

$$Y_2 = y_{02} - y_C = 70 - 40,12 = 29,88 \text{ см};$$

$$Y_3 = Y_4 = y_{03} - y_C = 30 - 40,12 = -10,12 \text{ см}.$$

Проверка центра тяжести. Проверка правильности нахождения центра тяжести основана на том, что статические моменты относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, должны быть равны нулю.

Статический момент относительно центральной оси CZ равен:

$$S_Z = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4 = 4800(-10,12) + 1200 \cdot 29,88 +$$

$$+ (-628)(-10,12) + (-628)(-10,12) = -48576 + 48567 = -9 \text{ см}^3.$$

Из-за округления промежуточных результатов получили число, отличное от нуля. При выполнении инженерных расчетов в строительстве обычно допускается погрешность до 3–4 %. Погрешность расчетов вычисляется делением результата расчетов на одно из сравниваемых чисел, причем оба из них берутся по модулю.

Вычислим погрешность определения центра тяжести в нашем примере:

$$\Delta\%(S_Z) = \frac{9}{48\,576} 100\% = 0,0185\% \leq 3\%.$$

Требования, предъявляемые к расчетам, соблюдаются.

Заметим, что для того, чтобы получить указанную погрешность в пределах 3–4 %, рекомендуется не переписывать с калькулятора все значащие цифры, а округлять результаты до четырех значащих цифр, что и сделано в настоящем примере. Окончательный результат можно округлять до трех значащих цифр (примеры чисел, которые содержат четыре значащих цифры: 1,123; 12,34; 172,5; $1,237 \cdot 10^6$ и др.). Это касается и результатов расчетов в предыдущих примерах раздела 1, а также при решении последующих задач.

2. Вычисление моментов инерции относительно центральных осей.

Вычислим сначала собственные моменты инерции каждой фигуры.

1 — прямоугольник: $b = 80$ см, $h = 60$ см (центр тяжести в т. C_1).

Собственные осевые моменты инерции прямоугольника равны:

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{80 \cdot 60^3}{12} = 1,440 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{60 \cdot 80^3}{12} = 2,560 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции прямоугольника равен нулю, как для любой симметричной фигуры.

$$J_{z_1 y_1} = 0.$$

2 — треугольник: $b = 80$ см, $h = 30$ см (центр тяжести в т. C_2).

Собственные осевые моменты инерции треугольника равны:

$$J_{z_2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{80 \cdot 30^3}{36} = 6,000 \cdot 10^6 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_2} = \frac{hb^3}{48} = \frac{30 \cdot 80^3}{48} = 3,200 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции треугольника равен нулю, как для любой симметричной фигуры.

3, 4 — два полукруга радиусом $r = 20$ см (вырезы) с центрами тяжести в точках C_3 и C_4 .

Осевые моменты инерции относительно их центральных осей равны:

$$J_{z_3} = J_{z_4} = -\frac{\pi r^4}{8} = -\frac{3,14 \cdot 20^4}{8} = -6,280 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3} = J_{y_4} = -0,11r^4 = -0,11 \cdot 20^4 = -1,760 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Отметим, что полукруги повернуты на 90° , и их осевые моменты инерции находятся по формулам, которые учитывают их положение.

Если бы полукруги были расположены, как показано на рис. 2.11, т.е., когда ось z горизонтальная, а ось y — вертикальная, то моменты инерции определялись бы по формулам

$$J_z = 0,11r^4; \quad J_y = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Очевидно, что центробежные моменты инерции полукруглых вырезов равны нулю (симметричные фигуры):

$$J_{z_3 y_3} = J_{z_4 y_4} = 0.$$

Найдем координаты центров тяжести фигур относительно центральных осей CZY .

Координаты центров тяжести прямоугольника и треугольника, отсчитываемые по горизонтальной оси, равны нулю, т.е. $Z_1 = Z_2 = 0$, так как они расположены на оси CY .

Найдем координаты Z_3 и Z_4 вырезанных по бокам полукругов. Известно, что расстояние от основания полукруга до его центра тяжести равно: $0,424r = 0,424 \cdot 20 = 8,48$ см. Тогда координаты Z_i центров тяжести полукругов равны:

$$Z_3 = -(40 - 8,48) = -31,52 \text{ см}; \quad Z_4 = 40 - 8,48 = +31,52 \text{ см}.$$

В расчетах также будем учитывать координаты центров тяжести частей, отсчитываемые по оси CY , полученные ранее.

Прямоугольник и два полукруглых выреза:

$$Y_1 = -10,12 \text{ см}; \quad Y_3 = Y_4 = -0,12 \text{ см}.$$

Треугольник: $Y_2 = -29,88$ см.

Моменты инерции всего сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести, равны:

$$\begin{aligned} J_Z = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{z_i} + Y_i^2 A_i] &= [J_{z_1} + Y_1^2 A_1] + [J_{z_2} + Y_2^2 A_2] + [J_{z_3} + Y_3^2 A_3] + \\ &+ [J_{z_4} + Y_4^2 A_4] = [1,440 \cdot 10^6 + (-10,12)^2 \cdot 4800] + \\ &+ [6,000 \cdot 10^4 + (-29,88)^2 \cdot 1200] + [(-6,280 \cdot 10^4) + (-10,12)^2 (-628)] + \\ &+ [(-6,280 \cdot 10^4) + (-10,12)^2 (-628)] = 2,809 \cdot 10^6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_Y = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{y_i} + Z_i^2 A_i] &= [J_{y_1} + Z_1^2 A_1] + [J_{y_2} + Z_2^2 A_2] + [J_{y_3} + Z_3^2 A_3] + [J_{y_4} + Z_4^2 A_4] = \\ &= [2,560 \cdot 10^6 + 0^2 \cdot 4800] + [3,200 \cdot 10^5 + 0^2 \cdot 1200] + \\ &+ [(-1,760 \cdot 10^4) + (-31,52)^2 (-628)] + [(-1,760 \cdot 10^4) + (+31,52)^2 (-628)] = 1,597 \cdot 10^6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{ZY} = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{z_i y_i} + Z_i Y_i A_i] &= [J_{z_1 y_1} + Z_1 Y_1 A_1] + [J_{z_2 y_2} + Z_2 Y_2 A_2] + [J_{z_3 y_3} + Z_3 Y_3 A_3] + [J_{z_4 y_4} + Z_4 Y_4 A_4] = \\ &= [0 + 0(-10,12) 4800] + [0 + 0(-29,88) 1200] + \\ &+ [0 + (-31,52)(-10,12)(-628)] + [0 + (+31,52)(-10,12)(-628)] = 0. \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции сечения J_{ZY} получился равным нулю, что подтверждает известное из теории утверждение о том, что, *если одна из осей является осью симметрии, то центробежный момент относительно этой и любой другой перпендикулярной ей оси равен нулю.*

3. Главные центральные оси инерции.

Очевидно, что найденные центральные оси являются одновременно и главными осями, так как одна из осей совпадает с осью симметрии. Нам остается только выбрать из двух значений осевых моментов инерции максимальную и минимальную величину. Итак, имеем:

$$J_Z = J_1 = J_{\max} = 2,809 \cdot 10^6 \text{ см}^4, \quad J_Y = J_2 = J_{\min} = 1,597 \cdot 10^6 \text{ см}^4.$$

На рис. 2.13 представлены главные оси инерции, обозначенные «1» и «2».

4. Главные радиусы инерции.

Радиусы инерции получаются путем вычисления квадратного корня из отношения осевого момента инерции и площади сечения. Найдем радиусы инерции относительно соответствующих осей:

$$i_z = i_1 = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{2,809 \cdot 10^6}{4744}} = 24,3 \text{ см};$$

$$i_y = i_2 = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{1,597 \cdot 10^6}{4744}} = 18,3 \text{ см}.$$

5. Моменты сопротивления сечения.

Расстояние y_n от центра тяжести до низа сечения:

$$y_n = y_c = 40,12 \text{ см}.$$

Расстояние y_b от центра тяжести до верха сечения:

$$y_b = 60 + 30 - 40,12 = 49,88 \text{ см}.$$

Расстояния от центра тяжести до самой правой и самой левой точек сечения равны:

$$z_n = z_l = 80/2 = 40 \text{ см}.$$

Моменты сопротивления будут равны:

$$W_z^n = \frac{J_z}{y_n} = \frac{2,809 \cdot 10^6}{42,12} = 66\,690 \text{ см}^3 = 6,67 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

$$W_z^b = \frac{J_z}{y_b} = \frac{2,869 \cdot 10^6}{49,88} = 57\,518 \text{ см}^3 = 5,75 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

$$W_y^n = \frac{J_y}{z_n} = W_y^l = \frac{J_y}{z_l} = \frac{1,597 \cdot 10^6}{40} = 39\,925 \text{ см}^3 = 3,99 \cdot 10^4 \text{ см}^3.$$

2.2.2. Сечение с одной осью симметрии 2

Задание

Для сечения, имеющего одну ось симметрии (рис. 2.15), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести сечения;
- 2) вычислить моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) найти положение главных центральных осей инерции;
- 4) определить величины главных радиусов инерции;
- 5) найти моменты сопротивления сечения.

Решение

Разобьем сечение на две части и определим собственные геометрические характеристики фигур:

- 1 — прямоугольник;
- 2 — равнобедренный треугольник (вырез).

При вычислении площади сечения, статических моментов и моментов инерции соответствующие значения для 2-й части должны вычитаться из значений для 1-й части.

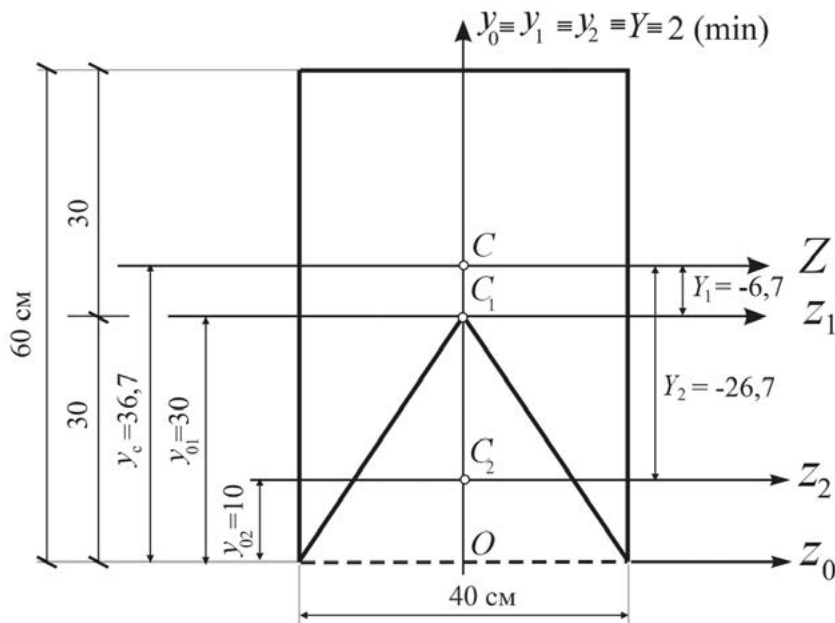


Рис. 2.15. Поперечное сечение для зад. 2.2.2

Вычислим геометрические характеристики каждой части:

1 — прямоугольник:

$$A_1 = 40 \cdot 60 = 2400 \text{ см}^2;$$

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 7,20 \cdot 10^5 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 3,20 \cdot 10^5 \text{ см}^4.$$

2 — треугольник:

$$A_2 = -\frac{40 \cdot 30}{2} = -600 \text{ см}^2;$$

$$J_{z_2} = -\frac{bh^3}{36} = -\frac{40 \cdot 30^3}{36} = -30\,000 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_2} = -\frac{hb^3}{48} = -\frac{30 \cdot 40^3}{48} = -40\,000 \text{ см}^4.$$

1. Определение положения центра тяжести сечения.

Задаем начальные оси Oy_0z_0 и находим координаты y_{0i} : $y_{01} = 30 \text{ см}$; $y_{02} = 10 \text{ см}$.

Координата центра тяжести:

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_{01} + A_2 y_{02}}{A_1 + A_2} = \frac{2400 \cdot 30 + (-600) \cdot 10}{2400 - 600} = \frac{66\,000}{1800} = 36,7 \text{ см}.$$

От оси z_0 откладываем вверх расстояние 36,7 см и отмечаем точку C — центр тяжести сечения.

Определим координаты частей относительно центра тяжести:

$$Y_1 = y_{01} - y_C = 30 - 36,7 = -6,7 \text{ см};$$

$$Y_2 = y_{02} - y_C = 10 - 36,7 = -26,7 \text{ см}.$$

Проверка центра тяжести:

$$S_Z = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 2400 (-6,7) + (-600) (-26,7) = (-16\,080) + 16\,020 = -60 \text{ см}^3.$$

Погрешность:

$$\Delta\%(S_Z) = \frac{60}{16\,020} 100\% = 0,37\% \leq 3\%,$$

что считается допустимой величиной.

2. Моменты инерции относительно центральных осей.

$$\begin{aligned} J_Z &= \sum_{i=1}^{n=2} (J_{z_i} + Y_i^2 A_i) = (J_{z_1} + Y_1^2 A_1) + (J_{z_2} + Y_2^2 A_2) = \\ &= [720\,000 + (-6,7)^2 \cdot 2400] + [(-30\,000) + (-26,7)^2 \cdot (-600)] = 3,700 \cdot 10^5 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_Y &= \sum_{i=1}^{n=2} (J_{y_i} + Z_i^2 A_i) = (J_{y_1} + Z_1^2 A_1) + (J_{y_2} + Z_2^2 A_2) = \\ &= [320\,000 + 0^2 \cdot 2400] + [(-40\,000) + 0^2 \cdot (-600)] = 2,800 \cdot 10^5 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_{ZY} = \sum_{i=1}^{n=2} (J_{z_i y_i} + Z_i Y_i A_i) = (J_{z_1 y_1} + Z_1 Y_1 A_1) + (J_{z_2 y_2} + Z_2 Y_2 A_2) = 0.$$

3. Главные оси инерции и главные моменты инерции.

Из двух величин осевых моментов инерции выбираем наибольшую — это максимальный момент инерции, другая величина — минимальный момент инерции:

$$J_1 = J_{\max} = 3,70 \cdot 10^5 \text{ см}^4, J_2 = J_{\min} = 2,80 \cdot 10^5 \text{ см}^4.$$

Итак, имеем:

4. Главные радиусы инерции.

$$i_z = i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{3,700 \cdot 10^5}{1800}} = 14,3 \text{ см};$$

$$i_y = i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{2,800 \cdot 10^5}{1800}} = 12,5 \text{ см}.$$

5. Моменты сопротивления сечения.

Найдем расстояние y_H от центра тяжести до низа сечения: $y_H = y_C = 36,7$ см. Расстояние y_B от центра тяжести до верха сечения: $y_B = 60 - 36,7 = 23,3$ см. Расстояния от центра тяжести до самой правой и самой левой точек сечения равны: $Z_H = Z_L = 40/2 = 20$ см.

Найдем моменты сопротивления сечения:

$$W_Z^H = \frac{J_Z}{y_H} = \frac{3,700 \cdot 10^5}{36,7} = 1,008 \cdot 10^4 \text{ см}^3;$$

$$W_Z^B = \frac{J_Z}{y_B} = \frac{3,700 \cdot 10^5}{23,3} = 1,588 \cdot 10^4 \text{ см}^3.$$

$$W_Y^H = \frac{J_Y}{z_H} = W_Y^L = \frac{J_Y}{z_L} = \frac{2,800 \cdot 10^5}{20} = 14\,000 \text{ см}^3.$$

2.2.3. Несимметричное сечение из прокатных профилей

Задание

Для несимметричного сечения, имеющего одну ось симметрии (рис. 2.16), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести сечения;
- 2) вычислить моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) найти положение главных центральных осей инерции;
- 4) определить величины главных радиусов инерции;
- 5) найти моменты сопротивления сечения.

Сечение состоит из стального неравнополочного уголка 125×80×10 мм (ГОСТ 8510-86 «Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент» [13]) и стального швеллера № 20У (ГОСТ 8240-97 «Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент» [14]), (рис. 2.15). Из сортамента выписываем геометрические характеристики уголка и швеллера (рис. 2.17 и 2.18).



Рис. 2.16. Схема сечения

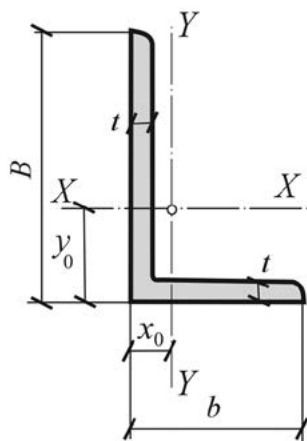


Рис. 2.17. Уголок 125×80×10

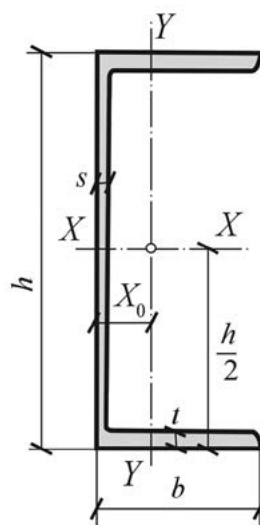


Рис. 2.18. Швеллер № 20У

Собственные геометрические характеристики уголка 125×80×10 будут следующими:

- $B = 125$ мм, $b = 80$ мм, $t = 10$ мм;
- площадь сечения: $19,70$ см²;
- моменты инерции: $J_x = 311,61$ см⁴; $J_y = 100,47$ см⁴; $J_{xy} = 102,00$ см⁴;
- расстояния, определяющие положение центра тяжести уголка: $x_0 = 1,92$ см, $y_0 = 1,92$ см.

Собственные геометрические характеристики швеллера № 20У будут следующими:

- $h = 200$ мм; $b = 76$ мм; $s = 5,2$ мм; $t = 9,0$ мм;
- площадь сечения: $23,40$ см²;
- моменты инерции: $J_x = 1520,0$ см⁴; $J_y = 113,00$ см⁴; очевидно, что $J_{xy} = 0$.

По вертикали центр тяжести швеллера находится на половине его высоты, которая составляет 10 см, а в горизонтальном направлении определяется координатой $X_0 = 2,07$ см.

Изобразим сечение в масштабе на рис. 2.19 и обозначим на нем положение центров тяжести уголка и швеллера с указанием собственных центральных осей $C_1z_1y_1$ и $C_2z_2y_2$.

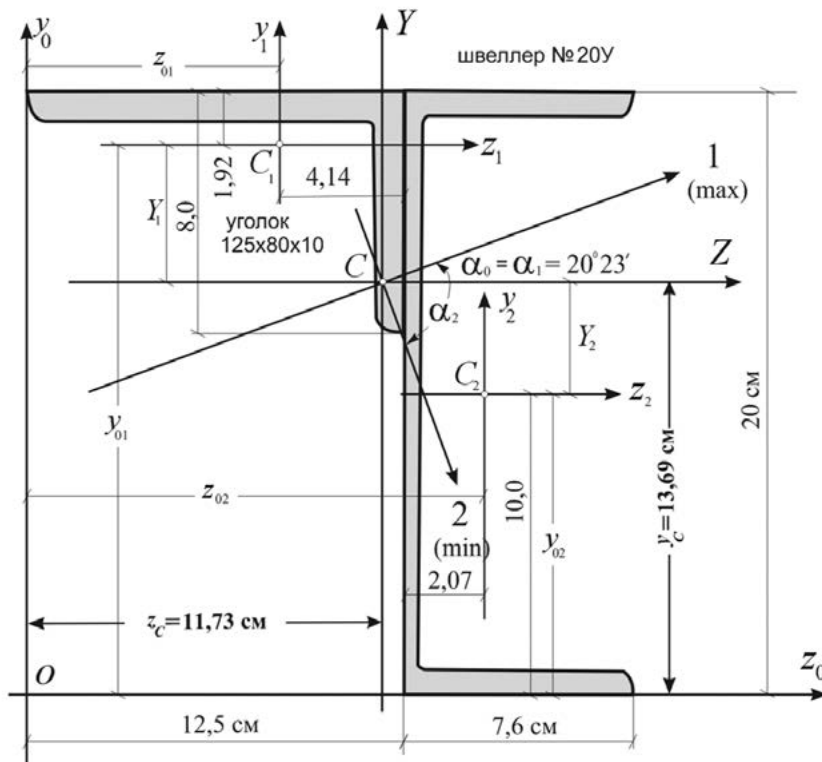


Рис. 2.19. Сечение с указанием размеров и осей

Следует отметить, что в сортаменте горизонтальная и вертикальная центральные оси обозначаются $X-X$ и $Y-Y$, а при решении задач по определению напряжений в балках ось x будет совпадать с осью стержня, а в поперечном сечении вертикальную ось будем обозначать y , а горизонтальную z , как показано на рис. 2.19. Поэтому собственные геометрические характеристики уголка 125×80×10 будут следующими:

- площадь сечения: $A_1 = 19,70 \text{ см}^2$;
- моменты инерции: $J_{z_1} = 100,47 \text{ см}^4$; $J_{y_1} = 311,61 \text{ см}^4$; $J_{z_1y_1} = -102,0 \text{ см}^4$.

Осевой момент инерции фигуры, вытянутой в горизонтальном направлении, вычисленный относительно горизонтальной оси, оказывается меньше момента инерции относительно вертикальной оси. Это хорошо видно на примере прямоугольника. В нашем случае при поворнотом на 90° уголке по отношению к его положению в сортаменте его сечение оказывается вытянутым в горизонтальном направлении, откуда получаем $J_{z_1} < J_{y_1}$.

Для определения знака центробежного момента уголка мысленно представим его в виде суммы трех интегралов, которые вычисляются отдельно для частей сечения, расположенных в четвертях системы координат. В осях $C_1z_1y_1$ (рис. 2.19) для частей, расположенных во II и IV четвертях, будем иметь значения центробежных моментов инерции со знаком «-» (одна из координат отрицательная), а для части, расположенной в I четверти, значение его будет положительным. В сумме получаем отрицательный знак этой величины, так как два минуса «перевешивают» один плюс.

Собственные геометрические характеристики швеллера № 20У в осях $C_2z_2y_2$ будут следующими:

- площадь сечения: $A_2 = 23,40 \text{ см}^2$;
- моменты инерции: $J_{z_2} = 1520,0 \text{ см}^4$; $J_{y_2} = 113,00 \text{ см}^4$; $J_{z_2y_2} = 0$.

Решение

1. Определение положения центра тяжести сечения.

Задаем начальные оси Oz_0y_0 . Координаты центров тяжести уголка и швеллера сечения будут равны:

$$y_{01} = 20 - 1,92 = 18,08 \text{ см}; z_{01} = 12,5 - 4,14 = 8,36 \text{ см};$$

$$y_{02} = 10 \text{ см}; z_{02} = 12,5 + 2,07 = 14,57 \text{ см}.$$

Определяем положение центра тяжести:

$$y_C = \frac{S_{z0}}{A} = \frac{A_1 y_{01} + A_2 y_{02}}{A_1 + A_2} = \frac{19,7 \cdot 18,08 + 23,4 \cdot 10}{19,7 + 23,4} = 13,69 \text{ см};$$

$$z_C = \frac{S_{y0}}{A} = \frac{A_1 z_{01} + A_2 z_{02}}{A_1 + A_2} = \frac{19,7 \cdot 8,36 + 23,4 \cdot 14,57}{19,7 + 23,4} = 11,73 \text{ см}.$$

Откладываем значения на чертеже, обозначаем центр тяжести C и центральные оси CZY .

Определяем координаты центров тяжести частей сечения относительно центральных осей.

$$Y_1 = y_{01} - y_C = 18,08 - 13,69 = 4,39 \text{ см};$$

$$Y_2 = y_{02} - y_C = 10 - 13,69 = -3,69 \text{ см};$$

$$Z_1 = z_{01} - z_C = 8,36 - 11,73 = -3,37 \text{ см};$$

$$Z_2 = z_{02} - z_C = 14,57 - 11,73 = 2,84 \text{ см}.$$

Выполняем проверку центра тяжести. Статические моменты относительно центральных осей CZY равны:

$$S_Z = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 19,7 \cdot 4,39 + 23,4 (-3,69) = 86,48 - 86,35 = 0,13 \text{ см}^3;$$

$$S_Y = A_1 Z_1 + A_2 Z_2 = 19,7 \cdot 3,37 + 23,4 (-2,84) = 66,39 - 66,46 = -0,07 \text{ см}^3.$$

Найдем погрешности определения центра тяжести:

$$\Delta\%(S_Z) = \frac{0,13}{86,35} 100 \% = 0,15 \% \leq 3 \%;$$

$$\Delta\%(S_Y) = \frac{0,07}{66,39} 100 \% = 0,11 \% \leq 3 \%;$$

Требования, предъявляемые к расчетам, соблюдаются.

2. Моменты инерции относительно центральных осей.

Найдем моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} J_Z &= \sum_{i=1}^{n=4} [J_{z_i} + Y_{i2} A_i] = [J_{z_1} + Y_{12} A_1] + [J_{z_2} + Y_{22} A_2] = \\ &= [100,47 + 4,39^2 \cdot 19,7] + [1520 + (-3,69)^2 23,4] = 2318,7 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_Y &= \sum_{i=1}^{n=4} [J_{y_i} + Z_{i2} A_i] = [J_{y_1} + Z_{12} A_1] + [J_{y_2} + Z_{22} A_2] = \\ &= [311,61 + (-3,37)^2 19,7] + [113 + (-2,84)^2 23,4] = 837,1 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_{ZY} = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{z_i y_i} + Z_i Y_i A_i] = [J_{z_1 y_1} + Z_1 Y_1 A_1] + [J_{z_2 y_2} + Z_2 Y_2 A_2] =$$

$$= [(-102,0) + (-3,37) 4,39 \cdot 19,7] + [0 + 2,84(-3,69) 23,4] = 638,7 \text{ см}^4.$$

3. Определение положения главных центральных осей инерции и значений моментов инерции относительно этих осей.

$$J_{1,2} = J_{\max, \min} = \frac{J_Z + J_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_Z - J_Y}{2}\right)^2 + J_{ZY}^2} =$$

$$= \frac{2318,7 + 837,1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2318,7 - 837,1}{2}\right)^2 + (-638,7)^2} = 1577,9 \pm 978,1 \text{ см}^4.$$

$$J_1 = J_{\max} = 1577,9 + 978,1 = 2556,0 \text{ см}^4;$$

$$J_2 = J_{\min} = 1577,9 - 978,1 = 599,8 \text{ см}^4.$$

Для проверки используем свойство инвариантности осевых моментов инерции:

$$J_1 + J_2 = J_Z + J_Y;$$

$$2556,0 + 599,8 = 2318,7 + 837,1; 3155,8 = 3155,8.$$

Свойство инвариантности подтверждается.

Найдем теперь положение главных центральных осей инерции:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{ZY}}{J_Z - J_Y} = -\frac{2(-638,7)}{2318,7 - 837,1} = 0,862;$$

$$2\alpha_0 = 40,77 = 40^\circ 46';$$

$$\alpha_0 = 20^\circ 23'.$$

Можно заметить, что угол α_0 может определять положение как максимальной, так и минимальной оси. В данном случае можно догадаться, что именно ось 1 соответствует этому углу, так как перпендикулярно этой оси сечение оказывается вытянутым. Чтобы однозначно найти углы наклона главных осей, можно также воспользоваться другими формулами:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{J_{ZY}}{J_Z - J_Y} = -\frac{-638,7}{837,1 - 2556,0} = 0,372;$$

$$\alpha_1 = 20^\circ 23';$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{J_{ZY}}{J_Z - J_Y} = -\frac{-638,7}{837,1 - 599,8} = -2,692;$$

$$\alpha_2 = -69^\circ 37'.$$

Угол между осями 1 и 2 будет составлять 90° .

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ.$$

3. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

3.1.1. Внутренние силы и правило знаков

Если нагрузки расположены в одной плоскости, которая проходит через главную центральную ось инерции, такой изгиб называют *плоским прямым* (рис. 3.1). Будем направлять ось y вниз, ось z будем ориентировать в горизонтальном направлении, ось x направим вдоль оси балки.

В этом случае в поперечных сечениях возникают только два усилия: M_z и Q_y — изгибающий момент относительно оси z и поперечная сила по оси y (рис. 3.2). Опуская индексы усилий, далее будем их обозначать M и Q .

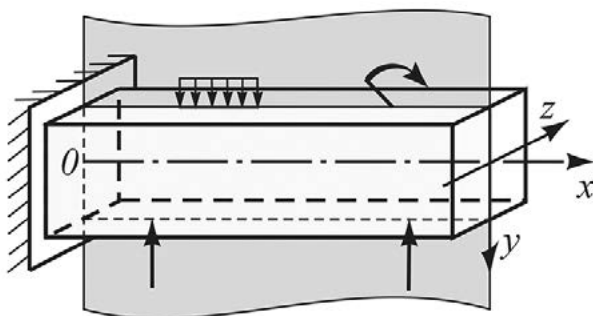


Рис. 3.1. Плоский прямой изгиб

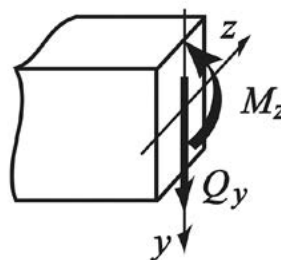


Рис. 3.2. Внутренние усилия в поперечном сечении

Правило знаков внутренних усилий: *поперечная сила Q считается положительной, если она стремится повернуть прилегающий элемент по ходу часовой стрелки* (рис. 3.3).

Чтобы легче определить знак Q , можно, например, мысленно закрепить малый элемент, вырезанный из балки, шарниром («как бы вбить гвоздик»), приложить поперечную силу и отметить, в каком направлении будет поворачиваться элемент.

Изгибающий момент M будет положительным, когда он вызывает растяжение нижних волокон стержня (рис. 3.4). К крайним сечениям вырезанного из балки малого элемента приложены положительные изгибающие моменты. Они будут считаться положительными, хотя левый момент направлен по ходу часовой стрелки, а правый — против. Термин «волокна» означает часть материала балки, ориентированную в горизонтальном направлении. Между ними расположено нейтральное волокно, отмеченное штрихпунктирной линией, которое при изгибе только искривляется, не удлиняясь и не укорачиваясь.

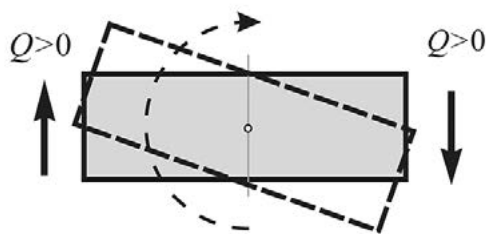


Рис. 3.3. Знаки Q

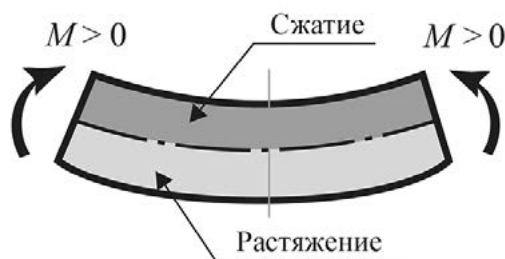


Рис. 3.4. Знаки M

На рис. 3.5 предлагается способ, упрощающий определение знака изгибающего момента. Надо представить, что в руке зажат гибкий предмет типа ластика. Следует направить его влево, если речь идет о моментах сил, расположенных слева от сечения, или вправо, если сум-

мируются правые моменты. Если конец ластика пойдет вверх, то растянуты нижние волокна, и изгибающий момент будет положительным.

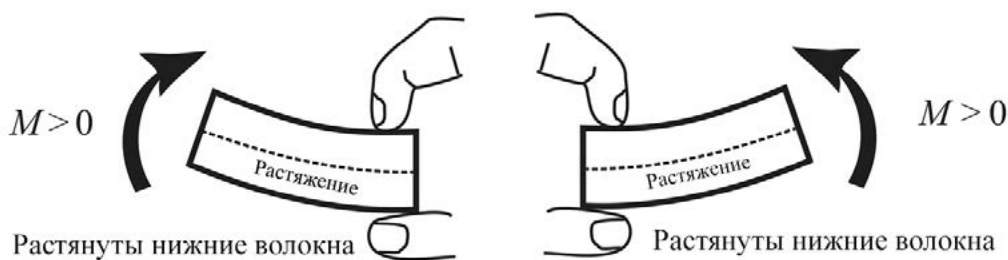


Рис. 3.5. Способ определения знака изгибающего момента M

3.1.2. Способы определения внутренних усилий

Для отыскания внутренних усилий будем использовать следующее правило:

1) *поперечная сила Q определяется как сумма сил, перпендикулярных оси стержня, расположенных с одной стороны от сечения.*

Так, для горизонтального стержня необходимо вычислить сумму вертикальных сил, расположенных левее или правее сечения, то есть сумму правых или левых сил.

2) *изгибающий момент M определяется как сумма моментов сил, расположенных с одной стороны от сечения.*

Другими словами, находясь в каком-то сечении горизонтальной балки, мы должны просуммировать моменты сил, которые находятся слева или справа от сечения. Если же мы просуммируем моменты и правых, и левых сил, то должны получить ноль в силу выполнения уравнения равновесия моментов.

Запишем для горизонтальных балок эти правила в виде формул:

$$Q = \sum P_{\text{лев}} = \sum P_{\text{прав}}; M = \sum M_{\text{лев}} = \sum M_{\text{прав}}$$

Важное замечание. При проектировании строительных конструкций принято строить эпюру M со стороны растянутого волокна.

Значения на эпюрах M откладывают со стороны тех волокон, которые растянуты. Такое правило позволяет правильно проектировать железобетонные балки, в которых расчетная арматура устанавливается вдоль балки, близко к поверхности, но именно на растянутом волокне. Бетон же практически не работает на растяжение, так как относится к хрупким материалам. Эпюра M указывает слабую зону (те волокна), где может произойти его разрушение. Туда и закладывают стальную арматуру, которая хорошо работает на растяжение. Если бы не было арматуры, бетонная балка легко бы сломалась от растягивающих напряжений.

Отметим, что знак на эпюре M указывают обычно только в горизонтальных балках. В эпюрах изгибающих моментов в стержневых системах (рамах, арках, ломаных балках и др.) знак не ставят, а эпюру M строят, откладывая значения со стороны тех волокон, которые растягиваются.

Эпюры внутренних усилий располагают под схемой балки, построенной в масштабе (это очень важно для выполнения визуальной проверки) с указанием всех величин нагрузок и расстояний. Наносят две осевые базисные линии, параллельные оси балки, от которых будут откладываться найденные значения внутренних усилий. Обычно верхняя эпюра — эпюра поперечных сил Q , а нижняя — эпюра изгибающих моментов M .

Ординаты со знаком «+» на эпюре поперечных сил Q обычно откладывают сверху от базисной линии, но допускается откладывать положительные ординаты и снизу. Главное, что требуется в обязательном порядке, — это поставить знак на эпюре Q .

Эпюра изгибающих моментов M строится со стороны растянутого волокна, как принято при проведении расчетов строительных конструкций. То есть, если растягиваются ниж-

ние волокна в каком-то сечении, то полученное значение на графике нужно отложить вниз, и наоборот, если растянуты верхние волокна, то значение откладывают вверх. Это — основное правило при построении эпюры M , и если совместить его с правилом знаков изгибающих моментов, которое гласит, что *изгибающий момент будет положительным при растяжении нижних волокон*, то после построения эпюры окажется, что части эпюры M , которые расположены снизу от базисной линии, будут иметь знак «+», а части, которые оказались сверху от нее, будут обозначены знаком «-». Другими словами, положительные значения на эпюре M откладывают снизу от базисной линии.

Очень важным правилом является штриховка эпюр, которая выполняется перпендикулярно базисной линии. Для эпюр внутренних усилий в рамах применение такого правила позволяет хорошо различить эпюры, построенные на горизонтальных и вертикальных участках, которые могут накладываться одна на другую.

В учебной литературе приводятся различные способы построения эпюр внутренних усилий при поперечном изгибе. Достаточно часто для расчета балок применяют способ, в соответствии с которым, используя метод сечений, получают аналитические зависимости $Q(x)$ и $M(x)$, графики которых затем строят. Однако такой способ оказывается достаточно трудоемким при расчете плоских рам, которые встретятся нам далее в курсе технической механики. Предлагаемый далее способ позволяет выработать единый подход для расчета балок и плоских рам.

В разделе, посвященном построению эпюр продольных сил, уже обсуждалось применение дифференциальной зависимости между продольной силой N и распределенной нагрузкой q . При поперечном изгибе, когда в сечении возникают два внутренних усилия Q и M , имеются две дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

Исходя из свойств производной функции, можно прийти к следствиям, которые будут служить основой для построения эпюр:

1) если $q = 0$, когда распределенная нагрузка на участке отсутствует, $Q = \text{const}$ (график — прямая линия, параллельная базисной линии, которую можно построить по одному значению на участке), M — линейная функция (график — наклонная прямая, которую можно построить по двум значениям на участке);

2) если $q = \text{const}$ (участок с равномерно распределенной нагрузкой), Q — линейная функция (график — наклонная прямая, которая строится по двум значениям на участке), M — квадратная парабола (график — кривая второго порядка, которую можно построить по 3-м значениям);

3) если $Q = 0$ в точке (наблюдается переход поперечной силы через базисную линию), на эпюре M будет экстремум (максимум или минимум).

В случае, когда нагрузка q будет иметь линейный характер, например, в случае учета гидростатического давления, то эпюра Q будет представлять собой квадратную параболу, а эпюра M — кубическую параболу.

Дифференциальные зависимости и следствия из них позволяют предугадать поведение функций $Q(x)$ и $M(x)$ на разных участках, а также проводить визуальную проверку правильности построенных графиков.

После завершения построения эпюр внутренних усилий рекомендуется выполнить окончательную визуальную проверку в соответствии со следующими правилами:

Правило 1 соответствует первому следствию из дифференциальных зависимостей, т.е., когда $q = 0$, на эпюре Q — прямая, параллельная базисной линии, а на эпюре M — наклонная прямая;

Правило 2 соответствует второму следствию из дифференциальных зависимостей, т.е., когда $q = \text{const}$, Q — наклонная прямая, M — квадратная парабола, причем выпуклость параболы

ориентирована в направлении приложенной нагрузки q (это правило иногда называют правилом «паруса» или «ветра» — ветер-нагрузка как бы надувает эпюру M);

Правило 3 соответствует третьему следствию из дифференциальных зависимостей, т.е. в сечениях, где $Q = 0$, на эпюре M будет наблюдаться экстремум, причем в случае перехода Q через ноль на участке с распределенной нагрузкой q касательная к графику M в точке экстремума должна иметь нулевой наклон;

Правило 4. В сечении, где приложена сила, в эпюре Q наблюдается скачок на величину этой силы, а в эпюре M — излом в сторону силы, «уголок», ориентированный острием по направлению силы (это правило иногда называют правилом «струны»);

Правило 5. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре M наблюдается скачок на величину этого момента, причем, если момент направлен по ходу часовой стрелки, то скачок в эпюре будет происходить вниз при движении по балке слева направо.

Эти правила позволяют быстро оценить правильность построения эпюр внутренних усилий.

Рассмотрим, как можно определить третью точку на параболе. Достаточно часто рисуют параболу «от руки», справедливо замечая, что выпуклость параболы ориентирована по направлению распределенной нагрузки (правило «паруса»). Однако третью точку на параболе рекомендуется все-таки определять.

Здесь возможны два случая. Рассмотрим их по порядку.

Случай 1. Эпюра Q не пересекает базисную линию (рис. 3.7, а).

В этом случае у нас есть возможность найти изгибающий момент в любом сечении на участке, например, в его центре, вычисляя значение момента суммированием правых или левых моментов. Однако такой подход оказывается в случае длинных балок достаточно трудоемким. Существует способ, который условно можно назвать «подвешивание параболы». Если взять балку на двух опорах, загруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.6), то в центре этой балки будет иметь место изгибающий момент, равный $f = ql^2/8$, который называют стрелкой параболы. Действительно, опорные реакции в этой балке будут одинаковые: $R_A = R_B = ql/2$, а изгибающий момент в центре балки будет равен:

$$f = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8}.$$

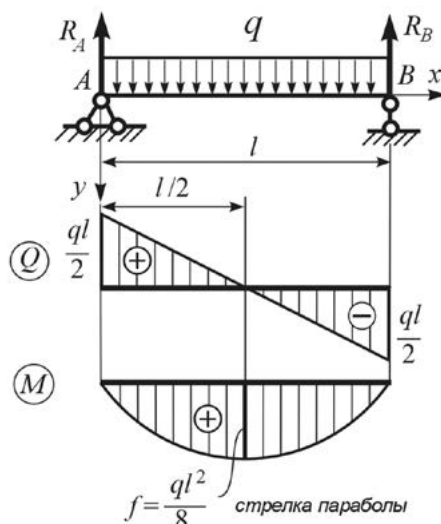


Рис. 3.6. Эпюры Q и M в балке на двух опорах

Рассмотрим рис. 3.7, на котором представлена эпюра Q , которая не переходит через ноль на участке с равномерно распределенной нагрузкой q . Естественно, что в этом случае эпюра M не будет иметь экстремума.

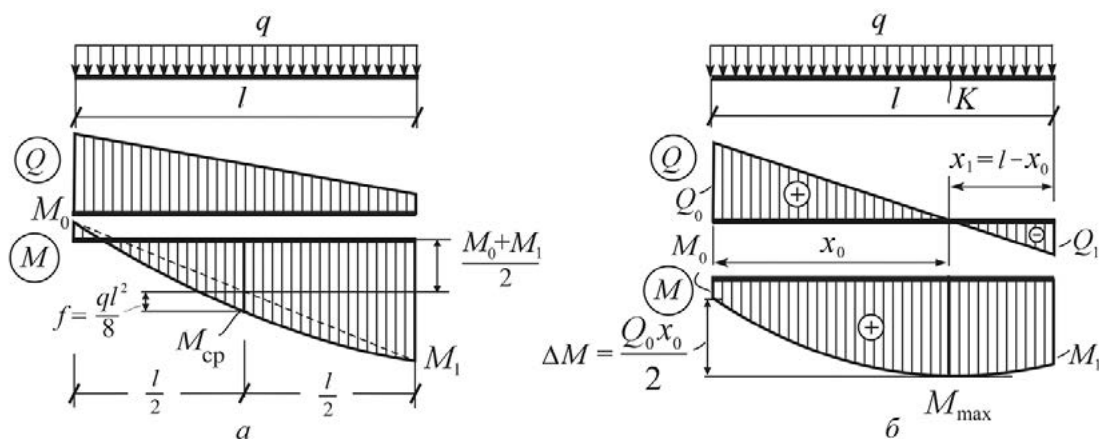


Рис. 3.7. Два случая параболы в эпюре M

Соединяем пунктирной прямой концы параболы, разбивая ее на две фигуры: трапецию и параболу (рис. 3.7, а). Находим среднюю линию трапеции и прибавляем к ней стрелку параболы. Отметим, что значение изгибающего момента в центре можно даже и не указывать, так как для дальнейших расчетов оно не пригодится. При построении эпюры M в масштабе достаточно провести геометрические построения и найти точку, через которую и пойдет кривая.

Случай 2. Эпюра Q пересекает базисную линию (рис. 3.7, б).

Первый способ состоит в том, чтобы, определив точку пересечения эпюры Q с базисной линией (допустим — это сечение K), затем найти изгибающий момент, суммируя правые или левые моменты внешних сил. Координату точки пересечения эпюры Q с базисной линией можно определить из подобия треугольников на эпюре, составляя пропорцию:

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{x_0}{l - x_0}.$$

После решения этого уравнения относительно x_0 получаем возможность определить максимальный изгибающий момент в сечении K путем суммирования моментов левых или правых сил. Этот способ также достаточно трудоемок при построении эпюр M в длинных балках.

Второй способ основан на изучении дифференциальных зависимостей при изгибе.

Из первой дифференциальной зависимости следует:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \rightarrow dQ = -qdx \rightarrow \int_{Q_0}^0 dQ = -q \int_0^{x_0} dx \rightarrow 0 - Q_0 = -q(x_0 - 0).$$

Отсюда получаем:

$$x_0 = \frac{Q_0}{q}.$$

Из второй дифференциальной зависимости имеем:

$$\frac{dM}{dx} = Q \rightarrow dM = Qdx \rightarrow \int_{M_0}^{M_{\max}} dM = \int_0^{x_0} Qdx.$$

Учитывая, что последний интеграл, содержащий поперечную силу Q , является площадью ω_Q треугольной эпюры поперечных сил на участке длиной x_0 , равной половине произведения основания треугольника x_0 на его высоту Q_0 , получаем:

$$\Delta M = M_{\max} - M_0; \text{ площадь } \omega_Q = \frac{Q_0 x_0}{2}; M_{\max} = M_0 + \frac{Q_0 x_0}{2} = M_0 + \frac{Q_0^2}{2q}.$$

Таким образом, чтобы найти максимальный момент на участке, надо сложить момент M_0 на левом конце участка с величиной ΔM , равной площади треугольной эпюры поперечных сил от $x = 0$ до $x = x_0$.

Если нужно найти величину x_1 , то следует разделить Q_1 на q , а чтобы определить затем максимальный изгибающий момент, следует к моменту M_1 прибавить площадь правого треугольника на эпюре Q с основанием x_1 , которая равна $Q_1 x_1 / 2$.

$$x_1 = \frac{Q_1}{q}; \quad M_{\max} = M_1 + \frac{Q_1 x_1}{2}.$$

3.1.3. Балки с промежуточными шарнирами

Балки с промежуточными шарнирами оказываются более экономичными, чем несколько балок на двух опорах, если правильно подобрать места расположения шарниров.

На рис. 3.8 изображены два варианта перекрытия двух пролетов по 10 м. Первый вариант представлен конструкцией из двух балок, имеющих шарнирные опоры на концах (рис. 3.8, а). Второй вариант (рис. 3.8, б) отличается введением в расчетную схему промежуточного шарнира, что приводит к уменьшению максимального момента с 25 кН·м до 16 кН·м и позволяет выбрать более экономичное решение, связанное с подбором сечения.

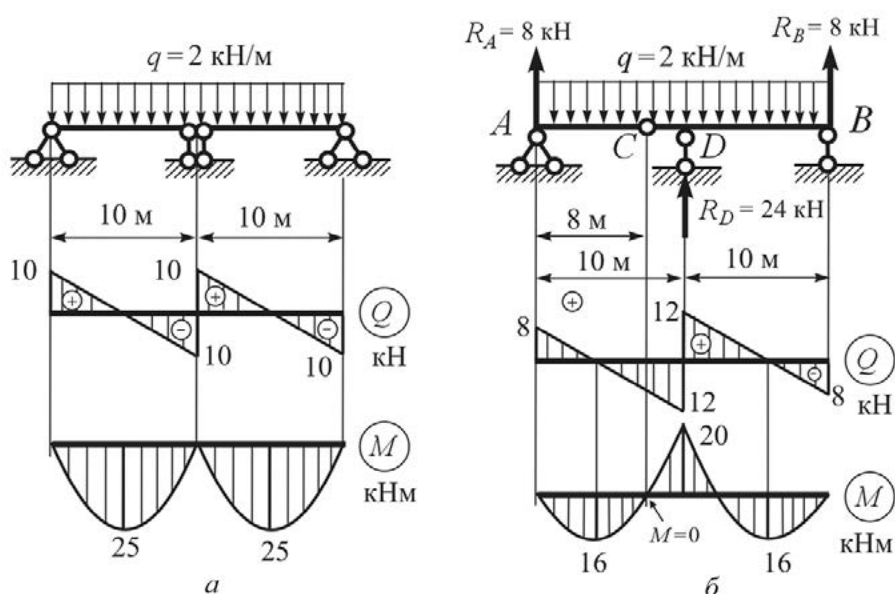


Рис. 3.8. Балки с промежуточными шарнирами более экономичны

Мы не будем разбирать сложные технические решения, обеспечивающие шарниры в балках. Например, если положить одну балочку на другую, выполнив в месте их соединения точечную сварку, то такое простое решение в целом можно считать промежуточным шарниром.

Отметим, что промежуточный шарнир обнуляет эпюру моментов, т.е. в сечении, где расположен шарнир, изгибающий момент равен нулю. Этим обстоятельством можно воспользоваться для нахождения опорных реакций, записывая относительно шарнира выражение для изгибающего момента (сумму моментов левых или правых сил приравнивают нулю). Так, для балки на рис. 3.8, б подобным образом можно найти реакцию R_A , записывая выражение для определения изгибающего момента в точке C, суммируя моменты левых сил, а затем приравнявая его нулю:

$$M_C = \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0; \quad R_A = 8 \text{ кН}.$$

После этого из уравнений равновесия моментов относительно точек D и B определяем остальные реакции (при этом учитываются моменты и правых, и левых сил):

$$\sum M_D = 0; \quad 8 \cdot 10 - 2 \cdot 20 \cdot 0 - R_B \cdot 10 = 0; \quad R_B = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 8 \cdot 20 - 2 \cdot 20 \cdot 10 - R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 24 \text{ кН}.$$

Производим проверку реакций:

$$\sum Y = 0; 8 - 2 \cdot 20 + 8 + 24 = 0.$$

После определения реакций построение эпюр внутренних усилий не представляет трудности. Они изображены под балкой на рис. 3.8, б.

При расчете длинных балок с несколькими промежуточными шарнирами трудоемкость поиска опорных реакций возрастает. Для расчета таких балок используется способ, основанный на построении так называемой «поэтажной схемы». Мысленно разрезают балку по шарнирам, после чего становится ясно, какие части могут упасть, а какие будут оставаться на месте. После этого создают новую расчетную схему, которая называется «поэтажной схемой». Опирают части, которые падают (назовем их несомыми балочками), на части, которые остаются неподвижными (несущие балочки). Статический расчет начинают с верхних этажей (несомых). Определяют опорные реакции в несомых балках и строят отдельно эпюры внутренних усилий. Затем переходят к расчету нижних этажей (несущих). По третьему закону Ньютона сила действия равна силе противодействия. Поэтому найденные ранее реакции для несомых балочек поворачивают на 180° и прикладывают как активные внешние силы к несущим балочкам. Строят эпюры внутренних усилий в несущих балочках. Так, последовательно, по частям рассчитывают конструкцию по направлению к нижним этажам. Затем результаты расчетов объединяют на одном рисунке.

Рассмотрим несколько примеров поэтажных схем (рис. 3.9). Цифры и стрелки показывают очередность расчета.

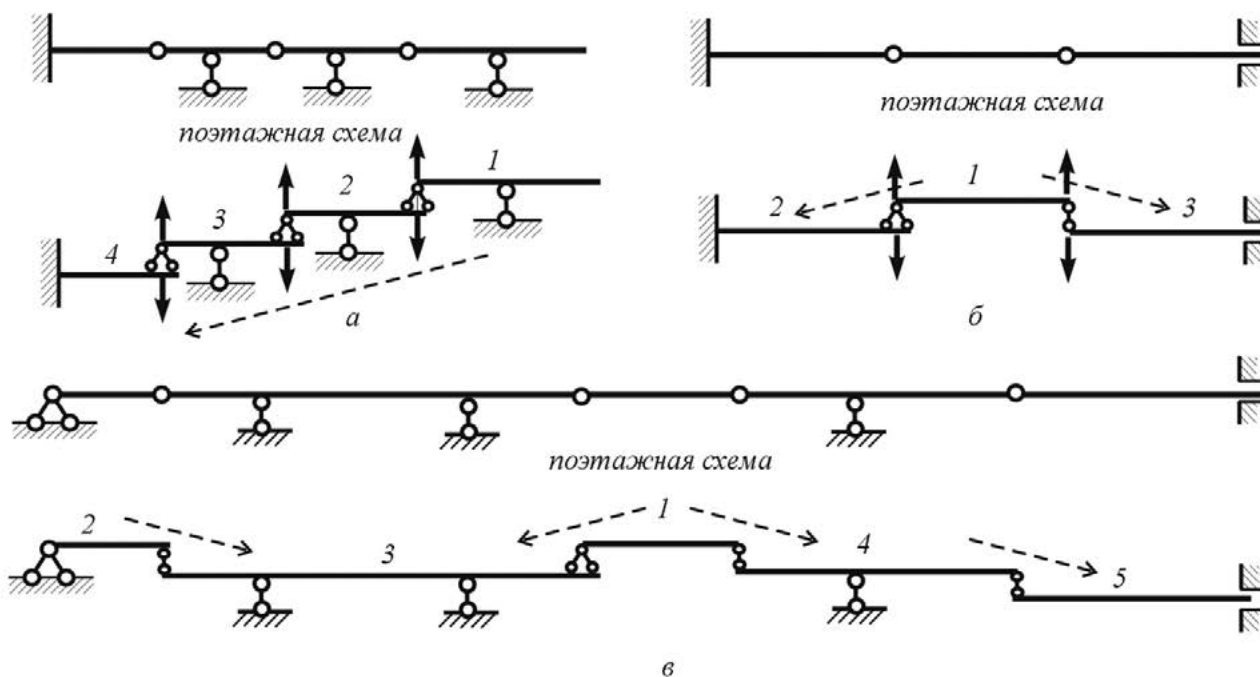


Рис. 3.9. Примеры поэтажных схем

В схеме на рис. 3.9, а насчитывается 4 этажа. Расчет производим в направлении 1–4. В схеме на рис. 3.9, б имеем два этажа. Сначала рассчитывается средняя балочка, а затем левая или правая. В схеме на рис. 3.9, в сначала проводят расчет первой и второй балочки, затем третьей и четвертой, и наконец — пятой. На схемах представлена температурная заделка, в которой имеются две реакции — реактивный момент и вертикальная реакция. В заделке в общем случае действуют три опорные реакции, но в случае вертикальных нагрузок горизонтальная реакция равна нулю. В шарнирно-неподвижных опорах при вертикальной нагрузке горизонтальные реакции также обращаются в нуль.

3.1.4. Напряжения

В поперечном сечении балки возникают нормальные и касательные напряжения. На рис. 3.10 показан характер нормальных напряжений при изгибе для сечений с двумя осями симметрии и с одной осью симметрии.

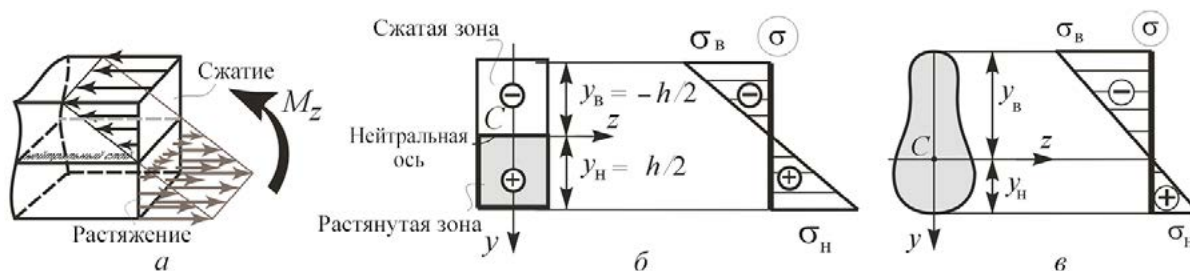


Рис. 3.10. Распределение нормальных напряжений при изгибе

В соответствии с принятыми в теории изгиба балок гипотезами распределение нормальных напряжений имеет линейный характер по высоте сечения. На рис. 3.10, а показан общий вид пространственной эпюры нормальных напряжений при положительном изгибающем моменте M_z , который вызывает растяжение нижних волокон, а на рис. 3.10, б показано поперечное сечение и представлена эпюра нормальных напряжений σ_x , которая обозначена, опуская индекс. При положительном изгибающем моменте в сечении с двумя осями симметрии (рис. 3.10, б) наибольшие положительные нормальные напряжения будут возникать в крайних нижних волокнах при значении $y = y_H$, а наибольшие отрицательные напряжения — на крайних верхних волокнах при $y = y_B$, при этом они равны по абсолютной величине:

$$\sigma_H = |\sigma_B| = \sigma_{HБ} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max},$$

где M_z — изгибающий момент, определяемый по эпюре моментов, $y_{\max}$ — расстояние от центра тяжести до крайних волокон. При высоте сечения h $y_{\max} = h/2$.

При поперечном изгибе в сечении возникают два внутренних усилия, которые часто обозначают M_z и Q_y , что означает изгибающий момент относительно оси z и поперечную силу в направлении оси y . В инженерной практике индексы часто опускают. То же самое происходит в отношении осевого момента инерции J_z . С такими упрощениями формула для определения наибольшего нормального напряжения примет вид:

$$\sigma_{HБ} = \frac{M}{J} y_{\max}.$$

Преобразуя формулу, запишем:

$$\sigma_{HБ} = \frac{M}{J} y_{\max} = \frac{M}{\frac{J}{y_{\max}}} = \frac{M}{W}.$$

Здесь в знаменателе имеем момент сопротивления сечения относительно оси z :

$$W = \frac{J}{y_{\max}}.$$

При отсутствии горизонтальной оси симметрии максимальные растягивающие и сжимающие напряжения будут отличаться по абсолютной величине (рис. 3.10, в) и определяться по формулам:

$$\sigma_H = \frac{M}{W_H}; \quad \sigma_B = -\frac{M}{W_B},$$

где моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон будут разными:

$$W_H = \frac{J}{y_H}; \quad W_B = \frac{J}{y_B}.$$

При поперечном изгибе, который имеет место, когда на балку действуют оба внутренних усилия Q_y и M_z , в балке, кроме нормальных напряжений, возникают и касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Напомним, что первый индекс указывает направление самого напряжения, а второй — направление нормали к поперечному сечению. Мы не будем подробно останавливаться на законе парности касательных напряжений и других их свойствах. Об этом можно более подробно почитать в учебниках по теории [1; 2; 3; 4]. На рис. 3.11, а показана поперечная сила, а на рис. 3.11, в — касательные напряжения, которые она вызывает. Для упрощения записи опустим индексы у касательного напряжения.

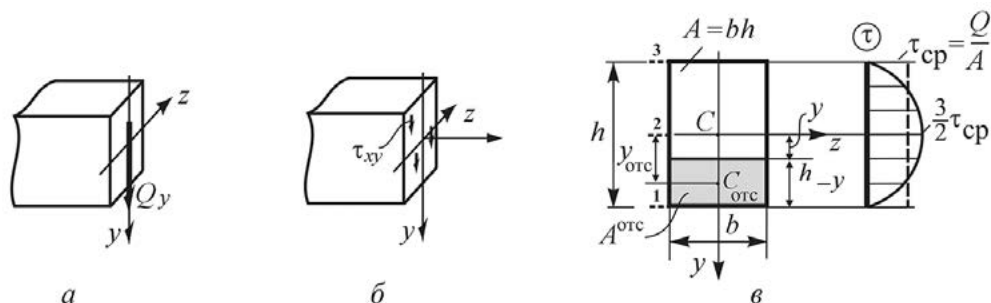


Рис. 3.11. Распределение касательных напряжений при поперечном изгибе

Касательные напряжения распределяются в поперечном сечении балки *не по линейному закону*. Так, для прямоугольного сечения (рис. 3.11, в) эпюра касательных напряжений распределена по параболическому закону, о чем пойдет речь чуть позже. Касательные напряжения определяют по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)},$$

названной по имени русского профессора Д.И. Журавского (1821–1891). Формула содержит поперечную силу Q , величина которой берется с эпюры поперечных сил, J_z — осевой момент инерции относительно горизонтальной центральной оси, который вычисляется или выбирается из сортамента, ширину сечения $b(y)$ и $S_z^{\text{отс}}$ — статический момент отсеченной части сечения.

В этой формуле определение величины $S_z^{\text{отс}}$ обычно вызывает повышенную трудность. Рассмотрим, как она вычисляется (рис. 3.12). Проведем горизонтальную линию на уровне, отстоящем на расстояние y от центра тяжести. Снизу от горизонтальной линии образуется часть (обозначена серым цветом), которая называется отсеченной частью. Ее площадь равна $A_{\text{отс}}$, а ее координата центра тяжести равна $y_{\text{отс}}$. Статический момент этой площади относительно центральной оси z равен $S_z^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_{\text{отс}}$.

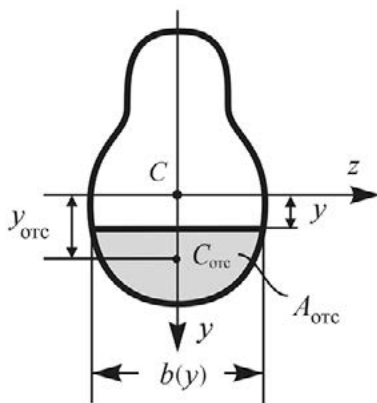


Рис. 3.12. Вычисление $S_z^{\text{отс}}$

Как уже было отмечено, эпюра касательных напряжений в прямоугольнике представляет собой параболу (рис. 3.11, в). Построим эпюру касательных напряжений по трем уровням. На уровне 1 (низ прямоугольника) очевидно, что статический момент отсеченной части равен нулю и касательное напряжение равно нулю.

На уровне 3 (верх) отсекается все сечение и статический момент также равен нулю из-за совпадения центра тяжести отсеченной части с центром тяжести прямоугольника. На уровне 2 (центр тяжести) отсекается прямоугольник высотой $h/2$, шириной b и координатой его центра тяжести $y_{отс} = h/4$. Тогда статический момент для уровня 2 будет равен

$$S_z^{1/2} = A \left(b \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h}{4} \right).$$

Наибольшие касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_z^{1/2}}{J_z b} = \frac{Q \left(b \frac{h}{2} \right) \left(\frac{h}{4} \right)}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3}{2} \frac{Q_p}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ср}}.$$

Величина называется статическим моментом полусечения, а $1/2$ не является степенью, а служит для обозначения этой величины. Если разделить поперечную силу Q на площадь сечения прямоугольника A , то мы получим среднее касательное напряжение в поперечном сечении.

В прямоугольном сечении наибольшие касательные напряжения в полтора раза превышают средние касательные напряжения.

Эпюра касательных напряжений в *круглом сечении* представляет собой кривую с экстремумом на уровне центра тяжести (рис. 3.13).

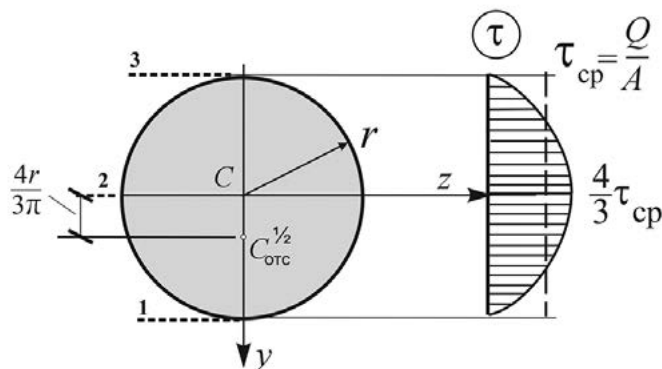


Рис. 3.13. Эпюра касательных напряжений в круглом сечении

Построим эпюру касательных напряжений по трем уровням. На уровне 1 (низ) очевидно, что статический момент отсеченной части равен нулю и касательное напряжение равно нулю. На уровне 3 (верх) отсекается все сечение и статический момент также равен нулю из-за совпадения центра тяжести отсеченной части с центром тяжести круга. На уровне 2 (центр тяжести) отсекается полукруг радиусом r и координатой $y_{отс} = 4r/3\pi$.

Наибольшие касательные напряжения на уровне центра тяжести равны:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{Q S_z^{1/2}}{J_z b(y)} = \frac{Q \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right)}{\frac{\pi r^4}{4} 2r} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} = \frac{4}{3} \tau_{\text{ср}}.$$

В круглом сечении максимальное касательное напряжение превышает среднее в 1,33 раза ($4/3$).

Эпюра касательных напряжений в двутавровом сечении имеет два скачка за счет резкого изменения ширины сечения в знаменателе формулы Д.И. Журавского.

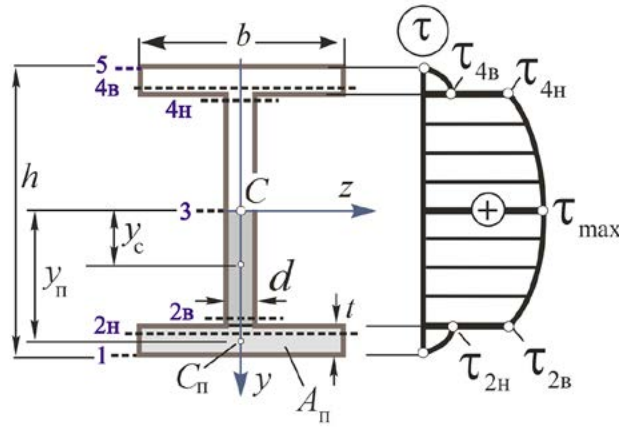


Рис. 3.14. Эпюра касательных напряжений в двутавровом сечении

Уровень 1 ($y = h/2$)

Статический момент отсеченной части (линии) будет равен нулю:

$$S_z^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_{\text{отс}} = 0.$$

Поэтому касательное напряжение равно нулю: $\tau_1 = 0$.

Уровень 2 ($y = h/2 - t$)

Принимая нижнюю полку в виде прямоугольника, найдем ее статический момент относительно оси z :

$$S_z^{\text{п}} = A_{\text{отс}}^{\text{п}} y_{\text{отс}}^{\text{п}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

В знаменатель формулы для определения касательных напряжений ниже места соединения полки со стенкой подставляем ширину полки b :

$$\tau_{2\text{H}} = \frac{QS_z^{\text{п}}}{J_z b}.$$

В знаменатель формулы ниже места соединения полки со стенкой подставляем толщину стенки d .

$$\tau_{2\text{B}} = \frac{QS_z^{\text{п}}}{J_z d}.$$

Уровень 3 ($y = 0$)

Статический момент полусечения $S_z^{1/2}$ (перевернутой буквы Т) относительно главной центральной оси z может быть найден суммированием статического момента полки $S_z^{\text{п}}$ и части стенки $S_z^{\text{ст}}$, оказавшейся ниже оси z .

$$S_z^{1/2} = S_z^{\text{п}} + S_z^{\text{ст}} = A_{\text{отс}}^{\text{п}} y_{\text{отс}}^{\text{п}} + A_{\text{отс}}^{\text{ст}} y_{\text{отс}}^{\text{ст}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) + d \left(\frac{h}{2} - t \right) \frac{\left(\frac{h}{2} - t \right)}{2}.$$

В случае прокатного стального двутавра эту величину считать не надо, так как она дана в сортаменте. Найдем максимальные по модулю касательные напряжения на этом уровне:

$$\tau_3 = \tau_{\text{нб}} = \frac{QS_z^{1/2}}{J_z d}.$$

Уровень 4 ($y = -h/2 + t$)

Здесь расчеты повторятся, как для уровня 2, но только в обратном порядке. Отсекается стенка высотой $h - 2t$, статический момент которой равен нулю (ее центр тяжести совпадает с центром тяжести двутавра), а также нижняя полка. Немного ниже этого уровня в знаменателе формулы будет d , а выше — b , т.е. $\tau_{2\text{H}} = \tau_{4\text{B}}$; $\tau_{2\text{B}} = \tau_{4\text{H}}$.

Уровень 5 ($y = -h/2$)

Отсекается весь двутавр, который находится ниже уровня 5, что даст нам основание утверждать, что статический момент отсеченной части равен нулю, поэтому $\tau_5 = 0$.

3.1.5. Расчеты на прочность при изгибе

Условие прочности при изгибе используем в виде:

$$\sigma = \frac{M_z^p}{W_z} \leq R\gamma_c,$$

где M_z^p — расчетный изгибающий момент относительно оси z в опасном сечении (берется с эпюры расчетных изгибающих моментов); W_z — момент сопротивления сечения относительно горизонтальной главной центральной оси; буквой R мы обозначим расчетное сопротивление материала. Левая часть неравенства представляет собой наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении, а произведение $R\gamma_c$ в правой части — это то предельное нормальное напряжение σ , которое мы не имеем права превышать.

Опасным сечением считают то сечение балки, в котором действует наибольший изгибающий момент. Наибольший — означает максимальный по модулю.

Переносим момент сопротивления сечения в левую часть и преобразуя условие прочности, получаем формулу для подбора сечения:

$$W_z \geq \frac{M_z^p}{R\gamma_c}.$$

Заметим, что в данную формулу следует подставлять расчетный изгибающий момент без учета знака (по модулю).

3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.2.1. Расчет жестко-защемленной балки с консолью

Задание

Для балки, представленной на рис. 3.15, требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M .

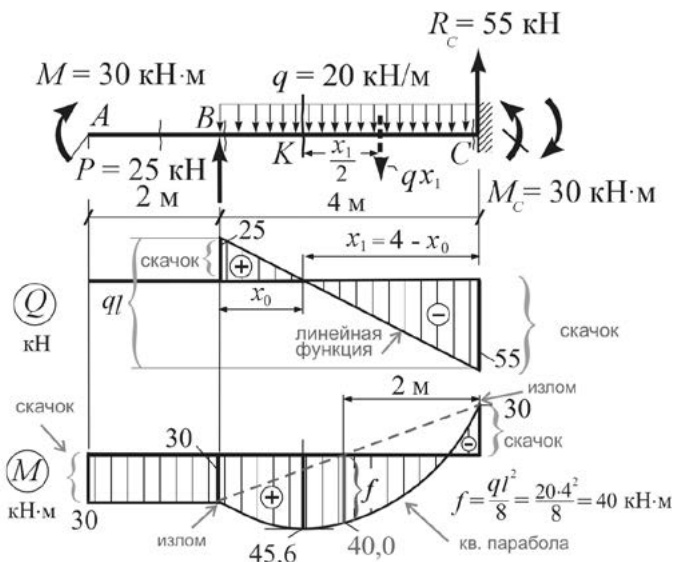


Рис. 3.15. К зад. 3.2.1

Решение

1. Определение опорных реакций.

При определении опорных реакций составим два уравнения равновесия: суммы моментов относительно точки C (положительный момент направлен против движения часовой стрелки)

и суммы проекций на ось Y (эту ось направляем вверх). Предположим, что вертикальная реакция в опоре ориентирована вверх, а реактивный момент направлен против хода часовой стрелки. Принимая за положительные силы направленные вверх, а моменты — против хода часовой стрелки, получим:

$$\sum Y = 0; 25 - \uparrow \oplus 20 \cdot 4 + R_C = 0; R_C = 55 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0; -\curvearrowright \oplus 30 - 25 \cdot 4 + 20 \cdot 4 \cdot 2 + M_C = 0; M_C = -30 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Так как реактивный момент получился со знаком « $\ominus$ », зачеркнем его и, записав его с плюсом, направим в противоположную сторону.

2. Построение эпюр Q и M .

Эпюра Q

Разобьем балку на характерные участки, на которых графики будут разные.

Участок AB

На участке AB нагрузка q отсутствует, и мы ожидаем постоянной функции $Q(x)$. Поэтому здесь можно вычислить поперечную силу в произвольном сечении и распространить результат на весь участок. Сумма левых вертикальных сил в произвольном сечении равна нулю:

$$Q_{AB} = \sum P_{\text{лев}} = 0.$$

Это — частный случай постоянной функции.

Участок BC

Эпюра Q на этом участке будет представлена наклонной линией (линейная функция), так как $q = \text{const}$. Так как в сечении B на эпюре Q будет наблюдаться скачок на величину приложенной силы $P = 25 \text{ кН}$, выбирать сечение, проходящее непосредственно через B , нельзя. Поэтому возьмем первое сечение на этом участке немного правее B на малую величину δ (назовем его «сечение B , справа»). Второе сечение возьмем немного левее опоры A , также отступив на малую величину δ (обозначим его «сечение C , слева»). Такие отступы нужно обязательно сделать, так как в сечениях B и C будут наблюдаться скачки (разрывы функции).

В «сечении B , справа» найдем сумму вертикальных сил, расположенных слева:

$$Q_{B, \text{справа}} = \sum P_{\text{лев}} = +P - q\delta = +25 - 20\delta,$$

где $q\delta$ — это равнодействующая небольшого участка нагрузки длиной δ , направленная вниз. При условии $\delta \rightarrow 0$, получаем $Q_B = +25 \text{ кН}$ (рис. 3.16). Знак «плюс» соответствует факту, что поперечная сила, направленная вверх, стремится повернуть показанный прилегающий элемент по ходу часовой стрелки.

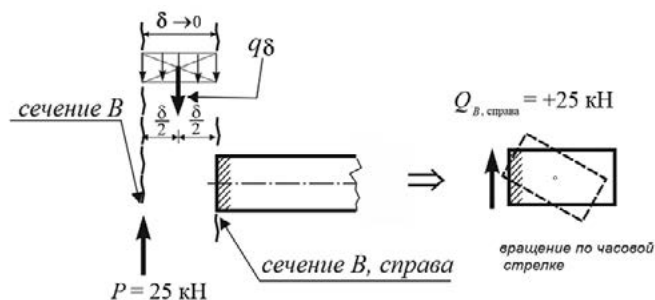


Рис. 3.16. Поперечная сила в «сечении B , справа».
Сумма левых сил

Для правильного определения знака поперечной силы можно, например, представить себе некоторый плоский предмет в виде прямоугольника, который не может изогнуться, а только повернуться вокруг воображаемого гвоздика.

Чтобы получить вторую точку на прямой, в «сечении C , слева» найдем сумму правых вертикальных сил (рис. 3.17).

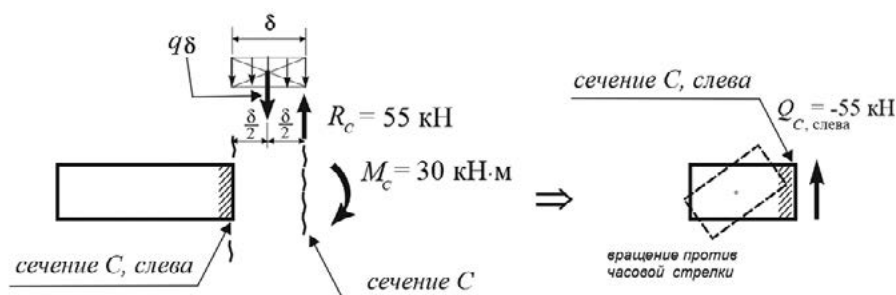


Рис. 3.17. Поперечная сила в «сечении C, слева». Сумма правых сил

$$Q_{C, \text{ слева}} = \sum P_{\text{прав}} = -R_C + q\delta = -55 + 20\delta,$$

где 20δ — это равнодействующая небольшого «кусочка» нагрузки длиной δ . При условии $\delta \rightarrow 0$, получаем $Q_{C, \text{ слева}} = -55$ кН. Видно, что реактивный сосредоточенный момент не учитывается при нахождении поперечной силы.

Можно также найти поперечную силу в «сечении C, слева», суммируя левые вертикальные силы (рис. 3.18):

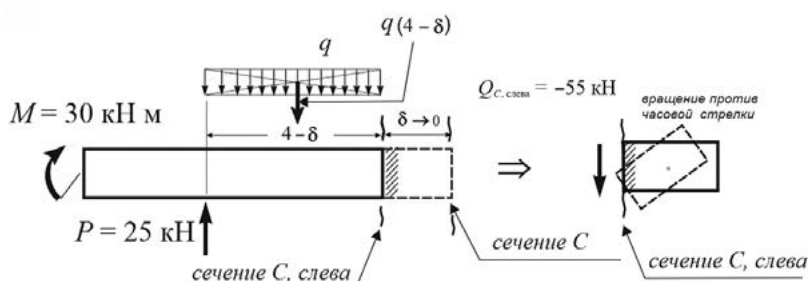


Рис. 3.18. Поперечная сила в «сечении C, слева». Сумма левых сил

$$Q_{C, \text{ слева}} = \sum P_{\text{лев}} = P - q(4 - \delta) = +25 - 20(4 - \delta).$$

При $\delta \rightarrow 0$ получаем тот же самый результат: $Q_C = -55$ кН. Таким образом, в балках с жесткой заделкой можно не находить опорные реакции, а строить эпюру со свободного конца.

Строим эпюру поперечных сил Q , откладывая полученные величины, выполняем штриховку и обозначаем знаки усилия.

Эпюра M

Участок AB

На участке AB нагрузка q отсутствует, и мы ожидаем линейной функции $M(x)$. Вычислив сумму моментов левых сил в любом сечении на участке, получим:

$$M_{AB} = \sum M_{\text{лев}} = +M_B (\text{н.в.}) = +30 \text{ кН} \cdot \text{м} (\text{н.в.}).$$

Сокращение (н.в.) в скобках обозначает, что растянуты нижние волокна (рис. 3.19). В дальнейшем, в выражениях для изгибающего момента также будем использовать сокращение (в.в.), что обозначает растяжение верхних волокон.



Рис. 3.19. Изгибающий момент на участке AB . Момент левых сил

Для корректного определения волокон, которые растягиваются, можно рекомендовать представить себе участок балки в виде гибкого ластика, который крепко следует сжать с одного конца, а другой направить в сторону суммирования моментов сил.

Эпюра на данном участке имеет вид прямоугольника, отложенного вниз от базовой линии так, как растянуты нижние волокна (рис. 3.19).

Участок BC

На участке *BC* будет иметь место квадратная парабола, так как нагрузкой на участке является $q = \text{const}$. Найдем изгибающий момент в трех сечениях, так как парабола (кривая) строится по трем точкам. В сечении *B* будем иметь ту же величину момента, что и на участке *AB*.

$$M_B = \sum M_{\text{лев}} = +30 \text{ кН} \cdot \text{м (н.в.)}.$$

Скачок в сечении *B* наблюдаться не будет, так как там не приложен сосредоточенный момент. Напомним, что можно заранее предположить место скачка функции на эпюре изгибающих моментов. Он появляется в месте приложения сосредоточенного момента. Поэтому в данном задании можно проводить сечение, не отступая от характерного сечения *B* вправо или влево.

В сечении *C* будет наблюдаться скачок на величину реактивного момента. Справа от сечения *C* момент равен нулю (нет правых сил). Найдем изгибающий момент немного левее *C* на бесконечно малую δ (будем называть этот «момент M_C , слева»), суммируя, например, правые моменты внешних сил.

$$M_{C, \text{слева}} = \sum M_{\text{прав}} = -M_C \text{ (в.в.)} + R_A \delta \text{ (н.в.)} - q\delta \frac{\delta}{2} \text{ (в.в.)},$$

где $-q\delta \frac{\delta}{2}$ — изгибающий момент, создаваемый равнодействующей малого участка распределенной нагрузки длиной δ , имеющей плечо $\delta/2$; $R_A \delta$ — момент от вертикальной реакции R_A (рис. 3.20). При условии $\delta \rightarrow 0$ получаем:

$$M_{C, \text{слева}} = \sum M_{\text{прав}} = -M_A = 30 \text{ кН} \cdot \text{м (в.в.)}.$$

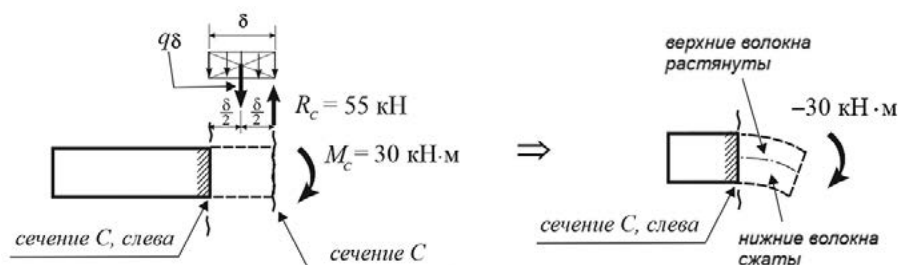


Рис. 3.20. К определению изгибающего момента в сечении *C*, слева.
Момент правых сил

Полученный результат можно проверить, суммируя левые моменты в «сечении *C*, слева» (рис. 3.21):

$$M_{C, \text{слева}} = \sum M_{\text{лев}} = +M \text{ (н.в.)} + P(4 - \delta) \text{ (н.в.)} - q(4 - \delta) \frac{4 - \delta}{2} \text{ (в.в.)}.$$

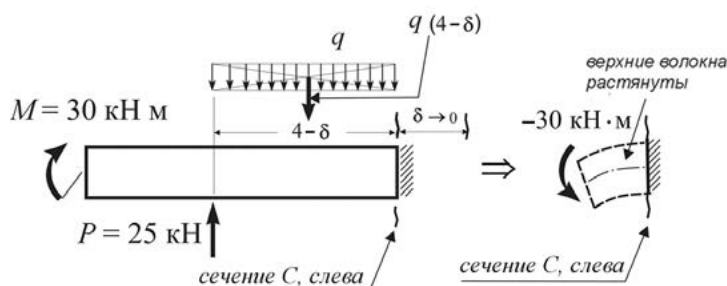


Рис. 3.21. К определению изгибающего момента в «сечении *C*, слева».
Момент левых сил

При подстановке в это выражение значений: $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $P = 25 \text{ кН}$, $q = 20 \text{ кН/м}$ и $\delta \rightarrow 0$, получим M_C , слева $= -30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (растянуты верхние волокна).

Момент левых сил равен моменту правых сил, что является проверкой правильности нахождения изгибающего момента в опорном сечении. Следует еще раз отметить, что в консольной балке с жесткой заделкой можно обойтись без определения опорных реакций в заделке, а эпюры строить, идя со свободного конца.

В следующих задачах мы постараемся отказаться от введения величины $\delta \rightarrow 0$, избавив читателя от излишней математизации изложения.

Найдем максимальный момент в сечении, где эпюра $Q = 0$. Сначала найдем положение этого сечения. Существует много способов отыскания максимального момента. Самым простым для понимания является способ, в котором для отыскания сечения, где возникает максимальный изгибающий момент, используется свойство подобных треугольников на эпюре поперечных сил, после чего в этом сечении находится сумма моментов левых или правых сил. Из рассмотрения двух подобных треугольников на эпюре Q можно составить пропорцию:

$$\frac{x_0}{4 - x_0} = \frac{25}{55}.$$

Решая это уравнение, находим $x_0 = 1,25 \text{ м}$. Тогда:

$$x_1 = 4 - x_0 = 4 - 1,25 = 2,75 \text{ м}.$$

Теперь нам остается найти момент, например, правых сил в сечении K .

$$M_K = \sum M_{\text{прав}} = -30 (\text{в.в.}) + 55 \cdot 2,75 (\text{н.в.}) - 20 \cdot 2,75 \cdot \frac{2,75}{2} (\text{в.в.}) = 45,6 \text{ кН}\cdot\text{м} (\text{н.в.}).$$

Третий член в этом выражении содержит равнодействующую распределенной нагрузки $qx_1 = 20 \cdot 2,75 \text{ кН}$ (показана пунктирной стрелкой на рис. 3.15), приложенную в середине участка KC длиной $2,75 \text{ м}$, умноженную на плечо $x_1/2 = 2,75/2$ (расстояние от центра участка до сечения K).

Применим другой способ. Найдем x_0 и максимальный момент M_{max} на участке:

$$x_0 = \frac{Q_0}{q} = \frac{25}{20} = 1,25 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = M_0 + \omega_Q = M_0 + \frac{Q_0 x_0}{2} = 30 + \frac{25 \cdot 1,25}{2} = 45,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Можно было также найти x_1 и максимальный момент с другой стороны:

$$x_1 = \frac{55}{20} = 2,75 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = -30 + \frac{55 \cdot 2,75}{2} = 45,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Откладываем все значения и строим эпюру изгибающих моментов. Все эпюры приведены на рис. 3.15.

Хотя наличия трех точек на кривой достаточно, можно ее уточнить, определив дополнительную точку в середине пролета, применив прием «подвешивание параболы». Соединяем концы параболы пунктирной прямой и находим среднюю линию получившейся трапеции, которая равна $(30 - 30)/2 = 0$. Прибавив к полученному результату стрелку параболы, равную $f = ql^2/8 = 20 \cdot 4^2/8 = 40,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, получим ординату на эпюре M в середине пролета, равную $40,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Проведем визуальную проверку эпюр. На участке BC наблюдаем линейную функцию Q и параболу на эпюре M выпуклостью вниз по стрелкам q («правило паруса») с экстремумом в сечении K (место перехода Q через ноль). В сечениях B и C на эпюре Q наблюдаем скачки

на величину действующих сил, а на эпюре M — изломы графика в сторону действия сил («правило струны»). На эпюре M наблюдаем скачки в местах приложения сосредоточенных моментов. Обратим внимание, что на эпюре Q падение линейной функции $\Delta Q = 25 - (-55) = 80$ кН·м равно произведению $ql = 20 \cdot 4 = 80$ кН·м. При определенном опыте эпюру Q можно быстро строить, исходя из принципов визуальной проверки. В местах приложения сосредоточенных сил нужно подняться или опуститься на величину приложенной силы, а на участках с равномерно распределенной нагрузкой нужно спуститься по прямой на величину произведения ql .

3.2.2. Расчет балки на двух опорах

Задание

Для балки, представленной на рис. 3.22, требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M .

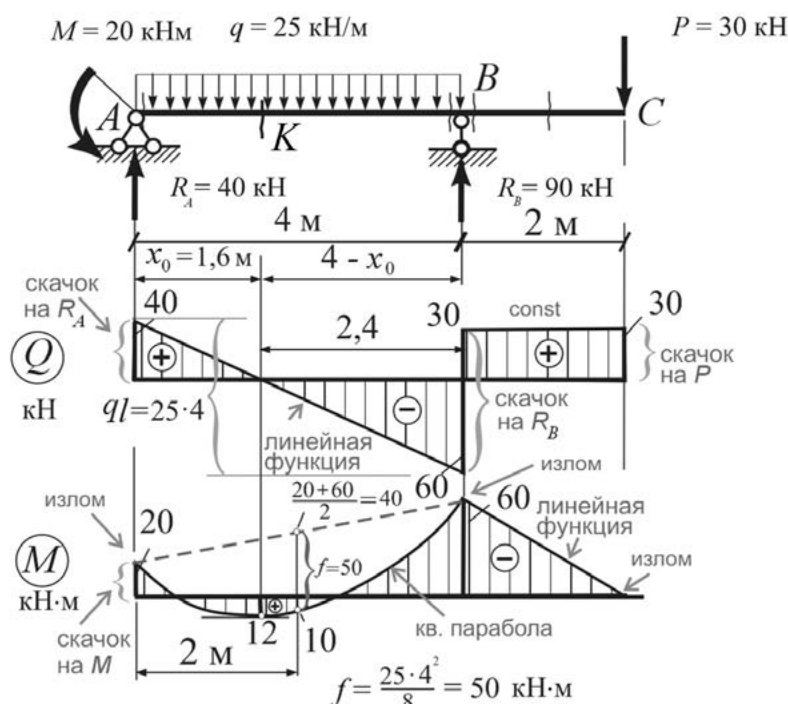


Рис. 3.22. К зад. 3.2.2

Решение

1. Определение опорных реакций.

Очевидно, что в левой шарнирно-неподвижной опоре горизонтальная реакция равна нулю по причине отсутствия горизонтальных составляющих внешних сил. Осталось определить вертикальные реакции в левой и правой опорах.

Если мы составим уравнение равновесия суммы проекций сил на вертикальную ось, то мы получим одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому сначала запишем уравнение моментов относительно точки A , находящейся над левой опорой. В этом случае момент опорной реакции R_A учитываться не будет, так как плечо этой силы будет равно нулю.

$$\sum M_A = 0; \quad \curvearrowright \oplus R_A \cdot 0 + 20 - 25 \cdot 4 \cdot 2 + R_B \cdot 4 - 30 \cdot 6 = 0; \quad R_B = 90 \text{ кН.}$$

Сейчас можно было записать уравнение проекций всех сил на вертикальную ось и найти из него недостающую реакцию опоры R_A . Однако мы оставим это равенство для проверки опорных реакций, а пока запишем уравнение моментов относительно опоры B .

$$\sum M_B = 0; \curvearrowright R_B \cdot 0 + 20 - 30 \cdot 2 + 25 \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 4 = 0; R_A = 40 \text{ кН.}$$

Выполним проверку опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \uparrow Y \oplus 90 + 40 - 25 \cdot 4 - 30 = 0.$$

2. Построение эпюр внутренних усилий.

Эюра Q

Разобьем балку на характерные участки. При изложении материала мы откажемся от написания бесконечно малой величины δ , но в вычислениях мы ее будем учитывать.

Участок AB

Здесь $q = \text{const}$, поэтому здесь мы имеем линейную функцию.

Возьмем сечение немного правее A и вычислим поперечную силу, суммируя левые силы, учитывая, что $\delta \rightarrow 0$.

$$Q_{A, \text{справа}} = \sum P_{\text{лев}} = +R_A = +40 \text{ кН («по часовой стрелке»)}.$$

Найдем поперечную силу немного левее опоры B , суммируя левые силы:

$$Q_{B, \text{слева}} = \sum P_{\text{лев}} = +R_A - ql = 40 - 25 \cdot 4 = -60 \text{ кН («против часовой стрелки»)}.$$

Проверим результат, суммируя правые силы:

$$Q_{B, \text{слева}} = \sum P_{\text{прав}} = P - R_B = 30 - 90 = -60 \text{ кН («против часовой стрелки»)}.$$

Получили одинаковый результат.

Откладываем ординаты от базовой линии и соединяем прямой.

Участок BC

На участке BC нагрузка q отсутствует, и мы ожидаем появления постоянной функции $Q(x)$. Поэтому здесь можно вычислить поперечную силу в произвольном сечении и распространить результат на весь участок. На этом участке легче найти сумму правых сил.

$$Q_{BC} = \sum P_{\text{прав}} = +30 \text{ кН («по часовой стрелке»)}.$$

Напомним, что знак «+» здесь имеет место из-за того, что сила $P = 30 \text{ кН}$, будучи перенесена к сечению, которое можно взять в любом месте участка, будет стремиться повернуть прилегающий элемент против хода часовой стрелки. Изображаем прямоугольник, выполняем штриховку.

Эюра M

Участок AB

На участке AB нагрузка q постоянная, что приводит к появлению параболы второго порядка функции $M(x)$.

Вычислив сумму моментов левых сил относительно опоры A , получим значение изгибающего момента, который растягивает верхние волокна балки:

$$M_A = \sum M_{\text{лев}} = -20 + 40 \cdot 0 = -20 \text{ кН (в.в.)}.$$

В сечении A мы не ожидали скачка в эпюре моментов, поэтому мы не брали сечение левее и правее точки A , а провели его непосредственно через точку A . Напомним, что скачок в эпюре M будет иметь место в сечениях приложения сосредоточенного момента.

Также и в сечении B не будет скачка. Момент левых сил в сечении B растягивает верхние волокна:

$$M_B = \sum M_{\text{лев}} = -20 + 40 \cdot 4 - 25 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -60 \text{ кН} \cdot \text{м (в.в.)}.$$

Легче найти момент правых сил в сечении B :

$$M_B = \sum M_{\text{прав}} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м (в.в.)}.$$

Получили одинаковый результат, что говорит о правильности расчетов.

Найдем максимальный момент в пролете. Для этого сначала вычислим положение точки перехода эпюры Q через ноль. Рассматривая два подобных треугольника на эпюре Q , составим пропорцию:

$$\frac{60}{40} = \frac{x_0}{4 - x_0}.$$

Получим $x_0 = 1,6$ м.

Найдем максимальный изгибающий момент в сечении K , расположенном на расстоянии 1,6 м от левой опоры, как сумму моментов левых сил:

$$M_K = \sum M_{\text{лев}} = -20 + 40 \cdot 1,6 - 25 \cdot 1,6 \frac{1,6}{2} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м (н.в.)}.$$

Обратим внимание, что в этом выражении $25 \cdot 1,6$ — это равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, расположенная в центре участка длиной 1,6 м, а $1,6/2$ представляет собой плечо этой равнодействующей относительно точки K .

Для проверки найдем изгибающий момент в сечении K , как сумму моментов правых сил:

$$M_K = 90 \cdot 2,4 - 25 \cdot 2,4 \frac{2,4}{2} - 30(2 + 2,4) = 12 \text{ кН} \cdot \text{м (н.в.)}.$$

Получили одинаковые результаты, что свидетельствует о верности расчетов.

Найдем полученную величину вторым способом:

$$x_0 = \frac{Q_0}{q} = \frac{40}{25} = 1,6 \text{ м}.$$

$$M_{\text{max}} = M_0 + \frac{Q_0 x_0}{2} = -20 + \frac{40 \cdot 1,6}{2} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Результаты сошлись.

В принципе, данных для построения эпюры M достаточно (три точки). Покажем для примера, как можно найти еще одну точку на кривой приемом подвешивания параболы.

Средняя линия трапеции равна: $(20 + 60)/2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Отложив вниз стрелку параболы, равную $f = ql^2/8 = 25 \cdot 4^2/8 = 50,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$, получим ординату на эпюре M в середине пролета, равную $10,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$. В данном случае четвертую точку на параболе можно было и не находить, а ограничиться тремя точками, что вполне достаточно. Такую операцию можно рекомендовать для тех параболических участков, где не будет наблюдаться экстремум на эпюре изгибающих моментов.

Участок BC

На участке отсутствует распределенная нагрузка. Поэтому эпюра изгибающих моментов представляет собой прямую линию. Найдем момент в двух сечениях. В сечении C получим нулевой изгибающий момент по причине отсутствия плеча силы P .

$$M_C = \sum M_{\text{прав}} = 30 \cdot 0 = 0.$$

В сечении B изгибающий момент был найден ранее как момент правых сил, умножением силы $P = 30 \text{ кН}$ на плечо 2 м, т.е. он равен $-60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Откладываем на эпюре соответствующие ординаты и соединяем прямой линией.

Обе эпюры могут быть проверены визуально. На участке, где $q = 0$, эпюра Q будет постоянной, а эпюра M — наклонная прямая. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q будет представлена наклонной прямой, а эпюра M — квадратичная функция. Пара-

бола должна иметь выпуклость вниз, т.е. по направлению распределенной нагрузки. На эпюре поперечных сил имеются скачки в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, а в эпюре изгибающих моментов — в тех сечениях, где приложены сосредоточенные моменты. Там, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре моментов должны быть изломы, направленные в сторону сил. Результаты визуальной проверки показаны на эпюрах внутренних усилий на рис. 3.22.

3.2.3. Расчет балки с промежуточным шарниром

Задание

Для балки, представленной на рис. 3.23, требуется:

- 1) найти опорные реакции;
- 2) построить эпюры Q и M .

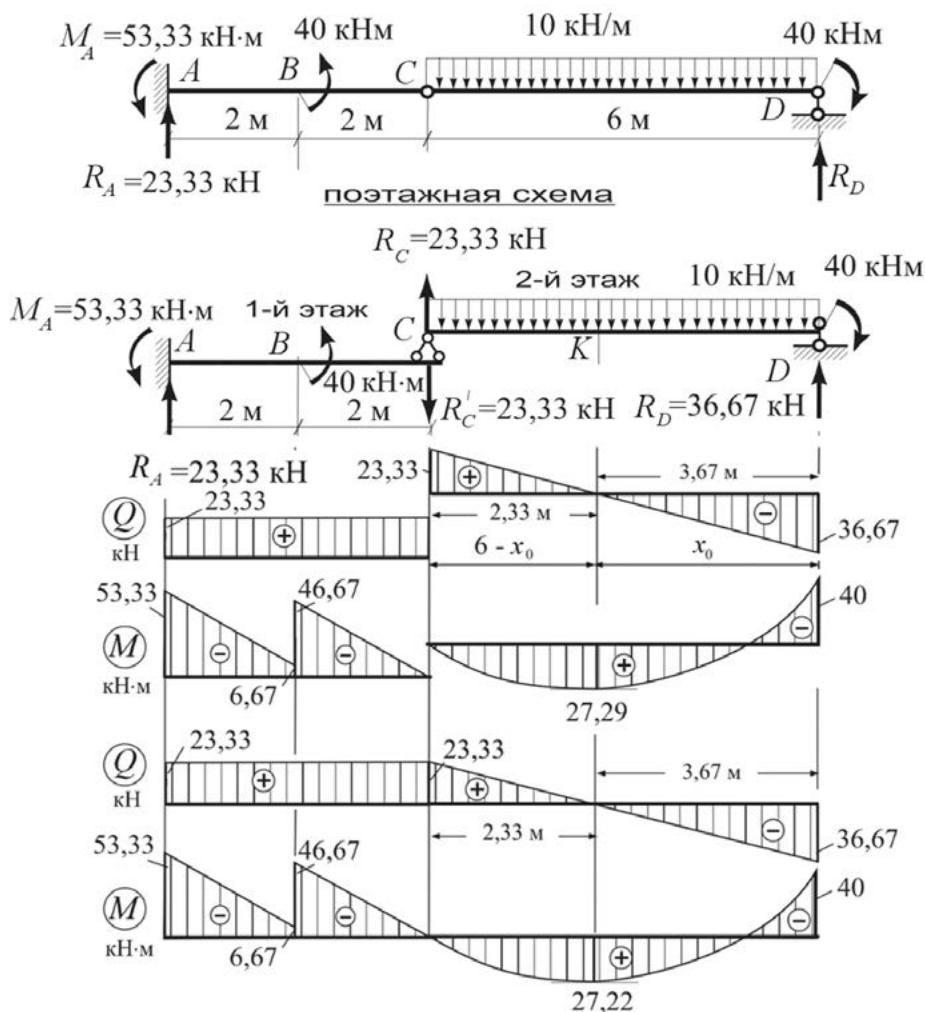


Рис. 3.23. К зад. 3.2.3

Решение

Задание можно решать разными способами.

Первый способ состоит в использовании свойства шарнира для определения опорных реакций, а затем строить эпюры обычными способами. Воспользуемся свойством шарнира, в соответствии с которым изгибающий момент в шарнире равен нулю. Так, в нашем примере, если записать сумму моментов правых сил относительно точки C , получим значение опорной реакции R_D .

$$M_C = \sum M_{\text{прав}} = R_D \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 40 = 0; R_D = 36,67 \text{ кН.}$$

После этого можно найти вертикальную реакцию в заделке, приравнявая нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; 36,67 - 10 \cdot 6 + R_A = 0; R_A = 23,33 \text{ кН.}$$

Теперь, суммируя моменты левых сил относительно шарнира C и приравнявая результат нулю, получим величину реактивного момента в заделке:

$$M_C = \sum M_{\text{лев}} = -23,33 \cdot 4 + M_A + 40 = 0; M_A = 53,33 \text{ кН.}$$

После того как опорные реакции найдены, построение эпюр внутренних усилий можно производить обычным способом (см. предыдущие примеры).

Второй способ. Применим теперь способ, основанный на построении *поэтажной схемы*. Уберем шарнир (или, можно сказать, разрежем балку по шарниру C). Очевидно, что правая балочка CD , поворачиваясь вокруг опоры D , превращается в механизм, т.е. падает. Левая балочка ABC остается на месте. Опираем правую балку на левую. Правую балочку можно назвать несомой (2-й этаж), а левую — несущей (1-й этаж). Проведем расчет по частям.

Балка CD (2-й этаж)

Мысленно поставим ее на землю и найдем опорные реакции независимо от левой балки.

$$\sum M_C = 0; R_D \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 40 = 0; R_D = 36,67 \text{ кН;}$$

$$\sum M_D = 0; -R_C \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 40 = 0; R_C = 23,33 \text{ кН.}$$

Проверим опорные реакции, приравнявая нулю сумму проекций на ось y для правой независимой балки.

$$\sum Y = 0; 36,67 + 23,33 - 10 \cdot 6 = 0.$$

Проверка выполнена.

Теперь построим независимо от левой балки эпюры внутренних усилий.

Эпюра Q

На балку CD действует $q = \text{const}$, поэтому здесь мы имеем линейную функцию на эпюре поперечных сил. Возьмем два сечения: одно — левее D на бесконечно малую δ (в сечении прямо над опорой будет наблюдаться скачок), а другое — правее C (здесь также ожидается скачок). При этом будем пренебрегать бесконечно малыми величинами, т.е. учитывать, что $\delta \rightarrow 0$:

$$Q_{D, \text{слева}} = \sum P_{\text{прав}} = -R_D = -36,67 \text{ кН (против часовой стрелки);}$$

$$Q_{C, \text{справа}} = \sum P_{\text{лев}} = +R_C = 23,33 \text{ кН (по часовой стрелке).}$$

Соединяя отложенные ординаты и соединяя точки прямой линией, пересекающей базовую линию, строим эпюру Q .

Эпюра M

На участке CD нагрузка q постоянная, что приводит к появлению параболы второго порядка.

В сечении C сумма моментов левых сил дает нам нулевое значение изгибающего момента (напоминаем, что мы рассчитываем отдельно балочку CD).

$$M_C = \sum M_{\text{лев}} = 0.$$

Найдем момент левее D , суммируя моменты правых сил:

$$M_{D, \text{слева}} = \sum M_{\text{прав}} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м (в.в.).}$$

В расчетах мы пренебрегаем бесконечно малыми величинами, т.е. полагаем, что $\delta \rightarrow 0$.
Найдем расстояние от опоры D до нулевой точки в эпюре Q .

$$\frac{36,67}{23,33} = \frac{x_0}{6 - x_0}.$$

Получим $x_0 = 3,67$ м.

В сечении K найдем максимальный момент, суммируя правые моменты сил:

$$M_K = M_{\max} = \sum M_{\text{прав}} = -40 + 36,67 \cdot 3,67 - 10 \cdot 3,67 \frac{3,67}{2} = 27,22 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Напомним, что изгибающий момент, растягивающий нижние волокна, считается положительным.

Применим другой прием отыскания максимального изгибающего момента.

$$x_0 = \frac{36,67}{10} = 3,67 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -40 + \frac{36,67 \cdot 3,67}{2} = 27,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Результаты сошлись.

Строим эпюры внутренних сил в правой (верхней) балке отдельно.

Балка ABC (1-й этаж)

По 3-му закону Ньютона сила действия равна силе противодействия и направлена в противоположную сторону. Поэтому направленную вверх опорную реакцию R_C , с которой нижняя балка воздействует на верхнюю, поворачиваем на 180° и прикладываем как активную внешнюю силу $R'_C = 23,33$ кН.

Найдем опорные реакции.

$$\sum Y = 0; R_A - 23,33 = 0; R_A = 23,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; M_A + 40 - 23,33 \cdot 4 = 0; M_A = 53,33 \text{ кН}.$$

Кстати, опорные реакции в консольной жестко-защемленной балке можно было и не определять, если строить эпюру моментов справа налево.

Эпюра Q

Здесь $q = 0$, поэтому проведем произвольное сечение на участке ABC и найдем сумму правых сил:

$$Q_{ABC} = \sum P_{\text{прав}} = -R'_C = +23,33 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Проверим результат, суммируя левые силы:

$$Q_{ABC} = \sum P_{\text{лев}} = +R_A = +23,33 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Эпюра M

На участке AB нагрузка q равна нулю, что приводит к появлению линейной функции. Однако в сечении B будет наблюдаться скачок, так как здесь приложен сосредоточенный момент. Эпюра изгибающих моментов будет состоять из двух параллельных прямых, так как в месте приложения момента сосредоточенная сила отсутствует, значит, излома прямой наблюдаться не будет. То есть скачок есть, а излома нет.

Найдем величины изгибающих моментов в характерных сечениях:

$$M_{A, \text{справа}} = \sum M_{\text{лев}} = -53,33 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)};$$

$$M_{B, \text{слева}} = \sum M_{\text{лев}} = -53,33 + 23,33 \cdot 2 = -6,67 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)};$$

$$M_{B, \text{справа}} = \sum M_{\text{прав}} = -23,33 \cdot 2 = -46,67 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)};$$

$$M_C = \sum M_{\text{прав}} = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов для нижней балки ABC .

Объединяем все эпюры и изображаем их внизу.

Все эпюры, расчетная схема балки и поэтажная схема представлены на рис. 3.23.

3.2.4. Подбор сечения балки

Задание

Для балки (рис. 3.24), загруженной нормативными нагрузками $P = 22$ кН, $q = 25$ кН/м, $M = 25$ кН·м, требуется:

1) приняв для сосредоточенных сил и моментов коэффициенты надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,1$; для распределенной нагрузки $\gamma_f = 1,3$; найти расчетные значения нагрузок, если балка относится к классу КС-3 ($\gamma_n = 1,1$);

2) построить расчетные эпюры Q и M ;

3) подобрать сечение балки из стального двутавра по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15], приняв марку стали С245, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$ и коэффициент надежности по материалу $\gamma_m = 1,025$;

4) построить эпюры наибольших нормальных σ и касательных τ напряжений в поперечном сечении подобранного в п. 3 двутавра и проверить условия прочности по нормальным и касательным напряжениям;

5) подобрать сечение балки в виде прямоугольника, приняв отношение его высоты к ширине равным 2 (материал и коэффициенты запаса принять в соответствии с п. 3);

6) построить эпюры наибольших нормальных σ и касательных τ напряжений в подобранном в п. 5 прямоугольном сечении и проверить условия прочности по нормальным и касательным напряжениям.

7) подобрать сечение балки в виде круга (материал и коэффициенты запаса принять в соответствии с п. 3);

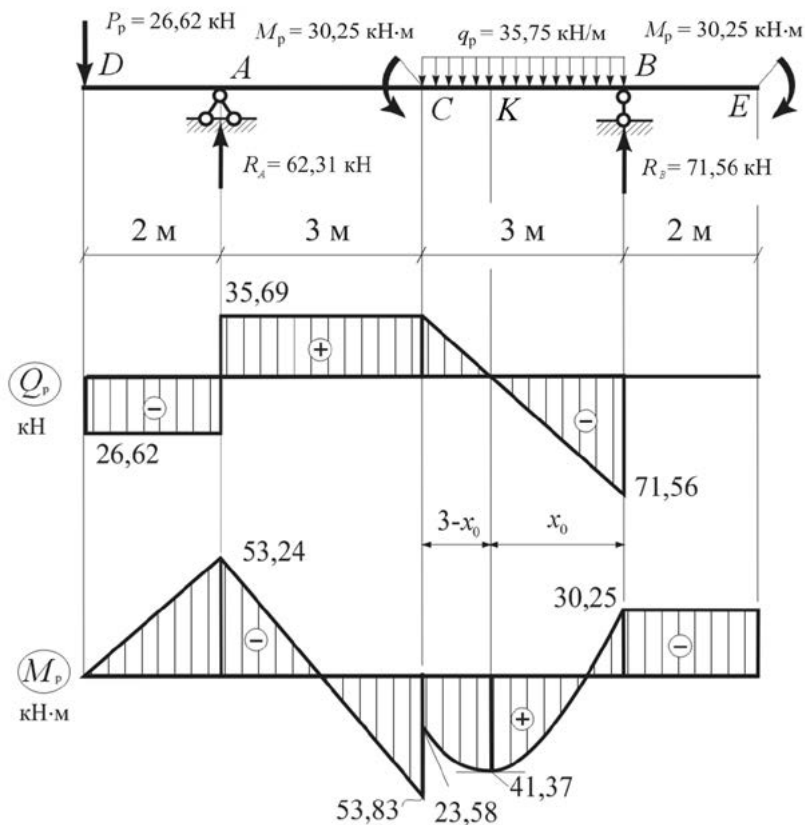


Рис. 3.24. Эпюры расчетных поперечных сил и изгибающих моментов

8) построить эпюры наибольших нормальных σ и касательных τ напряжений в подобранном в п. 7 круглом сечении и проверить условия прочности по нормальным и касательным напряжениям;

9) определить, какое из трех сечений является наиболее экономичным (по количеству материала).

Решение

1. Определение расчетных нагрузок.

Определим расчетную нагрузку:

$$M_p = M \gamma_f \gamma_n = 25 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 30,25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$P_p = P \gamma_f \gamma_n = 22 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 26,62 \text{ кН};$$

$$q_p = q \gamma_f \gamma_n = 25 \cdot 1,3 \cdot 1,1 = 35,75 \text{ кН/м}.$$

2. Построение эпюр Q и M от расчетных нагрузок.

Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; 26,62 \cdot 2 + 30,25 - 30,25 - 35,75 \cdot 3 \cdot 4,5 + R_B 6 = 0.$$

Откуда: $R_B = 71,56 \text{ кН}$.

$$\sum M_B = 0; 26,62 \cdot 8 - R_A 6 + 30,25 - 30,25 + 35,75 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0.$$

Получаем: $R_A = 62,31 \text{ кН}$.

Выполняем проверку реакций (используем уравнение равновесия суммы проекций сил на ось Y):

$$\sum Y = 0; 62,31 + 71,56 - 26,62 - 35,75 \cdot 3 = 0.$$

Опорные реакции найдены верно. Условие равновесия выполняется.

Начнем с построения расчетной эпюры поперечных сил. На этой эпюре будет три участка с постоянной поперечной силой и один — с линейной функцией ее распределения по длине балки.

Эпюра Q

На левом участке AD эпюра расчетных поперечных сил имеет вид прямоугольника, так как здесь отсутствует поперечная нагрузка:

$$Q_{AD} = \sum P_{\text{лев}} = -26,62 \text{ кН} = \text{const.}$$

На участке AC эпюра поперечных сил также представлена постоянной функцией:

$$Q_{AC} = \sum P_{\text{лев}} = -26,62 + 62,31 = 35,69 \text{ кН}.$$

На участке CB эпюра Q имеет вид линейной функции. Так как в сечении C не приложена сосредоточенная сила, можно провести сечение непосредственно через это сечение. Скачка функции Q в этом сечении не происходит.

$$Q_C = Q_{AD} = \sum P_{\text{лев}} = -26,62 + 62,31 = 35,69 \text{ кН}.$$

Так как в сечении B будет иметь место скачок на величину опорной реакции, то найдем поперечную силу немного левее B .

$$Q_{B, \text{слева}} = \sum P_{\text{лев}} = -26,62 + 62,31 - 35,75 \cdot 3 = 71,56 \text{ кН}.$$

Проверим этот результат, суммируя правые силы:

$$Q_{B, \text{слева}} = \sum P_{\text{прав}} = -R_B = -71,56 \text{ кН.}$$

Знак «-» получается потому, что опорная реакция R_B стремится повернуть находящийся слева от нее прилегающий элемент против хода часовой стрелки.

Строим эпюру поперечных сил и находим сечение, где $Q = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{71,56}{35,69} &= \frac{x_0}{3 - x_0}; \\ 35,69x_0 &= 71,56 \cdot 3 - 71,56x_0; \\ 107,25x_0 &= 214,68; x_0 = 2,0 \text{ м.}\end{aligned}$$

Проверим это значение другим способом.

$$x_0 = \frac{71,56}{35,69} = 2,0 \text{ м.}$$

Эпюра M

Расчетная эпюра изгибающих моментов имеет четыре характерных участка. На участках DA , AC и DE отсутствует распределенная нагрузка, и мы ожидаем появления линейных графиков. На участке CB эпюра представляет собой квадратную параболу выпуклостью вниз с экстремумом в точке K . В сечении C будет иметь место скачок на величину сосредоточенного момента.

Участок DA

$$M_D = \sum M_{\text{лев}} = 0;$$

$$M_A = \sum M_{\text{лев}} = -26,62 \cdot 2 \text{ (в.в.)} = -53,24 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)}.$$

Участок AC

$$M_A = \sum M_{\text{лев}} = -26,62 \cdot 2 = -53,24 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)}.$$

Найдем изгибающий момент в сечении C , слева, суммируя левые моменты:

$$M_{C, \text{слева}} = \sum M_{\text{лев}} = -26,62 \cdot 5 \text{ (в.в.)} + 62,31 \cdot 3 \text{ (н.в.)} = 53,83 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Проверим данный результат, суммируя правые моменты:

$$M_{C, \text{слева}} = \sum M_{\text{прав}} = -30,25 \text{ (в.в.)} + 71,56 \cdot 3 \text{ (н.в.)} - 35,75 \cdot 3 \cdot 1,5 \text{ (в.в.)} + 30,25 \text{ (н.в.)} = 53,81 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Получилось небольшое отличие в результатах, не превышающее 3–4 %. На эпюре откладываем число 53,83 вниз, так как знак плюс означает растяжение нижних волокон.

Участок CB

Найдем изгибающий момент в сечении C , справа как момент правых сил:

$$M_{C, \text{справа}} = \sum M_{\text{прав}} = -30,25 \text{ (в.в.)} + 71,56 \cdot 3 \text{ (н.в.)} - 35,75 \cdot 3 \cdot 1,5 \text{ (в.в.)} = 23,56 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Разница в моментах справа и слева от сечения C должна быть на величину сосредоточенного момента, равного 30,25 кН·м, однако $53,83 - 23,56 = 30,27 \text{ кН}\cdot\text{м} \neq 30,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Разница в 0,02 кН·м не превышает инженерной погрешности в 3–4 %, и на эпюре моментов от 53,83 кН·м можно подняться вверх на 30,25 кН·м, т.е. справа от сечения C будет $53,83 - 30,25 = 23,58 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Как было показано, чтобы учесть сосредоточенный момент в эпюре моментов, можно в сечении слева от него найти момент левых сил, а в сечении справа от него — момент правых

сил. Тогда изгибающий момент не входит в выражения для его определения, а скачок в сечении на эпюре должен равняться величине сосредоточенного момента (погрешность не должна превышать 3–4 %). После приобретения опыта в построении эпюр моментов можно заметить, что при движении по эпюре M слева направо сосредоточенный момент, действующий по часовой стрелке, вызывает скачок вниз, а момент против часовой стрелки — вверх (как в нашем случае).

Момент в сечении B можно находить непосредственно над опорой, так как там не ожидается появления скачка в эпюре моментов:

$$M_B = \sum M_{\text{прав}} = -30,25 \text{ кН} \cdot \text{м (в.в.)}.$$

Максимальный момент на данном участке находится в сечении K :

$$M_K = M_{\text{max}} = \sum M_{\text{прав}} = -30,25 \text{ (в.в.)} + 71,56 \cdot 2,00 \text{ (н.в.)} - 35,75 \cdot 2,00 \frac{2,00}{2} \text{ (в.в.)} = 41,37 \text{ кН} \cdot \text{м (н.в.)}.$$

Найдем этот момент другим способом, учитывая, что $x_0 = 2,0$ м.

$$M_{\text{max}} = -30,25 + \frac{71,56 \cdot 2,0}{2} = 41,31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Небольшое расхождение результатов, которое произошло из-за округления чисел, не превышает 3 %.

По трем точкам строим параболу.

Участок BE

Можно заметить, что на этом участке в любом сечении момент правых сил будет одинаковым, т.е. эпюра изгибающих моментов будет постоянной и будет находиться на растянутых верхних волокнах:

$$M_{BE} = \sum M_{\text{прав}} = -30,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Подбор сечения прокатного стального двутавра.

Опасное сечение соответствует сечению с наибольшим изгибающим моментом. Наибольший обозначает максимальный по модулю. В нашем примере это — «сечение C , слева», где расчетный изгибающий момент равен 53,83 кН.

Условие прочности при изгибе возьмем в виде:

$$\sigma = \frac{M_z^p}{W_z} \leq R\gamma_c,$$

где M_z^p — расчетный изгибающий момент относительно оси z в опасном сечении (берется с эпюры расчетных изгибающих моментов M); W_z — момент сопротивления сечения относительно горизонтальной главной центральной оси; буквой R мы обозначим расчетное сопротивление материала. Произведение $R\gamma_c$ в правой части — это то предельное нормальное напряжение σ , которое мы не имеем права превышать.

Переносим момент сопротивления сечения в левую часть и преобразуя условие прочности, получаем формулу для подбора сечения:

$$W_z \geq \frac{M_z^p}{R\gamma_c}.$$

Заметим, что в данную формулу следует подставлять расчетный изгибающий момент без учета знака (по модулю).

Продолжим решение нашей задачи. Найдем расчетное сопротивление стали марки С245, разделив нормативное сопротивление на данное значение коэффициента надежности по материалу:

$$R = R_n / \gamma_m = 245 / 1,025 = 239 \text{ МПа}.$$

Опасным является «сечение С, слева», т.е., где $M_z^p = 53,83 \text{ кН}\cdot\text{м}$, будет наибольшим по модулю. Если бы отрицательный момент в сечении А превысил бы по модулю момент в сечении С, то его и надо было считать расчетным моментом, а в формулу подставлять его со знаком «плюс».

Найдем момент сопротивления сечения:

$$W_z \geq \frac{53,83 \cdot 10^2 \text{ кН}\cdot\text{см}}{23,9 \text{ кН/см}^2 \cdot 0,9} = 250,3 \text{ см}^3.$$

Число $250,3 \text{ см}^3$ можно назвать требуемым моментом сопротивления сечения ($W_z^{\text{тр}} = 250,3 \text{ см}^3$), что означает, что сечение, которое будет подбираться далее, может иметь равное ему или чуть большее значение момента сопротивления, которое мы будем называть фактическим, т.е. $W_z^{\text{ф}} \geq W_z^{\text{тр}} = 250,3 \text{ см}^3$.

Значение требуемого момента сопротивления сечения останется тем же для подбора сечения двутавра, прямоугольника и круга, а вот фактические моменты сопротивления будут разные.

Из сортамента (прил. 1) двутавров стальных горячекатаных по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15] подбираем двутавр № 25Б1 (можно записать более кратко — I25Б1) с фактическим моментом сопротивления сечения $W_z^{\text{ф}} = 274,30 \text{ см}^3$. Заметим, что в сортаменте при выборе $W_z^{\text{ф}}$ нужно ориентироваться по колонке с W_x , так как горизонтальной осью в нем указана ось X-X.

Выписываем другие геометрические характеристики:

$h = 208 \text{ мм} = 20,8 \text{ см}$ — высота двутавра;

$b = 102 \text{ мм} = 10,2 \text{ см}$ — ширина полки;

$s = 8,0 \text{ мм} = 0,80 \text{ см}$ — толщина стенки (мы будем обозначать ее буквой d на рис. 3.25, т.е. $d = 0,80 \text{ см}$);

$t = 12,0 \text{ мм} = 1,20 \text{ см}$ — толщина полки;

$J_z = 2852,62 \text{ см}^4$ — осевой момент инерции относительно горизонтальной оси C_z (в сортаменте эта величина обозначена J_x);

$S_z^{1/2}$ — статический момент полусечения (эта величина в сортаменте выбирается из колонки S_x);

$A_{\text{дв}} = 40,24 \text{ см}^2$ — площадь поперечного сечения двутавра.

4. Построение эпюр наибольших нормальных σ и касательных τ напряжений в поперечном сечении двутавра.

Изобразим на рис. 3.25 поперечное сечение двутавра, а рядом две эпюры: эпюру нормальных напряжений и эпюру касательных напряжений.

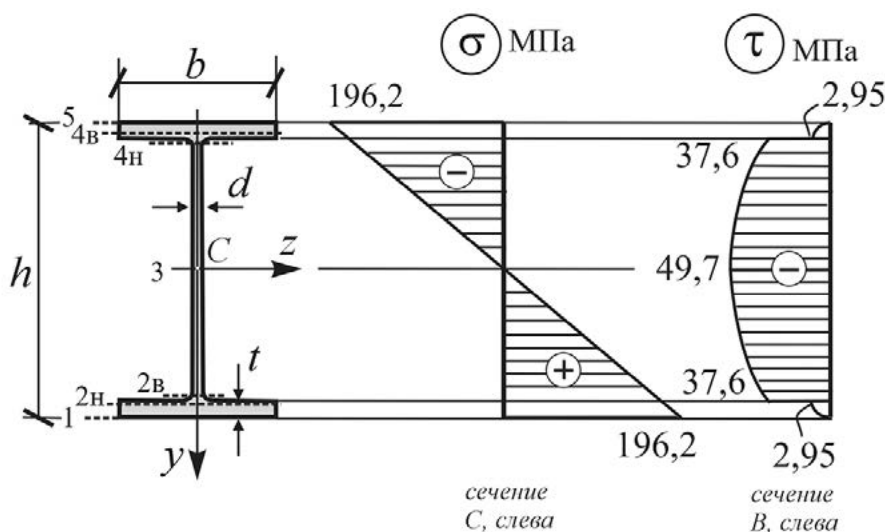


Рис. 3.25. Эпюры нормальных и касательных напряжений в двутавре

Найдем наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении C, слева:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z^{\text{p}}}{W_z^{\Phi}} = \frac{53,83 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}}{274,3 \text{ см}^3} = 19,62 \text{ кН/см}^2 = 196,2 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\text{нб}} = 196,2 \text{ МПа} \leq R\gamma_c = 239 \cdot 0,9 = 215,1 \text{ МПа}.$$

Прочность по нормальным напряжениям обеспечена.

На эпюре нормальных напряжений следует обозначить знак «плюс» на нижнем треугольнике, так как по эпюре изгибающих моментов видно, что в опасном сечении растянуты нижние волокна.

Перейдем к построению эпюры касательных напряжений. Опасным по касательным напряжениям будет «сечение B, слева», где действует наибольшая поперечная сила $Q_p = -71,56 \text{ кН}$. Обратим внимание, что наибольшая поперечная сила берется максимальной по модулю, но со своим знаком. Будем находить касательное напряжение на пяти уровнях по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q_p S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)}.$$

Уровень 1 ($y = h/2$)

Статический момент отсеченной части (линии) будет равен нулю:

$$S_z^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_{\text{отс}} = 0$$

Поэтому касательное напряжение равно нулю: $\tau_1 = 0$.

Уровень 2 ($y = \frac{h}{2} - t$)

Принимая нижнюю полку в виде прямоугольника, найдем ее статический момент относительно оси z, проходящей через центр тяжести:

$$S_z^{\text{п}} = A_{\text{отс}}^{\text{п}} y_{\text{отс}}^{\text{п}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10,2 \cdot 1,2 \left(\frac{20,8}{2} - \frac{1,2}{2} \right) = 119,95 \text{ см}^3.$$

Касательное напряжение ниже места соединения полки со стенкой:

$$\tau_{2\text{н}} = \frac{Q_p S_z^{\text{п}}}{J_z b} = \frac{-71,56 \cdot 119,95}{2852,62 \cdot 10,2} = -0,295 \text{ кН/см}^2 = -2,95 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение выше места соединения полки со стенкой:

$$\tau_{2\text{в}} = \frac{Q_p S_z^{\text{п}}}{J_z d} = \frac{-71,56 \cdot 119,95}{2852,62 \cdot 0,8} = -3,76 \text{ кН/см}^2 = -37,6 \text{ МПа}.$$

Уровень 3 ($y = 0$)

Статический момент полусечения $S_z^{1/2}$ (перевернутой буквы Т) относительно главной центральной оси z) может быть найден суммированием статического момента полки $S_z^{\text{п}}$ и части стенки $S_z^{\text{с}}$, оказавшейся ниже оси z. Однако для прокатного двутавра эту величину считать не надо, так как она дана в сортаменте в соответствующей колонке: $S_z^{1/2} = 158,46 \text{ см}^3$. Найдем наибольшие касательные напряжения на этом уровне:

$$\tau_3 = \tau_{\text{нб}} = \frac{Q_p S_z^{1/2}}{J_z d} = \frac{-71,56 \cdot 158,46}{2852,62 \cdot 0,8} = -4,97 \text{ кН/см}^2 = -49,7 \text{ МПа}.$$

Уровень 4 ($y = -\frac{h}{2} + t$)

Здесь расчеты повторяются как для уровня 2, но только в обратном порядке. Отсекается стенка высотой $h - 2t$, статический момент которой равен нулю (ее центр тяжести совпадает с центром тяжести двутавра), а также нижняя полка ($S_z^{\text{п}} = 119,95 \text{ см}^3$). Немного ниже этого уровня в знаменателе формулы будет d , а выше — b . Поэтому:

$$\tau_{4\text{н}} = \frac{Q_p S_z^{\text{п}}}{J_z d} = \frac{-71,56 \cdot 119,95}{2852,62 \cdot 0,8} = -3,76 \text{ кН/см}^2 = -37,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{4\text{в}} = \frac{Q_p S_z^{\text{п}}}{J_z b} = \frac{-71,56 \cdot 119,95}{3537,11 \cdot 12,4} = -0,194 \text{ кН/см}^2 = -1,94 \text{ МПа}.$$

Уровень 5 ($y = -\frac{h}{2}$)

Отсекается весь двутавр, который находится ниже уровня 5, что даст нам основание утверждать, что статический момент отсеченной части равен нулю, поэтому касательное напряжение на верхних волокнах равно нулю: $\tau_5 = 0$.

Откладываем ординаты и строим эпюру касательных напряжений (рис. 3.25).

Проверим прочность по касательным напряжениям $|\tau_{\text{нб}}| \leq R_s \gamma_c$.

Здесь R_s — расчетное сопротивление сдвигу, в соответствии с [7] принимаемое 0,58 от R , $R_s = 239 \cdot 0,58 = 138,6 \text{ МПа}$.

$$64,6 \text{ МПа} \leq R_s \gamma_c = 138,6 \cdot 0,9 = 124,8 \text{ МПа}.$$

Прочность по касательным напряжениям обеспечена.

5. Подбор прямоугольного сечения.

По условию задачи требуется подобрать прямоугольное стальное сечение при соотношении высоты h к ширине b , равное 2.

Отметим, что требуемый момент сопротивления сечения остается тем же: $W_z^{\text{тр}} = 250,3 \text{ см}^3$. Принимая $h = 2b$ и приравняв момент сопротивления прямоугольника к требуемому моменту сопротивления, получим:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{bh^3}{3} = W_z^{\text{тр}}.$$

Приравняв $2b^3/3$ к требуемому моменту сопротивления сечения $W_z^{\text{тр}} = 250,3 \text{ см}^3$, найденному ранее, получаем значение ширины сечения b :

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_z^{\text{тр}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 250,3}{2}} = 7,214131 \text{ см}.$$

Принимаем $b = 7,22 \text{ см}$, округляя значение b обязательно в большую сторону (иначе не выполнится проверка прочности) до трех-четырех значащих цифр. Тогда $h = 2b = 2 \cdot 7,22 = 14,44 \text{ см}$.

Найдем фактический момент сопротивления сечения прямоугольника:

$$W_z^{\text{ф}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{7,22 \cdot 14,44^2}{6} = 250,9 \text{ см}^3.$$

Получили значение, немного превышающее требуемый момент сопротивления сечения ($250,9 > 250,3$), что является проверкой правильности результата. Площадь прямоугольного сечения равна:

$$A_{\text{пр}} = bh = 7,22 \cdot 14,44 = 138,6 \cdot 0,9 = 104,3 \text{ см}^2.$$

6. Построение эпюр наибольших нормальных и касательных напряжений в прямоугольном сечении.

Найдем нормальные напряжения на крайних волокнах в опасном сечении и проверим прочность:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z^p}{W_z^{\Phi}} = \frac{53,83 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}}{250,9 \text{ см}^3} = 21,46 \text{ кН/см}^2 = 214,6 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\text{нб}} = 214,6 \text{ МПа} \leq R_{\gamma_c} = 239 \cdot 0,9 = 215,1 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

На рис. 3.26 представлена эпюра нормальных напряжений.

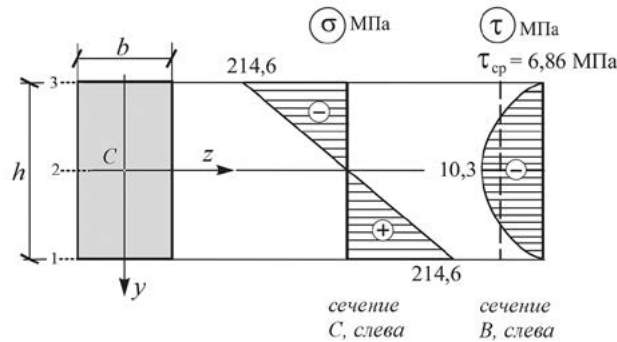


Рис. 3.26. Эпюры σ и τ в прямоугольном сечении

Построим эпюру касательных напряжений по трем уровням. На уровне 1 (низ прямоугольника) очевидно, что статический момент отсеченной части равен нулю и касательное напряжение равно нулю. На уровне 3 (верх) отсекается все сечение и статический момент также равен нулю из-за совпадения центра тяжести отсеченной части с центром тяжести прямоугольника. На уровне 2 (центр тяжести) отсекается прямоугольник высотой $h/2$ и координатой $y_{\text{отс}} = h/4$. Напомним, что наибольшие касательные напряжения равны:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{Q_p S_z^{1/2}}{J_z b} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ср}}.$$

Определяем среднее касательное напряжение:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q_p}{A} = \frac{-71,56}{104,3} = -0,686 \text{ кН/см}^2 = -6,86 \text{ МПа}.$$

Определяем наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ср}} = \frac{3}{2} (-6,86) = -10,3 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность по касательным напряжениям по формуле $|\tau_{\text{нб}}| \leq R_s \gamma_c$:

$$10,3 \text{ МПа} \leq R_s \gamma_c = 138,6 \cdot 0,9 = 124,8 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется. Строим эпюру касательных напряжений (рис. 3.26).

7. Подбор сечения балки в виде круга.

Требуемый момент сопротивления сечения остается тем же: $W_z^{\text{тр}} = 250,3 \text{ см}^3$. Приравнявая момент сопротивления круга к требуемому моменту сопротивления, получим:

$$\frac{\pi r^3}{4} = W_z^{\text{тр}}.$$

Откуда находим значение радиуса r :

$$r = \sqrt[3]{\frac{4W_z^{\text{тп}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 250,3}{3,14}} = 6,8317 \text{ см.}$$

Принимаем $r = 6,84$ см, округляя значение r в большую сторону до трех значащих цифр. Найдем фактический момент сопротивления сечения круга:

$$W_z^{\phi} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3,14 \cdot 6,84^3}{4} = 251,2 \text{ см}^3.$$

Получили значение, немного превышающее требуемый момент сопротивления сечения ($251,2 > 250,3$), что является проверкой правильности результата.

Площадь круглого сечения равна:

$$A_{\text{кр}} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,84^2 = 146,9 \text{ см}^2.$$

8. Построение эпюр наибольших нормальных и касательных напряжений в круглом сечении.

Найдем значение наибольших нормальных напряжений на крайних волокнах:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z^{\text{п}}}{W_z^{\phi}} = \frac{53,83 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}}{251,2 \text{ см}^3} = 21,43 \text{ кН/см}^2 = 214,3 \text{ МПа.}$$

Проверяем условие прочности:

$$\sigma_{\text{нб}} = 214,3 \text{ МПа} \leq R\gamma_c = 239 \cdot 0,9 = 215,1 \text{ МПа.}$$

Прочность по нормальным напряжениям обеспечена.

На рис. 3.27 представлена эпюра нормальных напряжений.

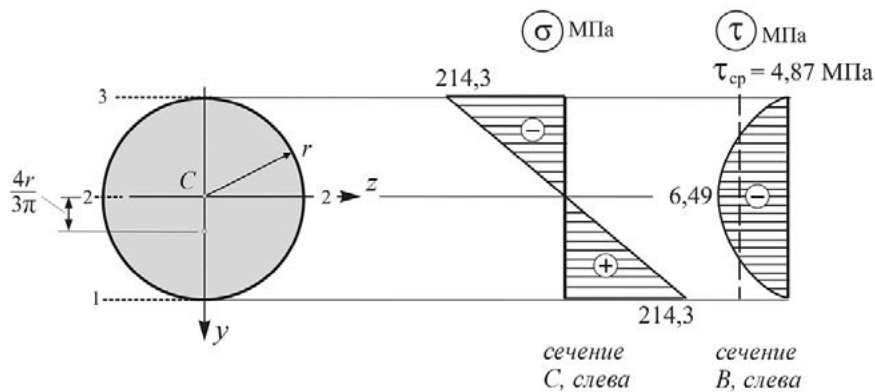


Рис. 3.27. Эпюры σ и τ в круглом сечении

Построим эпюру касательных напряжений по трем уровням. На уровне 1 (нижняя точка) очевидно, что статический момент отсеченной части равен нулю и касательное напряжение равно нулю. На уровне 3 (верх) отсекается все сечение и статический момент также равен нулю из-за совпадения центра тяжести отсеченной части с центром тяжести круга. На уровне 2 (центр тяжести) отсекается полукруг радиусом r и координатой $y_{\text{отс}} = 4r/3\pi$.

Наибольшие (максимальные по модулю) касательные напряжения равны:

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{Q_p S_z^{1/2}}{J_z b(y)} = \frac{4}{3} \frac{Q_p}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \tau_{\text{ср}},$$

$$\text{где } \tau_{\text{ср}} = \frac{Q_p}{A} = \frac{-71,56}{146,9} = -0,487 \text{ кН/см}^2 = -4,87 \text{ МПа} \text{ — среднее по сечению.}$$

Тогда: $\tau_{\text{нб}} = \frac{4}{3} \tau_{\text{ср}} = \frac{4}{3} (-4,87) = -6,49 \text{ МПа}$.

Проверим прочность по касательным напряжениям:

$$6,49 \text{ МПа} \leq R_s \gamma_c = 138,6 \cdot 0,9 = 124,8 \text{ МПа}.$$

Прочность по касательным напряжениям обеспечена.

Строим эпюру касательных напряжений (рис. 3.27).

9. Определение наиболее экономичного сечения.

Наиболее экономичное сечение будет иметь наименьшую площадь.

По расчетам имеем следующие площади сечений:

– двутавр: $A_{\text{дв}} = 40,24 \text{ см}^2$;

– прямоугольное сечение: $A_{\text{пр}} = bh = 7,22 \cdot 14,44 = 138,6 \cdot 0,9 = 104,3 \text{ см}^2$;

– круглое сечение: $A_{\text{кр}} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,84^2 = 146,9 \text{ см}^2$.

Разделив на площадь сечения двутавра другие площади, получим следующие соотношения:

$$A_{\text{дв}} : A_{\text{пр}} : A_{\text{кр}} = 40,24 : 104,3 : 146,9 = 1 : 2,59 : 3,65.$$

Наиболее рациональным по расходу материала является сечение в виде прокатного двутавра.

4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Под *стержневой системой* обычно понимается ансамбль соединенных между собой стержней, включая опоры, соединяющие систему с грунтовым основанием. В данном разделе рассматриваются только плоские стержневые системы, в которых стержни расположены в одной плоскости.

Геометрически неизменяемой называется система соединенных между собой стержней, в которой разрешаются относительные перемещения элементов только при деформациях материала. Стержни такой системы могут испытывать деформации под воздействием нагрузок, однако потеря формы системы в результате перемещения целых элементов невозможна. Именно геометрически неизменяемые системы используются при строительстве.

Мгновенно-изменяемой называется система, в которой могут происходить бесконечно малые перемещения ее элементов без деформации, после чего система становится геометрически неизменяемой. В строительстве такие системы не используют. У этих систем есть неприятная особенность, заключающаяся в том, что при действии нагрузок в элементах таких систем возникают огромные величины внутренних усилий или реакций опор. Естественно, что проектировщики стараются избегать таких конструкций.

Геометрически изменяемой (механизмом) называется система, допускающая относительные перемещения стержней без деформаций материала. Такие системы могут быть элементами различных механизмов и машин, но при проектировании зданий и сооружений их применять нельзя, так как сами по себе они не обладают несущей способностью. Простым примером такой системы может быть конструкция, состоящая из четырех деревянных брусочков, прикрепленных концами один к другому одиночными гвоздиками, образуя шарнирный прямоугольник. Такая стержневая система будет изменять форму даже при приложении минимальных усилий, трансформируясь в параллелограмм. А вот если по диагонали прикрепить к прямоугольнику еще один брусочек, то мы получим уже геометрически неизменяемую систему, состоящую как бы из двух шарнирных треугольников.

Числом степеней свободы W называют безразмерную характеристику, значение которой равно числу независимых параметров, определяющих положение всех точек системы.

Термином «диск» обозначается любая геометрически неизменяемая часть стержневой системы. Диск можно считать один стержень, два или несколько стержней, соединенных жестким узлом, шарнирный треугольник и т.д. Неподвижное грунтовое основание также можно считать диском, который для упрощения условно будем называть «землей».

Жесткими называются узлы, в которых угол между входящими в узел стержнями остается неизменным в процессе деформации системы. Шарнирный узел допускает взаимный поворот стержней, примыкающих к узлу.

При проведении кинематического анализа часто используют термин «связи». Под *связью* мы будем понимать короткий прямой стержень, имеющий на концах шарниры, который служит для соединения элементов стержневой системы между собой, в том числе, для соединения ее с основанием (землей).

Для определения числа степеней свободы часто используют формулу:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0,$$

где $Д$ — количество дисков; $Ш$ — число простых шарниров; C_0 — число опорных связей.

Простой шарнир соединяет два диска, *двойной* — три диска и т.д. Число простых шарниров равно числу дисков в узле минус один. На рис. 4.1 приведены различные случаи соединения дисков с указанием числа простых шарниров. Обратим внимание на рис. 4.1, б, на котором изображен узел, включающий в себя 4 стержня, но нижняя его Т-образная часть состоит из трех стержней, соединенных жестким узлом, образуя единый диск. Поэтому данный шарнир является простым ($Ш = 1$).

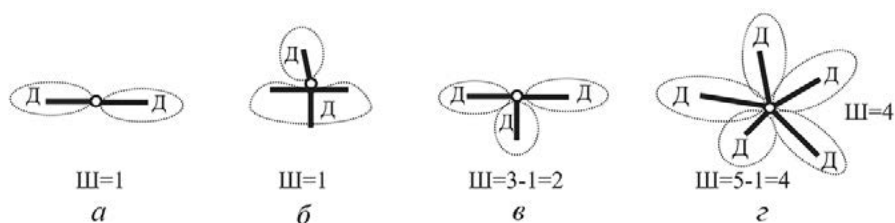


Рис. 4.1. К определению числа простых шарниров в узле

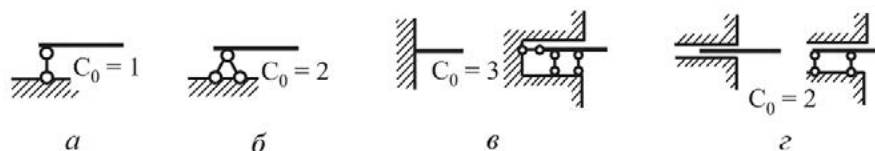


Рис. 4.2. К определению числа опорных связей

Примеры определения числа опорных связей C_0 представлены на рис. 4.2. Отметим, что жесткая заделка, представленная на рис. 4.2, в (слева), в кинематическом и статическом отношениях эквивалентна трем непересекающимся и непараллельным опорным связям, показанным на рис. 4.2, в (справа), обеспечивающим отсутствие двух линейных и одного углового перемещения, блокируя три степени свободы. Скользящая заделка (рис. 4.2, г) соответствует двум опорным связям.

При $W > 0$ кинематический анализ можно ограничить одним этапом и сразу сделать вывод о том, что данная конструкция является геометрически изменяемой (механизмом) и не может применяться в строительстве.

При $W \leq 0$ обязательно нужно выполнить второй этап, целью которого будет выявление способа соединения дисков и идентификации (сопоставления) его с одним из принципов формирования геометрически неизменяемых систем, о которых пойдет речь далее. Если подтвердится такое соответствие одному из способов формирования геометрически неизменяемых систем, то при $W = 0$ система будет статически определимой, а при $W < 0$ — статически неопределимой и в обоих случаях система будет геометрически неизменяемой.

На рис. 4.3 представлены четыре принципа формирования геометрически неизменяемых систем, а далее приведено их описание. Отметим, что нумерация и порядок принципов в различной литературе могут не совпадать.

При изложении материала данного раздела обычно вводят понятие *фиктивного шарнира*, который образуется в точке пересечения двух связей.

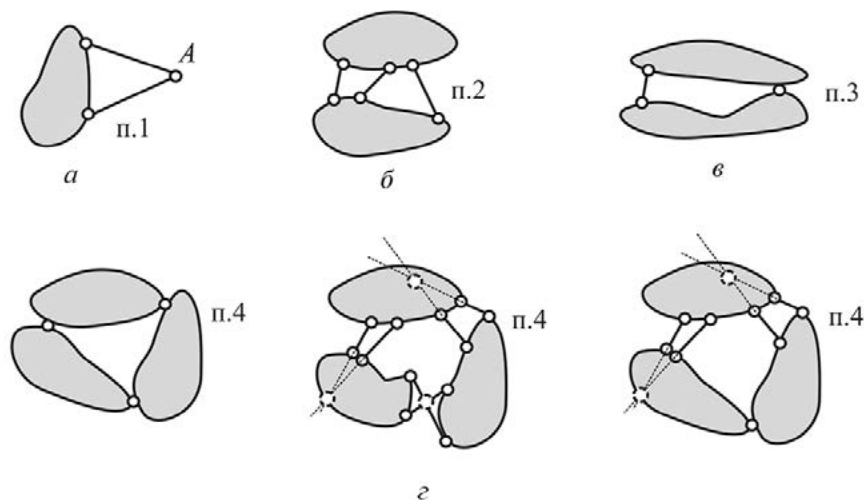


Рис. 4.3. Принципы образования геометрически неизменяемых систем

Принцип 1 (рис. 4.3, а). Присоединение узла к диску при помощи двух связей.

Принцип 2 (рис. 4.3, б). Два диска соединяются тремя непересекающимися и непараллельными связями.

Принцип 3 (рис. 4.3, в). Два диска соединяются шарниром и связью, ось которой не проходит через шарнир.

Принцип 4 (рис. 4.3, г). Три диска соединяются тремя шарнирами, в том числе фиктивными, которые не располагаются на одной прямой. Все три нижних рисунка относятся к принципу 4. На левом рисунке три диска соединены тремя шарнирами, на среднем диски соединены только фиктивными шарнирами, а на нижнем имеют место шарнир и два фиктивных шарнира, образующихся на пересечении двух связей.

На первом этапе кинематического анализа, наряду с формулой для числа степеней свободы, возможно применение формулы для определения степени статической неопределимости n :

$$n = 3K - \text{Ш},$$

где: K — количество замкнутых контуров; Ш — число простых шарниров.

Между числом степеней свободы W и степенью статической неопределимости n существует равенство: $W = -n$.

Геометрически неизменяемая стержневая система, состоящая из прямых стержней, соединенных шарнирными узлами, нагруженная только узловой нагрузкой, называется фермой. Для ферм можно использовать следующую формулу:

$$W = 2Y - C - C_0,$$

где Y — число шарнирных узлов фермы; C — количество стержней решетки фермы; C_0 — количество опорных стержней (связей).

4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.2.1. Примеры вычисления числа степеней свободы W

Задание. На рис. 4.4 представлено несколько примеров стержневых систем, для которых требуется найти число степеней свободы W .

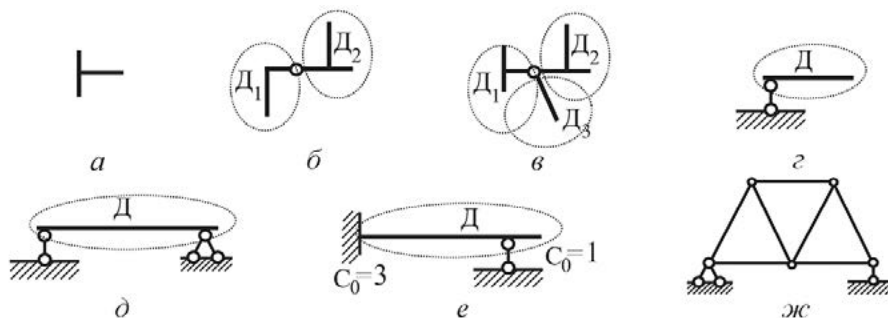


Рис. 4.4. Схемы к зад. 4.2.1

При решении будет применяться формула $W = 3Д - 2Ш - C_0$.

Решение

а) $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 3$, где $Д = 1$, $\text{Ш} = 0$, $C_0 = 0$;

б) $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 = 4$, где $Д = 2$, $\text{Ш} = 1$, $C_0 = 0$;

в) $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 0 = 5$, где $Д = 3$, $\text{Ш} = 2$ (двойной шарнир, $C_0 = 0$);

г) $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 = 2$, где $Д = 1$, $\text{Ш} = 0$, $C_0 = 1$;

д) $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$, где $Д = 1$, $\text{Ш} = 0$, $C_0 = 3$;

е) $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$, где $Д = 1$, $\text{Ш} = 0$, $C_0 = 4$;

ж) $W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 5 - 7 - 3 = 0$, где $Y = 5$, $C = 7$, $C_0 = 3$.

4.2.2. Исследование схемы балки с двумя шарнирами

Задание. Требуется выполнить кинематический анализ жестко защемленной балки с двумя промежуточными шарнирами (рис. 4.5, а).

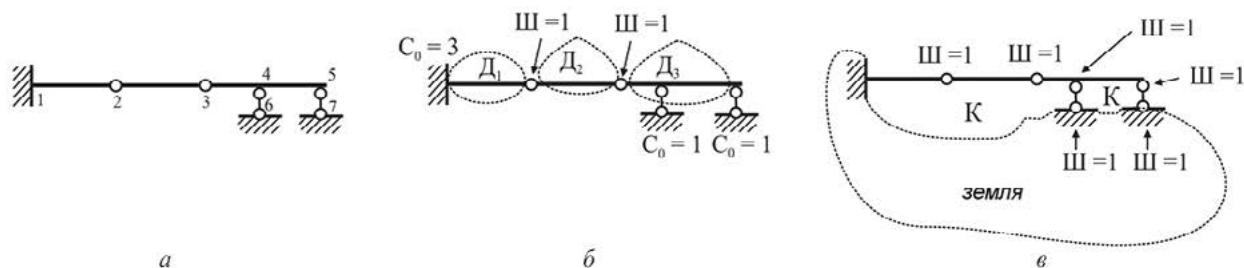


Рис. 4.5. К зад. 4.2.2

Решение

1-й этап. Определение степени свободы W

Этот этап проведем двумя способами.

Первый способ. Используем формулу $W = 3Д - 2Ш - C_0$. На рис. 4.5, б показано разделение балки на диски. Левая, средняя и правая балки считаются дисками $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$, т.е. число $Д = 3$. Число простых шарниров $Ш = 1 + 1 = 2$. Число опорных связей $C_0 = 3 + 1 + 1 = 5$. Тогда $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.

Второй способ. Подсчитаем степень статической неопределимости n . Число замкнутых контуров $К = 2$ (рис. 4.5, в). Обратим внимание, что при подсчете n число опорных связей игнорируется, а опоры считаются как стержни с двумя шарнирами, причем каждый из шарниров учитывается в формуле, как простой шарнир. Итак, число простых шарниров $Ш = 6$.

По формуле $n = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 6 = 0$; $W = -n = 0$.

В обоих случаях было получено $W = 0$.

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

1. Диск $Д_1$ (балка 1–2) соединен с землей заделкой. Заделка эквивалентна трем опорным связям (рис. 4.2, в). Поэтому диск ($Д_1 + \text{земля}$) также является диском в соответствии с принципом 2. Можно считать, что земля как бы «поглощает» стержень, соединенный с ней посредством жесткой заделки, «вбирая» его в себя. В дальнейшем, при проведении кинематического анализа можно будет сразу объединять землю и стержень, соединенный с ней жесткой заделкой, и считать его новым диском $Д + \text{земля}$.

2. Диск ($Д_1 + \text{земля}$) соединен с $Д_3$ тремя связями, которые не пересекаются и не параллельны (принцип 2). Обратим внимание, что балка 3–4–5 здесь считается диском, а балка 2–3 как бы назначается связью. Тогда мы имеем три связи (балку 2–3 и две опорные связи 4–6 и 2–7), не пересекающиеся в одной точке.

Вывод. Балка является статически определимой и геометрически неизменяемой.

Посмотрим, как изменится кинематический анализ, если переставить опорную связь с балки 3–5 к балке 2–3 (рис. 4.6).

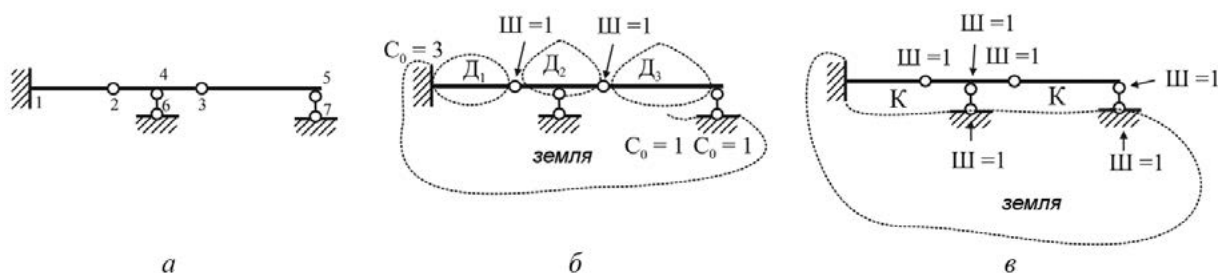


Рис. 4.6. Балка со смещенной опорой 4–6

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

Этот этап не претерпит никаких изменений как по первому способу, так и по второму, т.е. получаем $W = 0$.

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

1. Диск D_1 (балка 1–2) соединен с землей заделкой. Заделка эквивалентна трем опорным связям (рис. 4.2, в). Поэтому диск ($D_1 + \text{земля}$) также является диском.

2. Диск ($D_1 + \text{земля}$) соединен с D_2 (балка 2–3) связью 4–6 и шарниром в т. 2, т.е. в соответствии с принципом 2.

3. Получившийся диск ($D_1 + \text{земля} + D_2$) образует геометрически неизменяемую систему с диском D_3 (балка 3–5) также по принципу 2 (шарнир в т. 3 и связь 5–7).

Вывод. Балка является статически определимой и геометрически неизменяемой.

Попробуем передвинуть опору 5–7 к левому участку балки (рис. 4.7) и посмотрим, что получится.

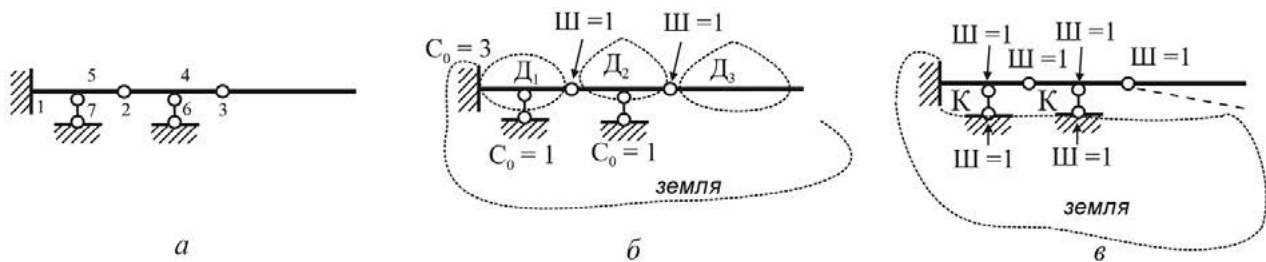


Рис. 4.7. Балка со смещенной опорой 5–7

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

Этот этап не претерпит никаких изменений как по первому способу, так и по второму, т.е. получаем $W = 0$.

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

1. Диск D_1 (балка 1–2) соединен с землей заделкой. Заделка эквивалентна трем опорным связям. Поэтому диск ($D_1 + \text{земля}$) также является диском. Однако связь 5–7 является лишней, т.е. и без нее система могла быть геометрически неизменяемой. Поэтому геометрически неизменяемая система ($D_1 + \text{земля}$) является статически неопределимой, так как она имеет одну лишнюю связь.

2. Диск ($D_1 + \text{земля}$) соединен с D_2 (балка 2–3) связью 4–6 и шарниром в т. 2, т.е. в соответствии с принципом 2.

3. Получившаяся геометрически неизменяемая система ($D_1 + \text{земля} + D_2$), которую можно считать диском, образует геометрически изменяемую систему с диском D_3 , так как в нарушение принципа 2 имеем только шарнир, а необходимая связь отсутствует.

Вывод. Балка является геометрически изменяемой, т.е. механизмом. При нагружении правой балки она без усилий повернется вокруг шарнира в т. 3.

4.2.3. П-образная рама на двух опорах

Задание. Требуется выполнить кинематический анализ рамы на рис. 4.8. Слева имеется шарнирно-неподвижная опора, а справа — шарнирно-подвижная.

Решение

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

Первый способ. Используем формулу $W = 3Д - 2Ш - C_0$. На рис. 4.8, а показано разделение системы на диски. Саму раму принимаем за диск D . Земля в качестве диска при расчете W по этой формуле не считается. Левая опора эквивалентна числу опорных связей $C_0 = 2$, правая $C_0 = 1$. Промежуточных шарниров нет, следовательно $Ш = 0$. Получаем:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0.$$

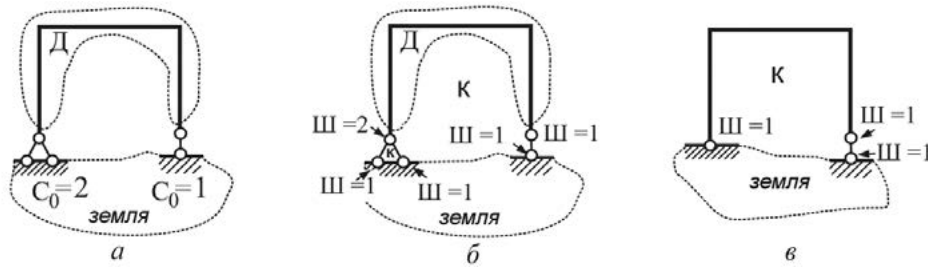


Рис. 4.8. К зад. 4.2.3

Второй способ. Подсчитаем степень статической неопределимости n . Число замкнутых контуров $K = 2$ (рис. 4.8, б). Второй замкнутый контур находится внутри левой опоры. При вычислении n надо учитывать все шарниры, включая опорные. Так, в левой опоре имеем суммарно $\text{Ш} = 4$, так как верхний шарнир в опоре является двойным (соединяет 3 диска — раму и две опорных связи), а два нижних шарнира соединяют опорные связи с землей и дают нам два простых шарнира. Правая опора добавляет два простых шарнира.

Обратим внимание, что при подсчете n число опорных связей не учитывается. Итак, число простых шарниров $\text{Ш} = 6$.

По формуле для определения степени статической неопределимости получаем $n = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, откуда $W = -n = 0$.

Подсчет степени статической неопределимости можно значительно упростить, если принять во внимание эквивалентность шарнирно-неподвижной опоры и шарнирного закрепления. Замена шарнирно-неподвижной опоры шарниром (рис. 4.8, в) приводит к исчезновению одного контура и уменьшению числа простых шарниров до трех.

Получаем: $W = 3D - 2\text{Ш} - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$.

2-й этап. *Исследование взаимного расположения элементов системы*

Рама, являющаяся диском, соединена с землей (которую тоже можно считать диском) в соответствии с принципом 2. Оси опорных связей не пересекаются в одной точке.

Вывод. Рама — статически определимая и геометрически неизменяемая.

4.2.4. Пример мгновенно-изменяемой рамы

Задание. Требуется выполнить кинематический анализ рамы на рис. 4.9.

Решение

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0.$$

Определение степени статической неопределимости n приводит к аналогичному результату (см. предыдущий пример).

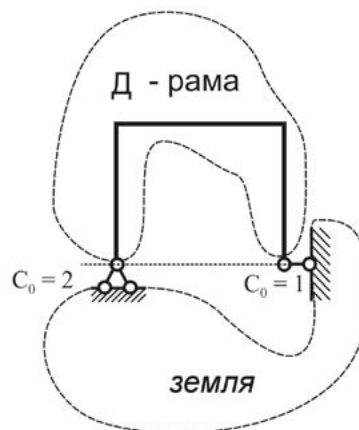


Рис. 4.9. К зад. 4.2.4

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

Рама, являющаяся диском, соединена с землей (которую тоже можно считать диском) с нарушением принципа 2. Оси опорных связей пересекаются в одной точке (левая опора).

Вывод. Рама — мгновенно изменяемая и не может применяться в строительстве.

Если при загруженной раме попытаться найти горизонтальную опорную реакцию, записав выражение моментов относительно левой опоры, то мы придем к выводу, что она будет стремиться к бесконечности.

На рис. 4.10, *а* показана рама, в которой реакция R_B сначала имеет угол наклона α с горизонталью (ее направление соответствует направлению опорного стержня в точке B). Из выражения $\sum M_A = 0$ получаем $R_B = Pa/e$, где $e = l \sin \alpha$ — плечо силы R_B . При $\alpha \rightarrow 0$ (рис. 4.10, *б*), т.е. когда все три стержня пересекаются в одной точке (нарушение принципа 4), реакция опоры $R_B \rightarrow \infty$.

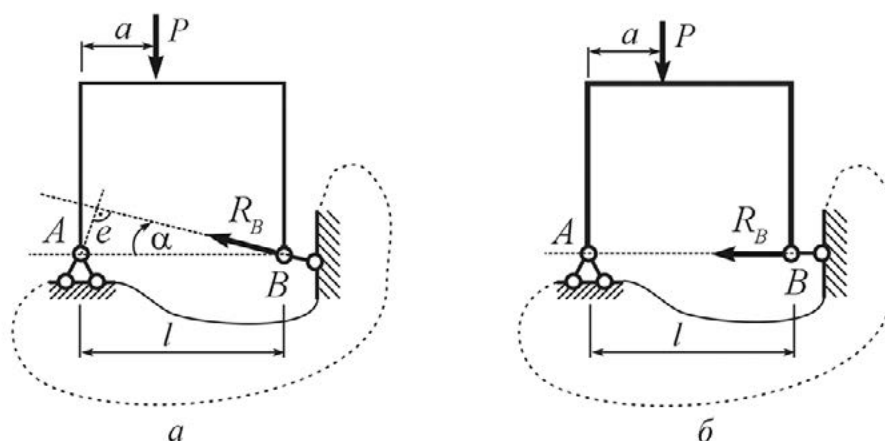


Рис. 4.10. К зад. 4.2.4

Интересно, что, когда $P = 0$ (нагрузки отсутствуют) и $\alpha \rightarrow 0$, реакция R_B , которая должна быть равна нулю при нулевых нагрузках, на самом деле не определяется (происходит деление нуля на нуль). Система становится мгновенно изменяемой при $\alpha \rightarrow 0$.

4.2.5. Трехшарнирная рама

Задание. Требуется провести кинематический анализ трехшарнирной рамы на двух опорах с шарниром на ригеле (рис. 4.11). Такая рама называется трехшарнирной рамой и относится к распорным системам, в которых при действии одних только вертикальных нагрузок в опорах возникают горизонтальные опорные реакции.

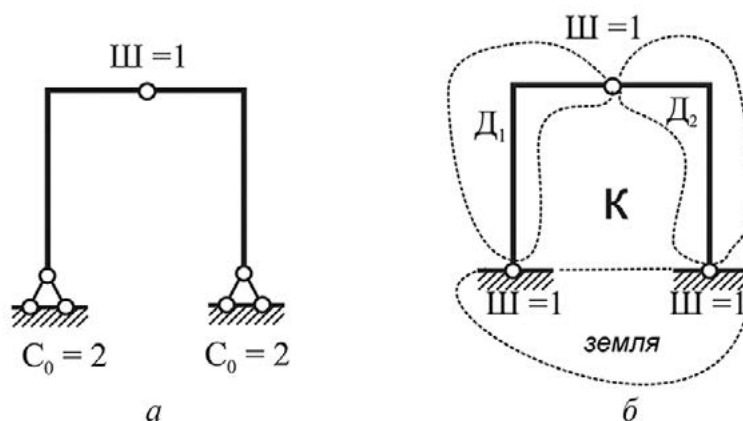


Рис. 4.11. К зад. 4.2.5

Решение

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0 \text{ (рис. 4.11, а).}$$

Для использования формулы для степени статической неопределимости целесообразно заменять шарнирно неподвижные опоры шарнирами (рис. 4.11, б), которые полностью им эквивалентны в статическом и кинематическом отношении. Для такой рамы вместо определения W удобно найти степень статической неопределимости n :

$$n = 3К - Ш = 3 \cdot 1 - 3 = 0; W = -n = 0.$$

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

Три диска (две Г-образных части $Д_1$ и $Д_2$, а также земля) соединены в соответствии с принципом 4 (тремя шарнирами, не расположенными на одной прямой), образуя геометрически неизменяемую систему.

Вывод. Рама — статически определима и геометрически неизменяема.

4.2.6. Трехшарнирная рама с затяжкой

Задание. Требуется провести кинематический анализ трехшарнирной рамы с затяжкой, изображенной на рис. 4.12.

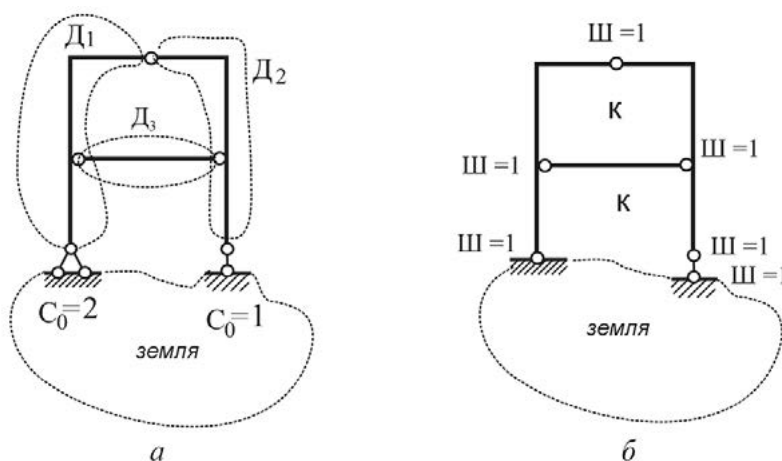


Рис. 4.12. К зад. 4.2.6

Решение

1-й этап. Определение числа степеней свободы W

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Для упрощения системы (рис. 4.12, а) заменим левую шарнирно неподвижную опору шарниром (рис. 4.12, б). Для такой рамы вместо определения W удобно найти степень статической неопределимости n :

$$n = 3К - Ш = 3 \cdot 2 - 6 = 0; W = -n = 0.$$

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

1. Три диска (две Г-образных части $Д_1$ и $Д_2$, а также затяжка $Д_3$) соединены в соответствии с принципом 4 (тремя шарнирами, не расположенными на одной прямой).

2. Полученный диск ($Д_1 + Д_2 + Д_3$), состоящий из трех частей, соединен с землей в соответствии с принципом 2 (рис. 4.12, а) или 3 (рис. 4.12, б).

Вывод. Рама — статически определима и геометрически неизменяема.

5. ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В РАМАХ

5.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Приемы построения эпюр внутренних усилий были рассмотрены ранее в первой части пособия. При центральном растяжении и сжатии прямых стержней рассматривались способы построения эпюры продольных сил N , а при рассмотрении плоского поперечного изгиба балок изучались подходы к построению эпюр Q и M . При расчете плоских рам обычно строят все три эпюры внутренних усилий N , Q и M . Рассмотрим некоторые приемы построения эпюр внутренних усилий в плоских статически определимых рамах.

При построении эпюры продольных сил в стержнях, работающих на растяжение и сжатие, была использована дифференциальная зависимость между продольной силой N и интенсивностью распределенной нагрузки q :

$$\frac{dN}{dx} = -q.$$

Следствия из этого равенства определяли характер функции $N(x)$ на участке. Так, при $q = \text{const}$, $N(x)$ — линейная функция, а при $q = 0$, $N(x) = \text{const}$. При построении эпюры N на рамах мы не будем учитывать собственный вес стержней, т.е. примем продольную распределенную нагрузку равной нулю, т.е. $q = 0$. В этом случае эпюры продольных сил N на всех участках будут иметь вид прямоугольников, т.е. будут представлены постоянными функциями $N(x) = \text{const}$, не изменяющимися по длине стержня. При таком условии для построения эпюры N будет достаточно найти продольную силу в любом одном поперечном сечении стержня и распространить этот результат на всю его длину, изобразив прямоугольник.

Продольную силу N в сечении стержня будем искать как сумму внешних сил, параллельных участку рамы, расположенных с одной стороны от сечения.

Продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение, т.е. направлена от сечения.

Знак продольной силы определяется по ее физическому воздействию на сечение и никак не связан с направлением осей. Положительные ординаты на эпюре N можно откладывать в любую сторону от базисной линии (оси стержня).

При построении эпюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M в балках при поперечном изгибе учитывались две дифференциальные зависимости, связывающие внутренние усилия с интенсивностью распределенной поперечной нагрузки q :

$$\frac{dM}{dx} = -Q; \quad \frac{dQ}{dx} = -q.$$

Следствия из этих равенств определяют характер функций $Q(x)$ и $M(x)$ на участке. Так, если $q = 0$, то $Q(x) = \text{const}$, а $M(x)$ — линейная функция, а при $q = \text{const}$, $Q(x)$ — линейная функция, а $M(x)$ — квадратная парабола. В первом случае, при $q = 0$, на участке, для построения эпюры Q достаточно найти ее значение в одном сечении (график Q будет представлен прямоугольником), а для построения эпюры M надо найти значения изгибающего момента по меньшей мере в двух сечениях (найденные ординаты потом соединяются наклонной прямой линией). Во втором случае, при $q = \text{const}$, для построения эпюры Q находят ее значения в двух сечениях (найденные ординаты соединяются наклонной прямой), а для корректного представления эпюры M следует рассматривать по меньшей мере три сечения (кривая может быть построена минимум по трем точкам).

Поперечную силу Q в сечении стержня будем находить как сумму внешних сил, перпендикулярных участку рамы, расположенных с одной стороны от сечения.

Поперечная сила Q считается положительной, если она стремится повернуть прилегающий участок стержня по ходу часовой стрелки.

Положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются в любую сторону от оси стержня, главное здесь — поставить знак.

Изгибающий момент M будем находить как сумму моментов внешних сил, расположенных с одной стороны от сечения.

Знак изгибающего момента в рамах не определяется, но эпюру M в строительных расчетах строят со стороны растянутого волокна. Найденные ординаты на эпюре M откладывают с той стороны стержня, которая испытывает растяжение. Знак на эпюре изгибающих моментов в рамах не ставят. Такой прием позволяет установить растянутые зоны, где и следует располагать стальную арматуру, если речь идет о железобетонных конструкциях.

На участках с распределенной нагрузкой q в сечениях, где $Q = 0$ (эпюра Q переходит через ноль), на эпюре M будет наблюдаться экстремум с касательной, параллельной участку рамы. Это утверждение также следует из дифференциальных зависимостей при изгибе.

5.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.2.1. Расчет рамы 1

Задание

Для рамы (рис. 5.1) требуется провести кинематический анализ, а также построить эпюры внутренних усилий N , Q и M при нагрузках и размерах, указанных на рис. 5.2, а.

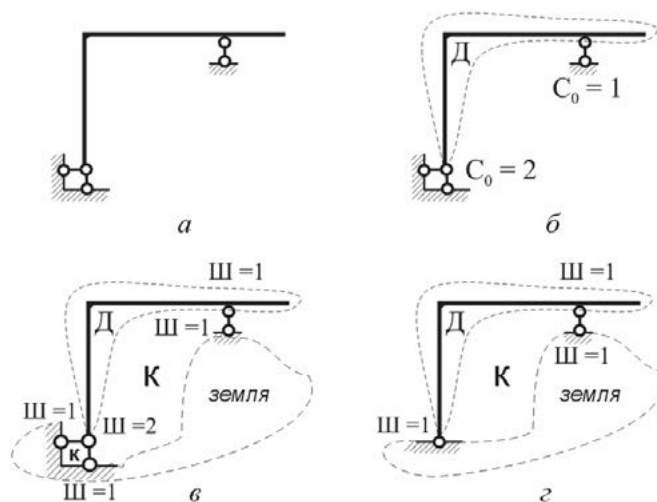


Рис. 5.1. К зад. 5.2.1

Решение

Кинематический анализ

1-й этап. Определение степени свободы W

Найдем число степеней свободы стержневой системы (рис. 5.1, а). Имеется один диск $D = 1$ и число опорных связей $C_0 = 3$ (рис. 5.1, б).

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0.$$

Можно вычислить степень статической неопределимости n (рис. 5.1, в) и взять ее с обратным знаком. Имеем два контура и шесть опорных связей.

$$n = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 6 = 0; W = -n = 0.$$

На рис. 5.1, г шарнирно неподвижная опора для удобства расчетов заменена шарниром, так как шарнирное закрепление полностью эквивалентно шарнирно-неподвижной опоре. Тогда количество контуров уменьшится и расчеты упростятся.

$$n = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 3 = 0; W = -n = 0.$$

Так как получили $W = 0$, то необходимо выполнить второй этап, который заключается в исследовании взаимного расположения элементов стержневой системы с целью выявления, по какому принципу формируется геометрически неизменяемая система.

2-й этап. Исследование взаимного расположения элементов системы

Очевидно, что единственный диск (рама) соединяется с землей в соответствии с принципом 2 (рис. 5.1, б). Если учитывать изменения, внесенные в структуру рамы (рис. 5.1, з), то соединение дисков соответствует принципу 3.

Вывод. Рама — статически определима и геометрически неизменяема.

Найдем опорные реакции в раме с нагрузками (рис. 5.2, а).

Определение опорных реакций

Из суммы проекций на ось x получаем значение горизонтальной реакции (ось x направляется вправо, а горизонтальную реакцию влево):

$$\sum X = 0; +x \rightarrow; -H_A + 16 = 0; H_A = 16 \text{ кН.}$$

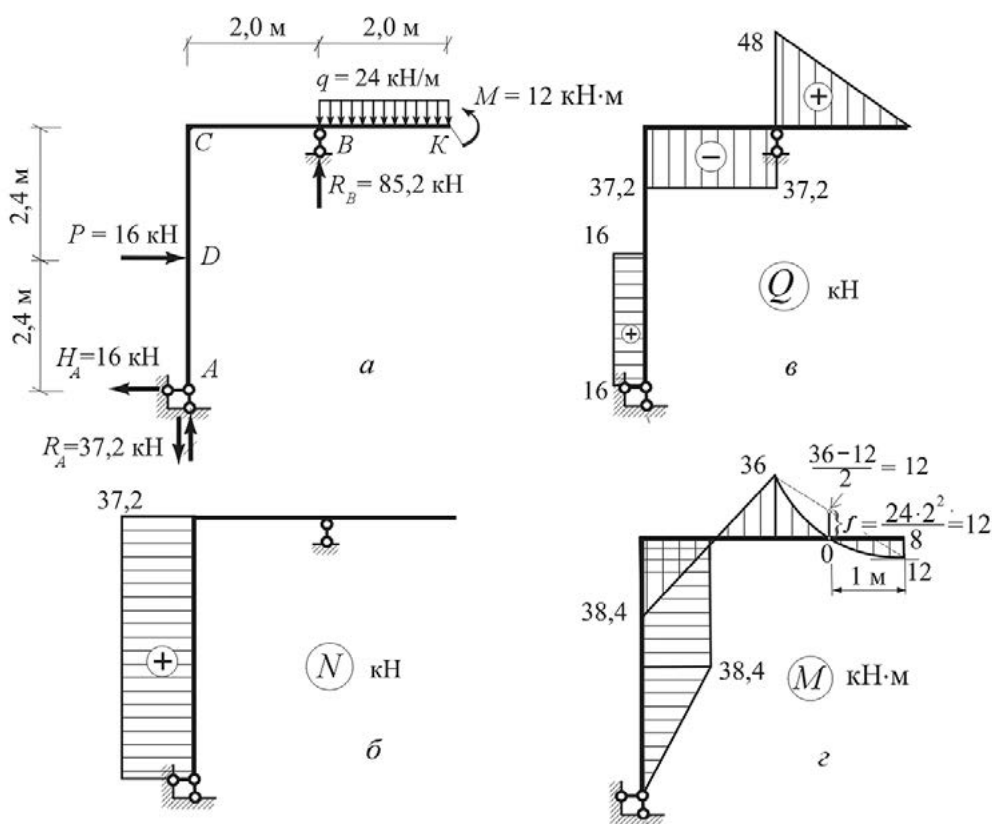


Рис. 5.2. Схема рамы и эпюры внутренних усилий к зад. 5.2.1

Из суммы моментов относительно точки A можно найти опорную реакцию R_B . При написании уравнений моментов можно принимать любое правило знаков. Направляем R_B вверх и предполагаем, что положительный момент направлен по ходу часовой стрелки:

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 2,0 + 24 \cdot 2 \left(2,0 + \frac{2,0}{2} \right) - 12 + 16 \cdot 2,4 = 0.$$

Откуда получаем: $R_B = 82,5 \text{ кН}$.

Запишем теперь уравнение моментов относительно точки B , предположив, что положительный момент направлен по ходу часовой стрелки, а опорная реакция R_A направлена вверх:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 2 + 16 \cdot 4,8 - 16 \cdot 2,4 - 12 + 24 \cdot 2 \cdot \frac{2,0}{2} = 0;$$

Получаем: $R_A = -37,2 \text{ кН}$.

Знак «-» перед величиной опорной реакции означает, что она направлена в противоположную сторону по отношению к первоначально выбранному направлению, то есть вниз. Зачеркиваем вектор «вверх» и заменяем его на вектор «вниз» (рис. 5.2, а).

Выполним проверку опорных реакций, используя уравнение проекций всех сил на ось y (направим ее вверх).

$$\sum Y = 0; +Y \uparrow; -37,2 + 85,2 - 24 \cdot 2 = 0; 0 = 0.$$

Проверка сошлась.

Построение эпюр внутренних усилий

Эпюра продольных сил N

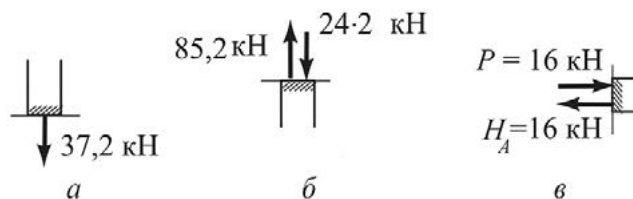


Рис. 5.3. К построению эпюры N

Эпюра продольных сил N , и, если собственный вес стержней не учитывать (интенсивность распределенной нагрузки q для вертикальных стержней принимается равной нулю), будет состоять из прямоугольников. Поэтому на каждом участке проводим одно сечение, найдем в нем продольную силу и изобразим прямоугольник по всей длине участка. На рис. 5.3 представлены сечения, где определяются продольные силы с указанием направлений и величин внешних сил, которые учитываются в расчетах.

Участок AD

Выполняем сечение в любом месте участка AD и суммируем «нижние» вертикальные силы (рис. 5.3, а).

$$N_{AD} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = R_A = +37,2 \text{ (растяжение)}.$$

Полученный результат можно проверить, суммируя «верхние» вертикальные силы, которые можно мысленно перенести к месту разреза (рис. 5.3, б).

$$N_{AD} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{верх}} = +85,2 \text{ (растяжение)} - 24 \cdot 2 \text{ (сжатие)} = +37,2 \text{ кН (растяжение)}.$$

Получили тот же самый результат.

Участок CD

Очевидно, что на этом участке продольная сила будет такая же (рис. 5.3, а), как на участке AD .

$$N_{CD} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = R_A = +37,2 \text{ (растяжение)}.$$

Участок CB

Суммируем «правые» или «левые» горизонтальные силы в произвольном вертикальном сечении (рис. 5.3, в):

$$N_{CB} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{лев}} = P - H_A = 16 - 16 = 0.$$

Кстати, если просуммировать «правые» горизонтальные силы, то их вообще нет, и также получается ноль.

Участок BK

Аналогичные рассуждения можно провести для участка BK .

$$N_{BK} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{лев}} = P - H_A = 16 \text{ (растяжение)} - 16 \text{ (сжатие)} = 0.$$

Для определения продольных сил на участке BK более просто вычислить сумму правых горизонтальных сил, которых нет вообще.

$$N_{BK} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{прав}} = 0.$$

Наносим на базовые линии эпюру продольных сил в виде прямоугольников, ставим знаки и выполняем штриховку. Ординаты эпюры продольных сил можно откладывать с любой стороны от базовой линии, совпадающей с осью стержня. Главное — поставить знаки.

Эпюра поперечных сил Q

Напомним, что, исходя из дифференциальных зависимостей при поперечном изгибе на участках, где отсутствует распределенная поперечная нагрузка, будем иметь постоянные эпюры (достаточно найти Q в одном сечении), а на участках с $q = \text{const}$ эпюра поперечных сил Q будет представлена наклонной линией (в этом случае достаточно определить Q в двух сечениях). На участках AD , DC и CB будем иметь эпюры в виде прямоугольников, а на участке BK должны получить наклонную линию.

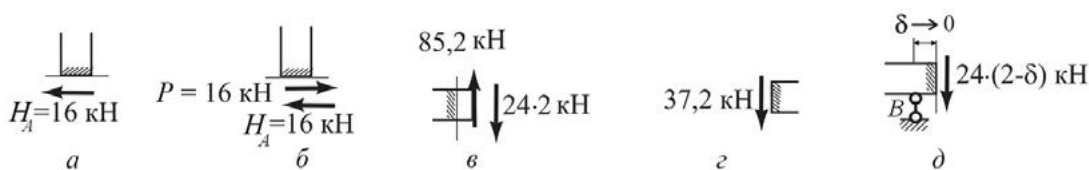


Рис. 5.4. К построению эпюры поперечных сил Q

Участок AD

Выполняем сечение в любом месте стержня AD и суммируем «нижние» горизонтальные силы, перпендикулярные стержню (рис. 5.4, а).

$$Q_{AD} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{ниж}} = H_A = +16 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Так как поперечная сила стремится повернуть прилежащий элемент по ходу часовой стрелки, то она является положительной. Для правильного определения знака поперечной силы можно рекомендовать, например, такой искусственный прием. В представленные на рис. 5.4 участки стержня мысленно можно «вбить гвоздики». Тогда можно будет легко определить направление вращения вырезанных элементов под воздействием толкающих их векторов сил.

Участок DC

Суммируем «нижние» силы горизонтального направления, т.е. мысленно переносим их к месту разреза (рис. 5.4, б).

$$Q_{DC} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{ниж}} = H_A - P = +16 \text{ кН (по часовой стрелке)} - 16 \text{ кН (против часовой стрелки)} = 0.$$

Участок CB

Суммируя «правые» вертикальные силы, перпендикулярные участку (рис. 5.3, в), получим:

$$Q_{CB} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{прав}} = 24 \cdot 2 \text{ (по часовой стрелке)} - 85,2 \text{ (против часовой стрелки)} = -37,2 \text{ кН}.$$

Первое произведение $24 \cdot 2$ представляет собой равнодействующую равномерно распределенной нагрузки, а второй член представляет опорную реакцию в правой опоре.

Аналогичный результат с более простыми вычислениями получим, перенося к месту разреза единственную «левую» силу (рис. 5.4, г), — вертикальную опорную реакцию $R_A = 37,2 \text{ кН}$, направленную вниз. Так как она стремится повернуть прилежащий элемент против хода часовой стрелки, поперечная сила будет отрицательной.

$$Q_{CB} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{лев}} = -R_A = -37,2 \text{ кН (против часовой стрелки)}.$$

Участок ВК

На данном участке ожидаемая эпюра — наклонная линия. Очевидно, что над опорой B ожидается скачок функции. Поэтому проводим сечение немного правее опоры B на бесконечно малую величину. Назовем его сечение B , справа. Найдем поперечную силу, суммируя «правые» вертикальные силы (рис. 5.4, d). С учетом получим:

$$Q_{B, \text{справа}} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{прав}} = ql = 24 \cdot 2 = +48 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

На свободном конце в сечении K поперечная сила равна нулю, что очевидно из суммы «правых» вертикальных сил.

$$Q_K = \sum P_{\text{верт}}^{\text{прав}} = 0.$$

Откладываем в масштабе ординаты на эпюре поперечных сил, расставляем знаки и наносим штриховку, которая выполняется перпендикулярно оси стержня.

Эпюра изгибающих моментов M

Очевидно, что на всех участках, за исключением BK , мы имеем линейные графики на эпюре изгибающих моментов M , а на участке BK эта эпюра будет представлена квадратной параболой выпуклостью вниз. Напомним, что в качестве визуальной проверки эпюры M используется так называемое правило «паруса», которое определяет направление выпуклости графика, которая должна совпадать с направлением распределенной нагрузки q .

Напомним, что задача построения эпюры изгибающих моментов осложняется тем, что в рамках не принято ставить знаки на эпюре M , а сама эпюра строится со стороны растянутого волокна.

При пояснениях примем следующие обозначения: (л.в.), (п.в.), (н.в.), (в.в.), что означает, что растянуты левые, правые, нижние или верхние волокна соответственно.

Участок AD

Выполняя сечение в опоре A и суммируя «нижние» моменты внешних сил, обнаруживаем, что плечи опорных реакций равны нулю и значение изгибающего момента нулевое.

$$M_A = \sum M_A^{\text{ниж}} = H_A \cdot 0 + R_A \cdot 0 = 0.$$

Так как в сечении D скачка в эпюре моментов не ожидается (там не действует сосредоточенный момент), можно провести сечение прямо через D . Получаем, что растянуты правые волокна. Для удобства рассуждений можно представить некоторый гибкий предмет типа ластика, направленного вниз, который от воздействия момента, создаваемого H_A , будет прогибаться влево, значит, растянуты правые волокна:

$$M_D = \sum M_D^{\text{ниж}} = H_A \cdot 2,4 = 16 \cdot 2,4 = 38,4 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Так как растянуты правые волокна, на рис. 5.2, z откладываем ординату вправо от т. D .

Участок DC

В сечении D изгибающий момент уже был определен. Он равен 38,4 кН·м (растянуты правые волокна). Скачка в этом сечении наблюдаться не будет, так как здесь отсутствует сосредоточенный момент. Теперь находим момент в сечении C , которое принадлежит вертикальному стержню и находится немного ниже узла C на бесконечно малую $\delta \rightarrow 0$ (рис. 5.5, b). Изгибающий момент найдем, суммируя моменты «нижних» сил. При условии $\delta \rightarrow 0$ получим:

$$\begin{aligned} M_C &= \sum M_C^{\text{ниж}} = H_A \cdot 4,8 \text{ (п.в.)} - P \cdot 2,4 \text{ (л.в.)} = \\ &= 16 \cdot 4,8 \text{ (п.в.)} - 16 \cdot 2,4 \text{ (л.в.)} = 38,4 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}. \end{aligned}$$

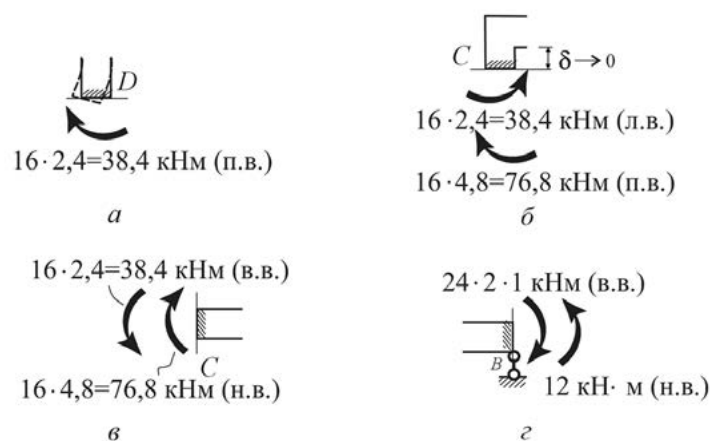


Рис. 5.5. К построению эпюры изгибающих моментов M

Участок CB

Найдем изгибающий момент как сумму моментов «левых» сил относительно сечения C , находящегося немного правее узла C (рис. 5.5, в).

$$M_C = \sum M_C^{\text{лев}} = 16 \cdot 4,8 \text{ (н.в.)} - 16 \cdot 2,4 \text{ (в.в.)} = 38,4 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

В сечении B над опорой получим (рис. 5.5, г):

$$M_B = \sum M_B^{\text{прав}} = -24 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} \text{ (в.в.)} + 12 \text{ (н.в.)} = -36 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)}.$$

Здесь — равнодействующая нагрузки q , а $\frac{2}{2}$ — ее плечо, которое отсчитывается от т. B до середины участка BK .

В сечении K , суммируя моменты правых сил, получим растяжение нижних волокон моментом $12 \text{ кН}\cdot\text{м}$:

$$M_K = \sum M_K^{\text{прав}} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Найдем момент в середине участка BK , чтобы уточнить эпюру M на криволинейном участке.

$$M_{\text{сер}} = \sum M_{\text{сер}}^{\text{прав}} = -24 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \text{ (в.в.)} + 12 \text{ (н.в.)} = 0.$$

Можно найти момент в середине участка приемом подвешивания параболы. Соединив концы параболы пунктирной линией, найдем среднюю линию трапеции:

$$(36 - 12)/2 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Вычислим стрелку параболы:

$$f = ql^2/8 = 24 \cdot 2^2/8 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Вычитая из $12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ стрелку параболы $12 \text{ кН}\cdot\text{м}$, получаем нулевое значение.

Добавим, что на участке BK экстремальное значение изгибающего момента будет иметь место в сечении K , так как там поперечная сила равна нулю. В этом сечении касательная к эпюре M будет горизонтальна.

Для проверки правильности эпюр рассмотрим равновесие узла C (рис. 5.6). Для этого используем только эпюры внутренних усилий. Правее узла действует отрицательная поперечная сила $Q = -37,2 \text{ кН}$, следовательно, ее надо направить вверх, так как она должна стремиться повернуть узел против хода часовой стрелки. Снизу от узла имеет место положительная продольная сила $N = +37,3 \text{ кН}$. Направляем ее вниз, от узла, чтобы узел был растянут. Вблизи узла

прикладываем моменты таким образом, чтобы горизонтальный стержень прогибался вверх, что соответствует растяжению нижних волокон (на эпюре M здесь растянуты нижние волокна), а вертикальный — влево, что указывает на растяжение правых волокон. Записывая уравнения равновесия для узла C , получим:

$$\sum Y_{\text{узел}} = 0; 37,2 - 37,2 = 0;$$

$$\sum X_{\text{узел}} = 0;$$

$$\sum M_{\text{узел}} = 0; 38,4 - 38,4 = 0.$$

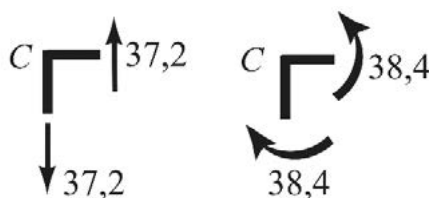


Рис. 5.6. Равновесие узла C

Все три уравнения равновесия выполняются для узла C .

Если изгибающий момент в узле на вертикальном участке растягивает правые волокна (как в нашем случае), то, чтобы выполнялось равновесие узла, можно просто его «перенести» на горизонтальный стержень в узле на нижние волокна (рис. 5.7, б), и наоборот, если момент растягивает левые волокна, то его можно «отразить» на горизонтальный стержень на верхние волокна (рис. 5.7, а). Все другие варианты эпюры моментов в узле будут неверными.

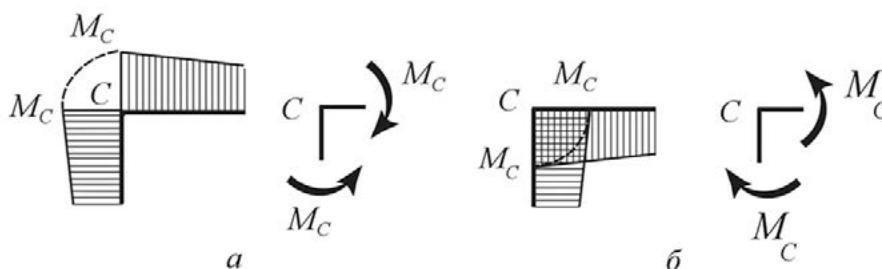


Рис. 5.7. Возможные случаи равновесия узла

5.2.2. Расчет рамы 2

Задание. Для рамы (рис. 5.8, а) требуется построить эпюры внутренних сил.

Решение

Определение опорных реакций

$$\sum X = 0; -H_A + 12 = 0 \Rightarrow H_A = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; 12 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - R_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_B = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} + 12 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_A = 6 \text{ кН}.$$

Выполним проверку реакций:

$$\sum Y = 0; 6 + 18 - 6 \cdot 4 = 0.$$

Эпюра продольных сил N

Участок АК

Мысленно проводим произвольное сечение на участке и находим сумму вертикальных внешних сил (параллельных участку), расположенных ниже сечения. Это равносильно переносу вертикальной реакции R_A к месту разреза. Так как R_A сжимает участок, расположенный выше произвольного сечения (направлена к сечению), то продольная сила будет отрицательная.

$$N_{AK} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = -6 \text{ кН (сжатие)}.$$

Изображаем прямоугольник со знаком «-». Откладывать значения можно в любую сторону.

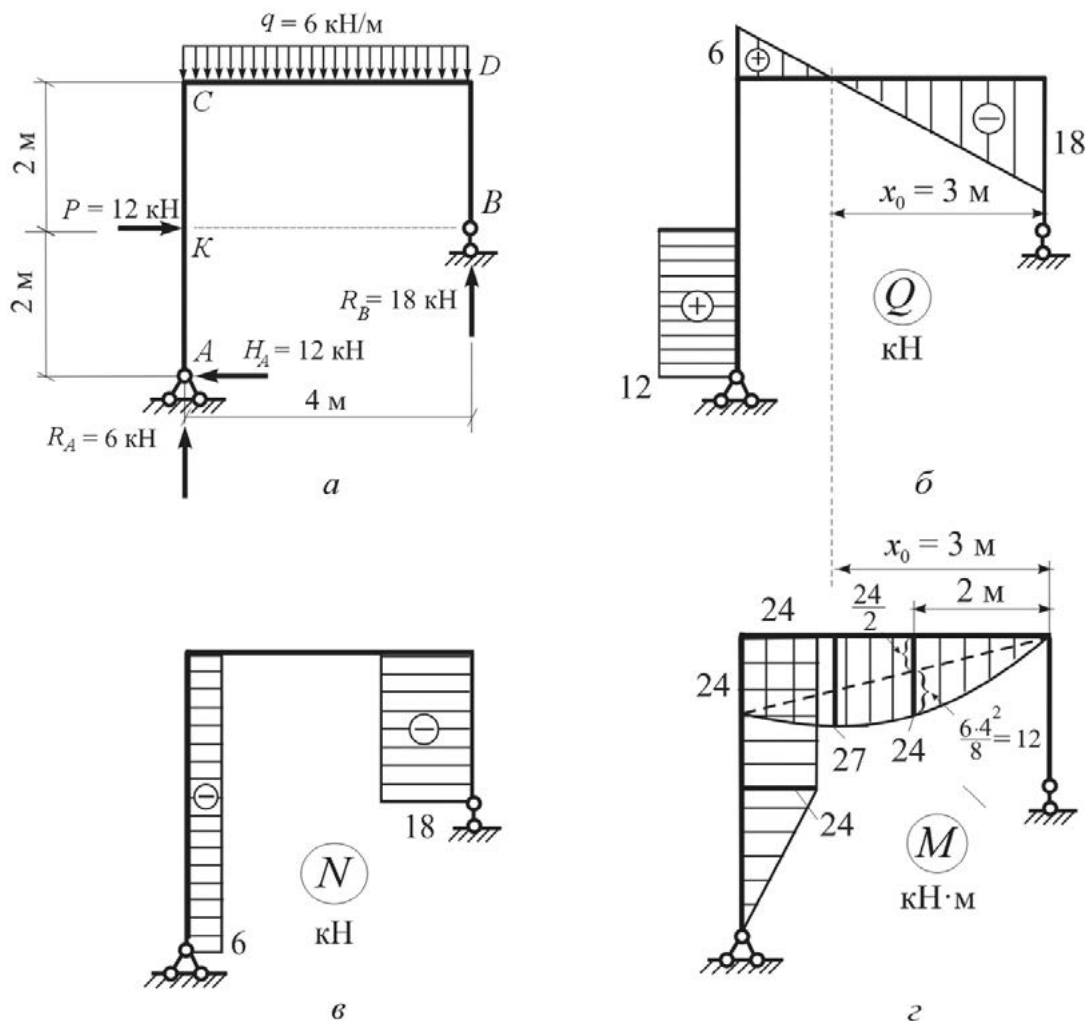


Рис. 5.8. Схема рамы и эпюры внутренних усилий к зад. 5.2.2

Участок КС

Проводим произвольное сечение и находим сумму проекций нижних сил на ось стержня. Рассуждения аналогичны тем, которые были сделаны для предыдущего участка.

$$N_{KC} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = -6 \text{ кН (сжатие)}.$$

Участок CD

Рассечем участок в любом месте и найдем сумму левых сил, параллельных горизонтальному участку стержня. Реакция H_A растягивает правую часть, а сила P ее сжимает.

$$N_{CD} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{лев}} = H_A - P = 12 - 12 = 0.$$

Реакцию R_A здесь учитывать не надо, так как она перпендикулярна участку и будет участвовать при определении поперечной силы. Для проверки можно найти продольную силу, суммируя правые внешние силы, параллельные участку. Так как их нет, то полученный результат $N_{CD} = \sum P_{гор}^{прав} = 0$ подтверждается.

Участок DB

$$N_{DB} = \sum P_{верт}^{ниж} = -18 \text{ кН (сжатие)}.$$

Эюры поперечных сил Q

Участок AK

$$Q_{AK} = \sum P_{гор}^{ниж} = H_A = +12 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Участок KC

$$Q_{KC} = \sum P_{ниж}^{гор} = H_A \text{ (по часовой стрелке)} - P \text{ (против часовой стрелки)} = 12 - 12 = 0.$$

Участок CD

На этом участке Q — линейная функция.

Найдем Q в двух сечениях.

$$Q_C = \sum P_{верт}^{ниж} = R_A = +6 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

$$Q_D = \sum P_{верт}^{ниж} = -R_B = -18 \text{ кН (против часовой стрелки)}.$$

На участке происходит переход Q через ноль. Существует несколько способов определения отрезка x_0 . Сначала мы используем свойство подобных треугольников, отношение сторон которых есть величина постоянная.

$$\frac{18}{6} = \frac{x_0}{4 - x_0}, \text{ откуда } x_0 = 3 \text{ м.}$$

Используем другой способ. Разделив правую ординату на эюре поперечных сил на участке на интенсивность распределенной нагрузки, получим тот же результат:

$$x_0 = \frac{18}{6} = 3 \text{ м.}$$

Участок BD

В любом сечении сумма нижних сил, перпендикулярных участку, равна нулю.

$$Q_{BD} = \sum P_{гор}^{ниж} = 0.$$

Эюры изгибающих моментов M

Участок AK

Так как на участке отсутствует распределенная поперечная нагрузка $q = 0$, эюра M представляет собой наклонную линию. Достаточно провести два сечения, найти и отложить на эюре M значения и соединить найденные точки прямой линией. Изгибающий момент в сечении A лучше искать, суммируя «нижние» моменты. Обе реакции проходят через точку A . Плечи сил H_A и R_A будут нулевые.

$$M_A = \sum M_{ниж} = 0.$$

Изгибающий момент в сечении K найдем, суммируя моменты нижних сил, получаем растяжение правых волокон:

$$M_K = \sum M_{\text{ниж}} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Откладываем на эпюре M в точке K вправо 24 кН·м и соединяем прямой с нулем в точке A .
Участок KC

На участке также отсутствует поперечная нагрузка q . Достаточно определить значения изгибающего момента в двух сечениях. В сечении K изгибающий момент был найден ранее ($M_K = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}$). Проведем сечение на бесконечно малом расстоянии ниже узла C и найдем в нем изгибающий момент, суммируя нижние моменты.

$$M_C = \sum M_{\text{ниж}} = 12 \cdot 2 \text{ (л.в.)} - 12 \cdot 4 \text{ (п.в.)} = -24 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Знак «—» используется здесь только для того, чтобы провести вычисления. На эпюре моментов он не ставится.

На данном участке получена прямая, параллельная оси стержня. Растянуты правые волокна. Поэтому откладываем два значения справа и соединяем прямой.

Участок CD

Так как на участке приложена равномерно-распределенная нагрузка q , то эпюра M будет представлять собой квадратную параболу. Сначала проведем сечение на бесконечно малом расстоянии правее узла C . Суммируем моменты сил, которые находятся слева от сечения.

$$M_C = \sum M_{\text{лев}} = 6 \cdot 0 + 12 \cdot 4 \text{ (н.в.)} - 12 \cdot 2 \text{ (в.в.)} = 24 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Напомним, что сокращения (в.в.) и (н.в.) обозначают растяжение нижних и верхних волокон, соответственно, а (п.в.) и (л.в.) обозначают растяжение правых или левых волокон.

В сечении, где $Q = 0$, найдем максимальный изгибающий момент как сумму моментов правых сил.

$$M_{\text{max}} = \sum M_{\text{прав}} = 18 \cdot 3 \text{ (н.в.)} - 6 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \text{ (в.в.)} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Проверим этот результат другим способом, сложив нулевой момент на правом конце участка с площадью прямоугольного треугольника.

$$M_{\text{max}} = 0 + \frac{18 \cdot 3}{2} = 27,0 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Можно уточнить эпюру способом подвешивания параболы. Найдем изгибающий момент в середине участка. Соединив концы эпюры изгибающих моментов пунктирной линией, найдем длину средней линии треугольника $24/2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и, прибавив к ней стрелку параболы

$$ql^2/8 = 6 \cdot 4^2/8 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

получаем в сумме $24 \text{ кН}\cdot\text{м}$. В данном примере поиск четвертой точки на параболе является излишним и приведен для напоминания о такой возможности в тех случаях, когда парабола не имеет экстремума.

И, наконец, в сечении, расположенном левее узла D , найдем сумму моментов правых сил:

$$M_D = \sum M_{\text{прав}} = 18 \cdot 0 = 0.$$

Откладываем значения вниз, со стороны растянутого волокна и соединяем три точки кривой линией с горизонтальной касательной в сечении с максимальных моментов. Получили квадратную параболу, обращенную выпуклостью вниз (по стрелкам параболы).

Участок BD

В любом сечении сумма моментов нижних сил равна нулю, так как единственная сила R_B имеет нулевое плечо.

Для проверки эпюр можно рассмотреть выполнение условий равновесия узла C рамы (рис. 5.9). Приложим к двум стержням этого узла внутренние усилия, взятые с эпюр, приведенных на рис. 5.8, и составим уравнения равновесия для данного узла:

$$\sum Y_{\text{узн}} = 0; 6 - 6 = 0;$$

$$\sum X_{\text{узн}} = 0;$$

$$\sum M_{\text{узн}} = 0; 24 - 24 = 0.$$

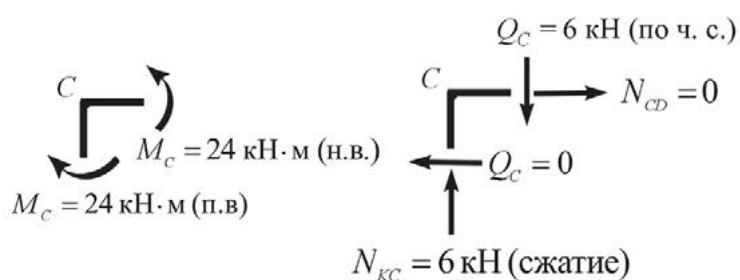


Рис. 5.9. Равновесие узла C

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

6.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

6.1.1. Формула Мора

Определение перемещений от действия нагрузок в плоских стержневых системах, преимущественно работающих на изгиб (балках и рамах), связано с применением формулы Мора, которая может быть записана следующим образом:

$$\Delta_K = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_P \bar{M}}{(EJ)_i} dx,$$

где Δ_K — обобщенное перемещение (линейное перемещение или угол поворота оси стержня) точки K ; $M_P = M_P(x)$ — грузовая эпюра изгибающих моментов, построенная от действия внешних нагрузок; $\bar{M} = \bar{M}(x)$ — единичная эпюра изгибающих моментов, построенная от действия единичной силы или единичного момента, $(EJ)_i$ — жесткость при изгибе на i -м участке. Знак суммы означает, что вычисление интегралов производится отдельно на каждом i -том участке, общее число которых равно n . Жесткости EJ берутся постоянными на каждом участке. В дальнейшем мы будем записывать формулу более просто:

$$\Delta_K = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}}{EJ} dx.$$

Отметим, что полная версия интеграла Мора также включает в себя составляющие, зависящие от продольной и поперечной сил. При расчете рам и балок влияние этих составляющих на перемещения невелико, и ими обычно пренебрегают.

Для вычисления линейного перемещения прикладываем в точке безразмерную единичную силу $\bar{P} = 1$. Для вычисления угла поворота φ прикладываем в точке единичный момент $\bar{M} = 1$. Оба единичных фактора являются безразмерными.

Значения интегралов Мора на каждом участке рамы можно вычислить по правилу А.К. Верещагина. В соответствии с этим правилом *интеграл от произведения грузовой эпюры и единичной эпюры равен площади грузовой эпюры, умноженной на ординату единичной эпюры, расположенную под центром тяжести грузовой эпюры.*

$$\int_0^l M_P \bar{M} dx = \omega_P y_C.$$

Если обе эпюры линейные, в формуле можно брать площадь любой из двух эпюр (грузовой или единичной).

На рис. 6.1 в верхней части изображена грузовая эпюра, представляющая собой криволинейную трапецию, а в нижней части — единичная линейная эпюра, представленная трапецией.

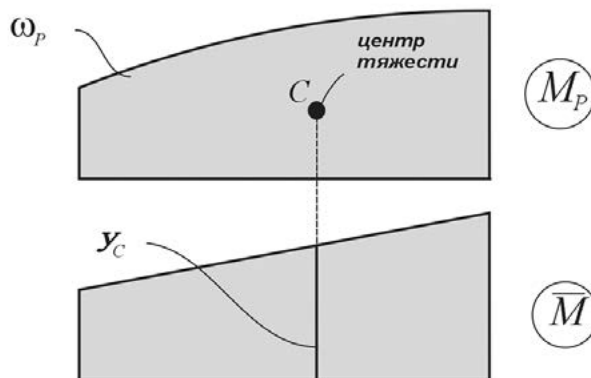


Рис. 6.1. К правилу Верещагина

Конечно, положение центра тяжести криволинейной трапеции определить достаточно сложно. Поэтому, как правило, сложную фигуру разбивают на несколько более простых, площади и центры тяжести которых легко определить.

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина часто называют «перемножением» эпюр. Конечно, ни о каком перемножении геометрических фигур речи быть не может. Это — устоявшееся выражение, которое часто используют проектировщики. В дальнейшем слово «перемножение» мы будем использовать без кавычек. Рассмотрим несколько примеров перемножения простых эпюр (рис. 6.2).

При перемножении эпюр используют следующее правило знаков: если эпюра, площадь которой определяется, находится с одной стороны от базисной линии, а отсекаемая на другой (линейной) эпюре ордината находится с этой же стороны, то результат берут со знаком «плюс». На рис. 6.2, б результат вычислений будет с минусом, так как верхний треугольник находится ниже базисной линии, а ордината, отсекаемая на нижнем треугольнике, расположена сверху от базовой линии.

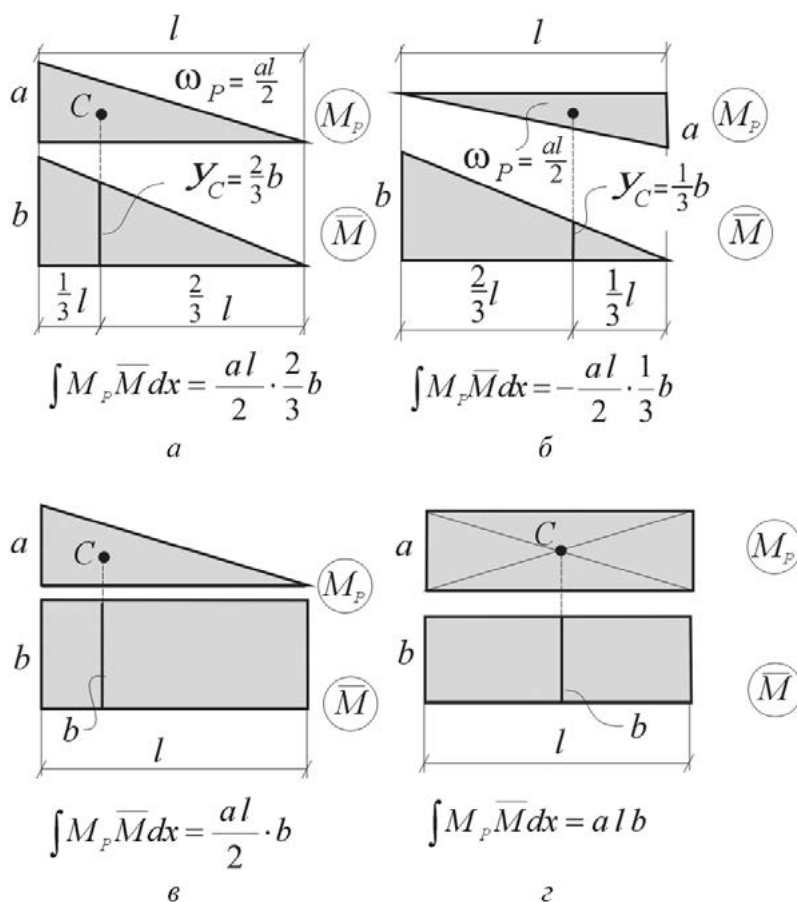


Рис. 6.2. Примеры перемножения эпюр

Для треугольных эпюр на рис. 6.2, а ординату, отсекаемую на нижней эпюре, можно найти из пропорции:

$$\frac{b}{y_c} = \frac{l}{\frac{2}{3}l}.$$

Отсюда следует значение $y_c = (2/3)b$. На рис. 6.2, б отсекаемая ордината равна $(1/3)b$. Чтобы каждый раз не составлять пропорции, результаты определения отсекаемой ординаты в случае перемножения треугольников следует запомнить. Если треугольники расположены острыми углами с одной стороны, то надо брать множитель $2/3$, а если их углы находятся по разные стороны, то берут $1/3$. Очень просто перемножить любую фигуру на прямоугольник (рис. 6.2, в),

так как на прямоугольнике отсекается его высота, независимо от расположения центра тяжести верхней фигуры. И, самое простое, это перемножить друг на друга два прямоугольника (рис. 6.2, з), так как произведение al — площадь верхнего прямоугольника, а b — ордината, отсекаемая на нижнем.

Рассмотрим, как можно перемножить две трапеции (рис. 6.3).

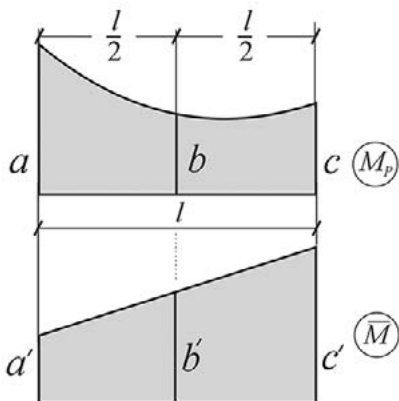


Рис. 6.3. К перемножению трапеций

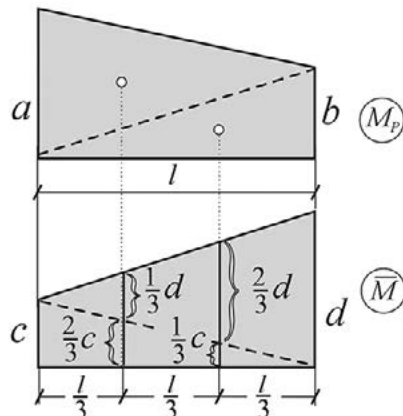


Рис. 6.4. К перемножению криволинейной трапеции на прямолинейную

Разбивая пунктирными линиями каждую трапецию на два треугольника, используя правило Верещагина, можно записать:

$$\int_0^l M_P \bar{M} dx = \frac{al}{2} \left(\frac{1}{3} d + \frac{2}{3} c \right) + \frac{bl}{2} \left(\frac{1}{3} c + \frac{2}{3} d \right).$$

Упрощая выражение и вынося за скобки $l/6$, получим формулу перемножения трапеций:

$$\int_0^l M_P \bar{M} dx = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

Ее легко запомнить. В скобках перемножаются дважды левые ординаты, дважды правые ординаты, а затем идет перемножение ординат двух трапеций как бы «крест на крест». Эту формулу можно применять и для перемножения трапеции на треугольник и даже для перемножения двух треугольников, полагая, что треугольник — это трапеция, у которой одна из сторон равна нулю.

Полезной является формула Симпсона, приведенная ниже, которая применяется для перемножения криволинейной трапеции на прямолинейную (рис. 6.4).

$$\int_0^l M_P \bar{M} dx = \frac{l}{6} (aa' + 4bb' + cc').$$

Она позволяет перемножить две трапеции (рис. 6.4), одна из которых криволинейная. В скобках перемножаются левые ординаты, четырежды средние ординаты и правые ординаты трапеций.

Правило знаков при перемножении трапеций по этим двум формулам следующее: *если перемножаемые ординаты находятся с одной стороны от базисной линии, то результат будет положительным, если с разных сторон, то отрицательным.*

Также полезно знать, как парабола на участке с равномерно распределенной нагрузкой перемножается на трапецию (рис. 6.5).

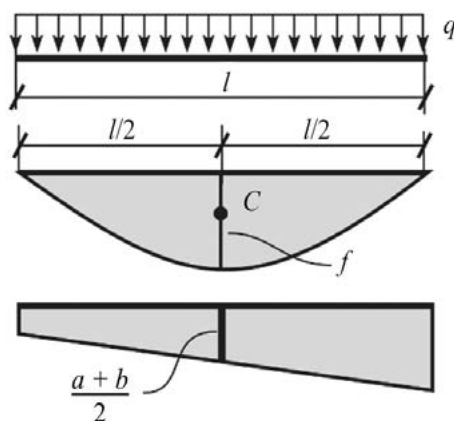


Рис. 6.5. К перемножению параболы на трапецию

Площадь параболы равна:

$$\omega_P = \frac{2}{3} f l = \frac{2}{3} \frac{q l^2}{8} l = \frac{q l^3}{12}.$$

Стрелка параболы:

$$f = \frac{q l^2}{8}.$$

Результат перемножения параболы на трапецию:

$$\int M_P \bar{M} dx = \frac{q l^3}{12} \cdot \frac{a + b}{2}.$$

Очевидно, что в случае перемножения сложных эпюр, площади и центры тяжести которых определить затруднительно, их представляют в виде разложения на более простые эпюры — линейную и параболическую составляющие (рис. 6.6), которые затем перемножаются на единичные эпюры по отдельности.

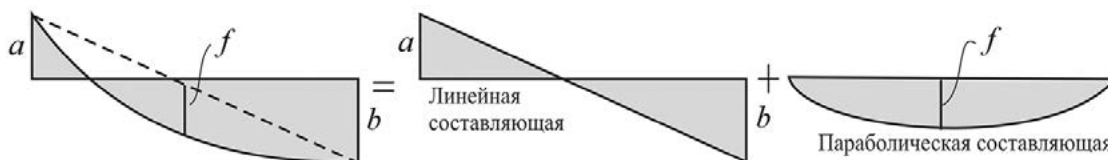


Рис. 6.6. Разложение параболы на две фигуры

6.1.2. Определение перемещений от температуры

Перемещения произвольной точки K стержневой системы от температуры можно найти по формуле

$$\Delta_K^t = \sum \alpha_t \left(\frac{\Delta_t}{h} \right) \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha_t (t_{cp}) \Omega_{\bar{N}},$$

где α_t — температурный коэффициент линейного расширения ($1/^\circ\text{C}$); Δ_t — разница температур на поверхностях стержня (вычисляется по модулю), $\Delta_t = |t_1 - t_2|$ (t_1 — температура крайнего волокна с одной боковой стороны стержня, t_2 — с другой стороны); h — толщина стержня; $\Omega_{\bar{M}}$ — площадь единичной эпюры изгибающих моментов, построенной от единичного воздействия по направлению искомого перемещения; $t_{cp} = (t_1 + t_2)/2$; $\Omega_{\bar{N}}$ — площадь эпюры продольных сил, построенной от единичного воздействия по направлению искомого перемещения.

Знак первого члена формулы будет положительным, если единичная эпюра расположена со стороны более нагретого волокна, а знак второго члена будет положительным, если у средней температуры и у продольной силы на участке будут одинаковые знаки.

6.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6.2.1. Подбор сечения и определение перемещений в балке от нагрузки

Задание

На рис. 6.7 представлена балка, для которой требуется:

- 1) построить эпюры Q и M ;
- 2) подобрать сечение двутавра по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15];
- 3) проверить прочность сечения по нормальным и касательным напряжениям;
- 4) найти прогиб и угол поворота оси балки в точке C и проверить условие жесткости

$$\frac{\Delta_C}{l_{BC}} \leq \frac{1}{250}.$$

Примем все коэффициенты запаса равными единице ($\gamma_f = \gamma_n = \gamma_c = 1$), модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление $R = 240$ МПа, расчетное сопротивление сдвигу $R_s = 139$ МПа.

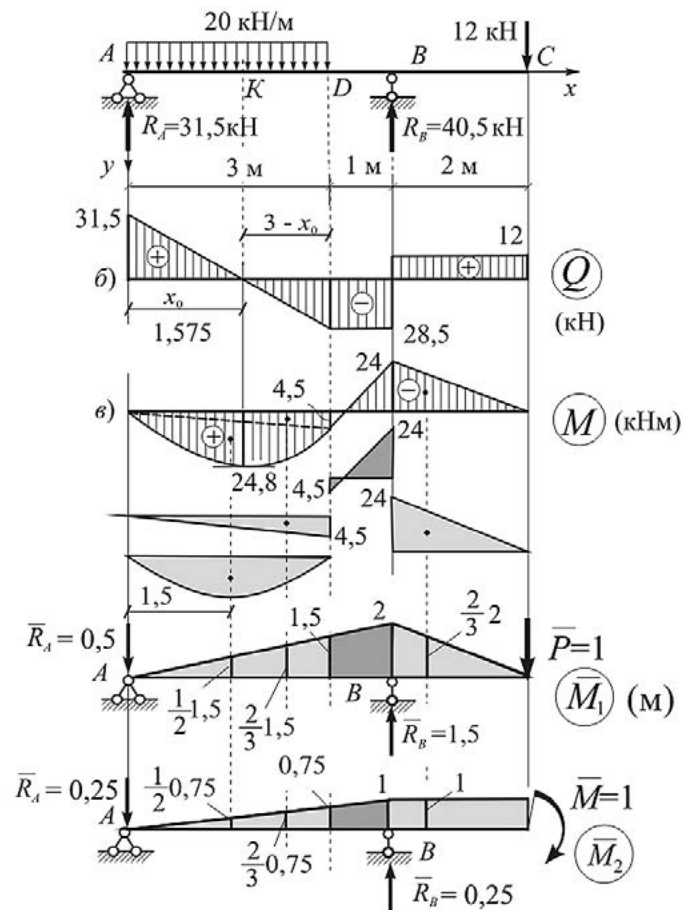


Рис. 6.7. Схема балки и эпюры к зад. 6.2.1

Решение

Определим расчетные нагрузки, учитывая, что коэффициенты надежности по условию задачи приняты равными единице.

$$q_p = 20 \cdot 1 \cdot 1 = 20 \text{ кН/м};$$

$$P_p = 12 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \text{ кН}.$$

Определим опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0; 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - R_B \cdot 4 + 12 \cdot 6 = 0; R_B = 40,5 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; -20 \cdot 3 \cdot 2,5 + R_A \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 0; R_A = 31,5 \text{ кН}.$$

Выполним проверку опорных реакций:

$$\Sigma Y = 0; 31,5 - 20 \cdot 3 - 12 + 40,5 = 0.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 6.7. Приведем их без объяснения.

Определим максимальный расчетный изгибающий момент в опасном сечении K :

$$\frac{31,5}{28,5} = \frac{x_0}{3 - x_0}; x_0 = 1,575 \text{ м};$$

$$M_{\max}^p = 31,5 \cdot 1,575 - 20 \cdot 1,575 \cdot \frac{1,575}{2} = 24,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Можно это сделать по-другому:

$$x_0 = \frac{31,5}{20} = 1,575 \text{ м}; M_{\max}^p = 0 + \frac{31,5 \cdot 1,575}{2} = 24,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Получили тот же результат.

Подберем сечение двутавра:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}^p}{R_{\gamma_c}} = \frac{28,4 \cdot 10^2 \text{ кН}\cdot\text{см}}{24 \text{ кН/см}^2 \cdot 1} = 118,3 \text{ см}^3.$$

Из сортамента выбираем двутавр № 18Б2 по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15].

$$W_z = 146,30 \text{ см}^3; J_z = 1316,96 \text{ см}^4; d = 0,53 \text{ см}; S_z^{1/2} = 83,21 \text{ см}^3.$$

Проверяем прочность двутавра по нормальным и касательным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}^p}{W_z} = \frac{28,4 \cdot 10^2 \text{ кН}\cdot\text{см}}{146,30 \text{ см}^3} \cdot 10 = 194,1 \text{ МПа}.$$

$$194,1 \text{ МПа} \leq R_{\gamma_c} = 240 \cdot 1 = 240 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}^p S_z^{1/2}}{J_z d} = \frac{31,5 \text{ кН} \cdot 83,21 \text{ см}^3}{1316,96 \text{ см}^4 \cdot 0,53 \text{ см}} \cdot 10 = 37,55 \text{ МПа}.$$

$$37,55 \text{ МПа} \leq R_s \gamma_c = 139 \cdot 1 = 139 \text{ МПа}.$$

Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям выполняются.

Определяем линейное и угловое перемещения в точке C . Для этого в точке C задаем единичные силу и момент и строим единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$. Затем перемножаем соответствующие эпюры:

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{4,5 \text{ кНм} \cdot 3 \text{ м}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \text{ м} - \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (-2 \cdot 4,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1,5 - 4,5 \cdot 2) + \frac{24 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \\ &= \frac{9,75 \text{ кН}\cdot\text{м}^3}{EJ} = \frac{9,75 \cdot 10^6 \text{ кН}\cdot\text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 1316,96 \text{ см}^4} = 0,370 \text{ см}; \end{aligned}$$

$$\varphi_C = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{4,5 \text{ кНм} \cdot 3 \text{ м}}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,75 \text{ м} - \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,75 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (-2 \cdot 4,5 \cdot 0,75 + 2 \cdot 24 \cdot 1 + 24 \cdot 0,75 - 4,5 \cdot 1) + \frac{24 \cdot 2}{2} \cdot 1 \right] = \\ = \frac{12,85 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EJ} = \frac{12,85 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 1316,96 \text{ см}^4} = 0,00489 \text{ рад} = 0,00489 \frac{180^\circ}{\pi} = 0,280^\circ = 0^\circ 16'.$$

Проверим условие жесткости:

$$\frac{\Delta_C}{l_{BC}} = \frac{0,370}{250} = \frac{1}{677} \leq \frac{1}{250}.$$

Условие жесткости выполняется.

Отметим, что угол поворота, равный $0^\circ 16'$, оказался меньше одного градуса, что обычно имеет место при расчете прогибов балок строительных конструкций.

6.2.2. Определение перемещений в раме 1 от нагрузки

Задание

Для рамы (рис. 6.8) требуется найти горизонтальное перемещение и угол поворота в точке В. Жесткости EJ следует принять одинаковыми.

Решение

Эпюра изгибающих моментов была построена в предыдущем разделе, она и является грузовой эпюрой M_P .

Горизонтальное перемещение точки В.

Приложим в этой точке единичную силу $\bar{P} = 1$ (рис. 6.8, в) и построим эпюру единичных моментов $\bar{M}_1$. Определим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum \bar{X} = 0; \quad \bar{H}_A - 1 = 0 &\Rightarrow \bar{H}_A = 1; \\ \sum \bar{M}_A = 0; \quad \bar{R}_B \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 &\Rightarrow \bar{R}_B = 1/2; \\ \sum \bar{Y} = 0; \quad \bar{R}_A + \bar{R}_B = 0 &\Rightarrow \bar{R}_A = 1/2. \end{aligned}$$

На рис. 6.8, г приведена эпюра единичных моментов $\bar{M}_1$. Ее размерность — метры, так как единичная сила — безразмерная величина.

На участках AK и KC грузовая эпюра имеет вид треугольника и прямоугольника, а на участке CD она разбита на две простые — треугольник и параболу (рис. 6.8, б). Определим площади ω_i составляющих грузовой эпюры и соответствующие значения y_i , взятые из единичной эпюры $\bar{M}_1$.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} 24 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 2 \text{ м} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad y_1 = \frac{2}{3} 2 = \frac{4}{3} \text{ м}; \\ \omega_2 &= 24 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 2 \text{ м} = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad y_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ м}; \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} 24 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 4 \text{ м} = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad y_3 = 2 + \frac{2}{3} (4-2) = \frac{10}{3} \text{ м}; \\ \omega_4 &= \frac{ql^3}{12} = \frac{6 \text{ кН/м} \cdot 4 \text{ м}^3}{12} = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad y_4 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ м}. \end{aligned}$$

Вычислим горизонтальное перемещение точки В:

$$\Delta_B^r = \frac{1}{EJ} \sum \int_0^l M_P \bar{M} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \left(-24 \frac{4}{3} - 48 \cdot 3 - 48 \frac{10}{3} - 32 \cdot 3 \right) = \frac{-432 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EJ}.$$

Так как жесткости одинаковые, то можно поставить $1/EJ$ перед знаком суммирования.

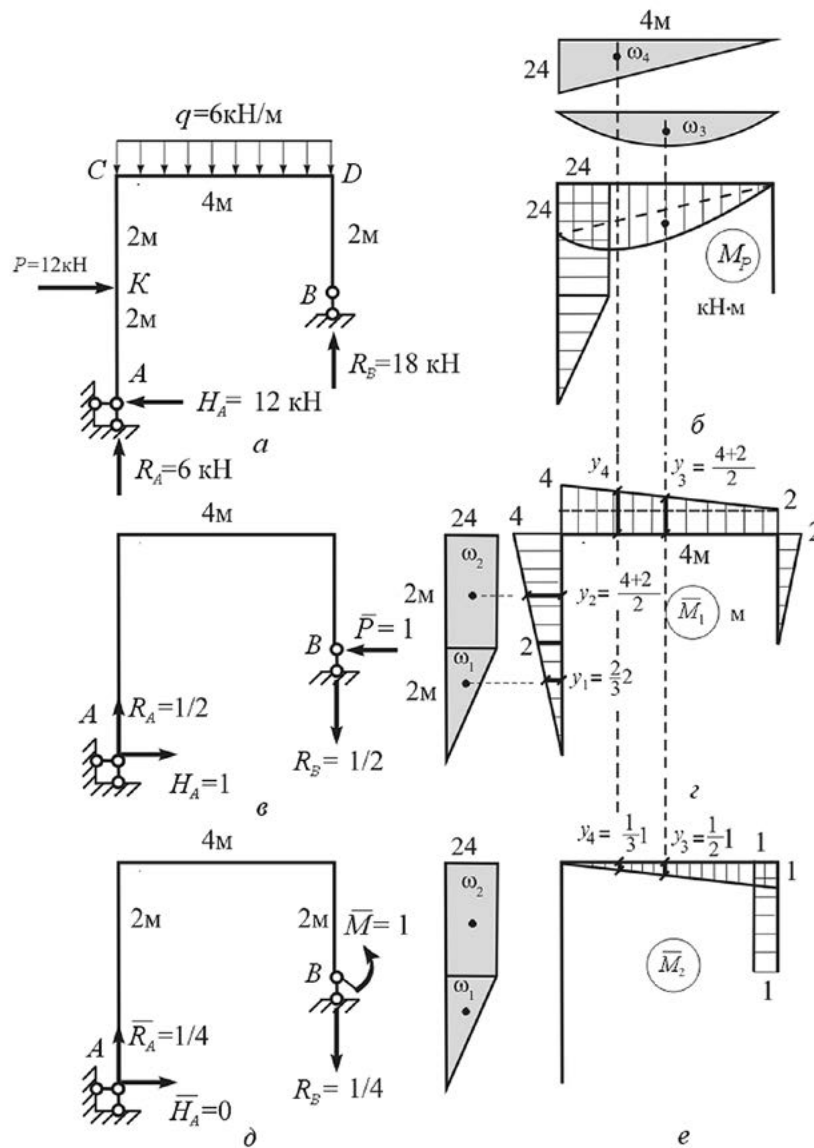


Рис. 6.8. К зад. 6.2.2

Перед всеми членами выражения стоит знак «-», поскольку на всех участках грузовая и единичная эпюры лежат по разные стороны от базисных линий (линий, на которых построены эпюры).

Третье слагаемое в выражении равно:

$$\omega_3 y_3 = -48 \frac{10}{3} = -160 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Этот результат мы для проверки получим с помощью формулы перемножения трапеций:

$$\omega_3 y_3 = \frac{4}{6} (-2 \cdot 4 \cdot 24 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 24 - 0 \cdot 4) = -160 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Результаты получились одинаковыми.

Оформлять расчеты рекомендуется в виде строки, где обозначены площади и ординаты, чтобы преподавателю было легче их проверять. Таким образом, горизонтальное перемещение Δ_B^r равно:

$$\begin{aligned} \Delta_B^r = \frac{1}{EJ} \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} & \left[-\left(\frac{1}{2} 24 \cdot 2\right) \cdot \frac{2}{3} 2 - \left(24 \cdot 2\right) \cdot \frac{4+2}{2} \right] - \\ & - \left(\frac{1}{2} 24 \cdot 4\right) \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \{4-2\}\right) - \left(\frac{6 \cdot 4^3}{12}\right) \cdot \frac{4+2}{2} = \frac{-432 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Пусть рама выполнена из прокатного двутавра 40Б1 по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15], для которого осевой момент инерции $J = 20\,719,71 \text{ см}^4$, модуль упругости для стали $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Тогда горизонтальное перемещение равно:

$$\Delta_B^r = - \frac{432 \cdot 10^6 \text{ кН} \cdot \text{см}^3}{2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 20\,719,71 \text{ см}^4} = -0,993 \text{ см}.$$

Знак «-» перед означает, что перемещение происходит против приложенной влево единичной силы, т.е. вправо.

Угол поворота сечения в точке В

В точке В задаем единичный момент $\bar{M}_1 = 0$ (рис. 6.8, д).

Определим опорные реакции:

$$\sum \bar{X} = 0; \bar{H}_A + 0 = 0 \Rightarrow \bar{H}_A = 0;$$

$$\sum \bar{M}_A = 0; \bar{R}_B \cdot 4 - 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_B = 1/4;$$

$$\sum \bar{Y} = 0; \bar{R}_A + \bar{R}_B = 0 \Rightarrow \bar{R}_A = 1/4.$$

Построим единичную эпюру моментов $\bar{M}_2$ (рис. 6.8, е).

Проведем вычисления:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(\frac{6 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{32 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{EJ} = \frac{32 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^2}{2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 \cdot 20\,719,71 \text{ см}^4} = 0,000735 \text{ рад} = 0,000735 \frac{180^\circ}{\pi} = 0,0422^\circ. \end{aligned}$$

Сечение В повернулось против хода часовой стрелки на $0,0422^\circ$ (т.е. по направлению единичного момента).

6.2.3. Определение перемещений в раме 2 от нагрузки

Задание

Для рамы (рис. 6.9) требуется:

- 1) построить эпюры внутренних усилий N , Q и M ;
- 2) определить три перемещения в точке К, приняв жесткость ригелей $2EJ$, а стоек EJ .

Решение

Определение опорных реакций

Из суммы проекций на ось x получаем значение горизонтальной реакции (ось x направляем вправо, а горизонтальную реакцию влево):

$$\sum X = 0; -H_A + 20 \cdot 3 - 30 = 0; H_A = 30 \text{ кН}.$$

Из суммы моментов относительно точки А можно найти опорную реакцию R_B . Направляем R_B вверх и предполагаем, что положительный момент направлен по ходу часовой стрелки:

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 4 + 20 \cdot 3 \cdot 4,5 - 25 \cdot 2 - 30 \cdot 3 - 40 = 0; R_B = 22,5 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение моментов относительно точки В, предположив, что опорная реакция R_A направлена вверх:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 4 - 25 \cdot 6 + 20 \cdot 3 \cdot 4,5 - 30 \cdot 3 - 40 = 0; R_A = 2,5 \text{ кН}.$$

Выполним проверку правильности вычисления опорных реакций, записывая уравнение проекций всех сил на ось y (направим ее вверх):

$$\sum Y = 0; 2,5 + 22,5 - 25 = 0; 0 = 0.$$

Эпюра продольных сил N

Участок AC

Мысленно проводим произвольное сечение на участке и находим сумму вертикальных внешних сил (параллельных участку), расположенных ниже сечения.

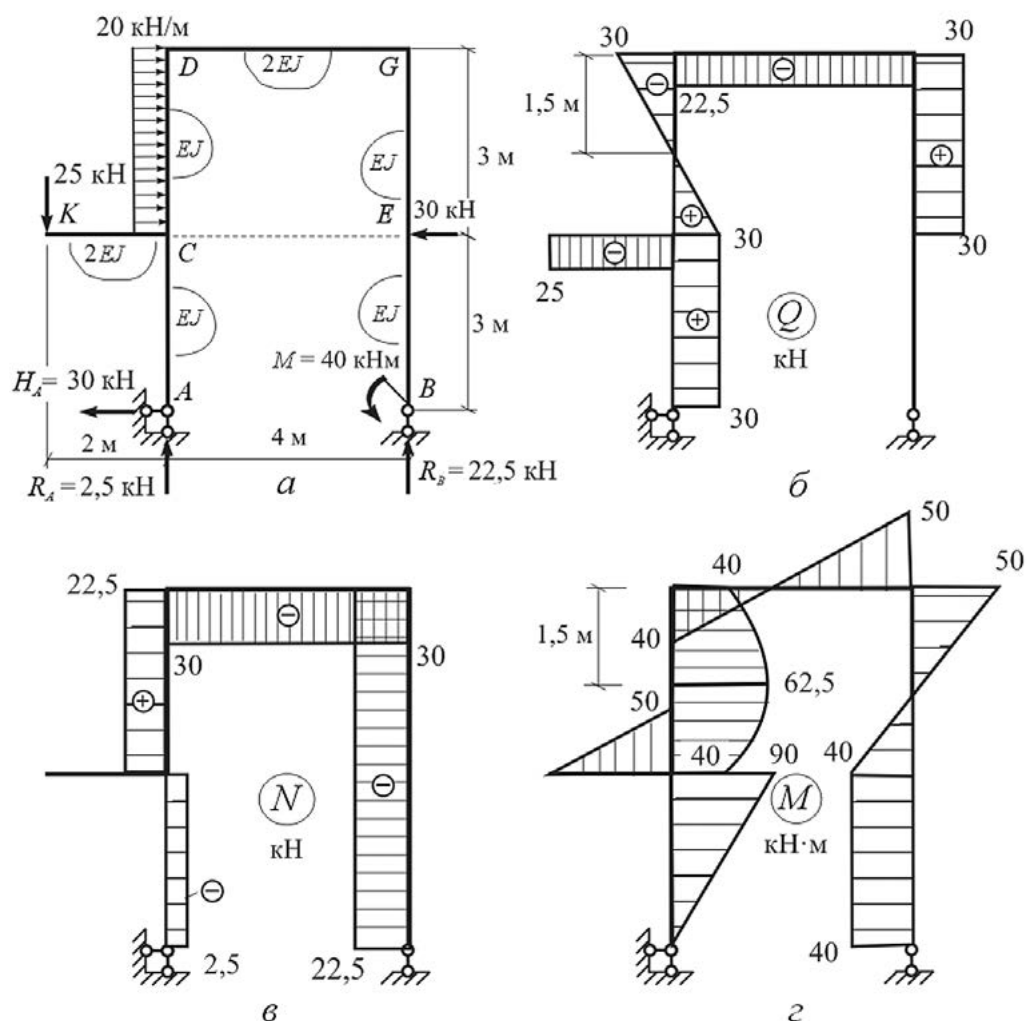


Рис. 6.9. К зад. 6.2.3

Это равносильно переносу вертикальной реакции R_A к месту разреза. Так как R_A сжимает участок, расположенный выше произвольного сечения (направлена к сечению), то продольная сила будет отрицательная (рис. 6.10, а).

$$N_{AC} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = -2,5 \text{ кН (сжатие)}.$$

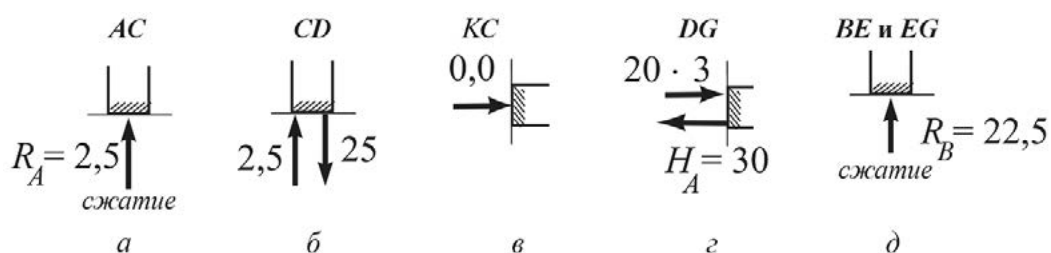


Рис. 6.10. Продольные силы в сечениях

Изображаем прямоугольник со знаком «-». Откладывать значения можно в любую сторону.

Участок CD

Проводим произвольное сечение и находим сумму проекций нижних сил на ось стержня (рис. 6.10, б). Рассуждения аналогичны тем, которые были сделаны для предыдущего участка.

$$N_{CD} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = -2,5 + 25 = +22,5 \text{ кН (растяжение)}.$$

Участок KC

Рассечем участок в любом месте (рис. 6.10, в) и найдем сумму левых сил, параллельных горизонтальному участку стержня. Слева действует вертикальная сила, равная 25 кН. Она в дальнейшем будет учитываться как поперечная сила. Левых сил, сжимающих или растягивающих участок, нет.

$$N_{KC} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{лев}} = 0.$$

Участок DG

Рассекаем стержень в любом месте и суммируем правые горизонтальные силы (рис. 6.10, г). Опорная реакция $H_A = 30$ кН растягивает правый участок, а равнодействующая распределенной нагрузки $20 \cdot 3$ кН его сжимает.

$$N_{DG} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{лев}} = +30 \text{ (раст.)} - 20 \cdot 3 \text{ (сж.)} = -30 \text{ кН (сжатие)}.$$

Для проверки можно просуммировать правые горизонтальные силы (рисунок не приведен), перенося горизонтальную силу 30 кН к месту разреза. Она также вызывает сжатие, так как направлена к сечению левого, оставшегося участка

$$N_{DG} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{прав}} = -30 \text{ кН (сжатие)}.$$

Участки BE и EG

Для обоих участков суммирование нижних сил, параллельных стойке, даст нам сжимающую продольную силу, численно равную опорной реакции $R_B = 22,5$ кН.

$$N_{BE} = N_{EG} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = -22,5 \text{ кН (сжатие)}.$$

Эпюра поперечных сил Q

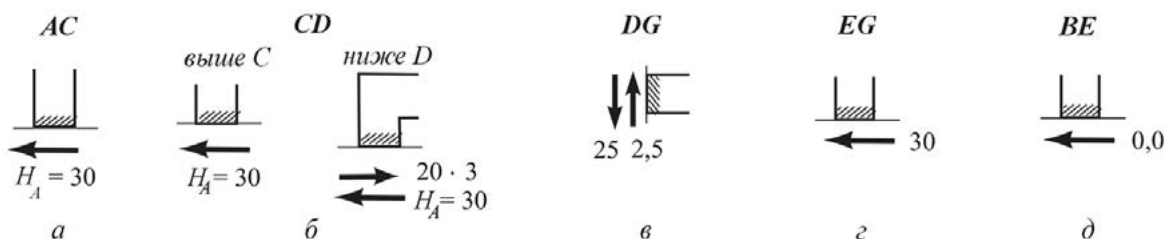


Рис. 6.11. Поперечные силы в сечениях

Участок AC

В отсутствии распределенной нагрузки здесь ожидается постоянная поперечная сила, поэтому рассекаем стержень в любом месте и суммируем нижние силы, перпендикулярные участку (рис. 6.11, а). Так как перенесенная к месту разреза горизонтальная реакция $H_A = 30$ кН, то прилегающий участок стержня стремится повернуть по ходу часовой стрелки, поперечная сила здесь будет положительная.

$$Q_{AC} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{ниж}} = H_A = +30 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Участок CD

На этом участке Q — линейная функция. Найдём Q в двух сечениях (рис. 6.11, б). Рассекая стержень на бесконечно малую $\delta \rightarrow 0$ выше точки C и суммируя нижние силы горизонтального направления, получим положительную поперечную силу, так как она стремится повернуть прилегающий элемент по ходу часовой стрелки:

$$Q_C^{CD} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{ниж}} = H_A = +30 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Рассекаем теперь чуть ниже узла D и просуммируем нижние силы:

$$Q_D^{CD} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{ниж}} = +30 \text{ кН (по часовой стрелке)} - 20 \cdot 3 \text{ (против часовой стрелки)} = -30 \text{ кН (против часовой стрелки)}.$$

На участке поперечная сила переходит через ноль. Очевидно, что в данном случае при одинаковых значениях ординат эпюры Q на краях участка поперечная сила будет равна нулю посередине участка, на расстоянии 1,5 м от точки C , т.е. $x_0 = 1,5$ м.

Участок DG

На данном участке отсутствует распределенная нагрузка. Поэтому выполняем сечение в любом месте стержня и суммируем, например, левые силы, перпендикулярные участку (рис. 6.11, в)

$$Q_{DG} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{лев}} = 2,5 \text{ (по часовой стрелке)} - 25 \text{ (против часовой стрелки)} = -22,5 \text{ кН (против часовой стрелки)}.$$

Для проверки можно просуммировать правые силы:

$$Q_{DG} = \sum P_{\text{верт}}^{\text{прав}} = -R_B \text{ (против часовой стрелки)} = -22,5 \text{ кН}.$$

Результаты получились одинаковые.

Участок EG

В любом сечении сумма нижних сил, перпендикулярных участку, равна приложенной ниже внешней горизонтальной силе, равной 30 кН (рис. 6.11, г).

$$Q_{EG} = \sum P_{\text{гор}}^{\text{ниж}} = +30 \text{ кН (по часовой стрелке)}.$$

Участок BE

Проводя произвольное сечение и суммируя нижние горизонтальные силы, получим, что поперечная сила здесь равна нулю (рис. 6.11, д), так как единственная нижняя сила действует вдоль стержня, и мы ее учли, как продольную силу.

Эпюра изгибающих моментов M

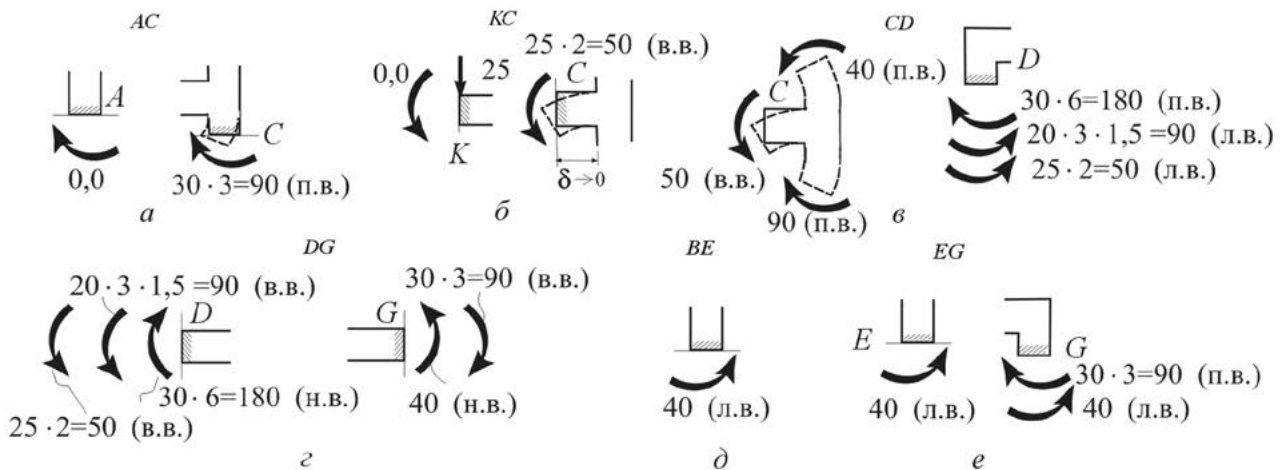


Рис. 6.12. Изгибающие моменты в сечениях

Участок AC

Так как на участке отсутствует распределенная поперечная нагрузка $q = 0$, эпюра M представляет здесь наклонную линию. Достаточно провести два сечения, найти и отложить на эпюре M значения и соединить найденные точки прямой линией. Изгибающий момент в сечении A лучше искать, суммируя «нижние» моменты. Обе реакции проходят через точку A , их плечи относительно точки A равны нулю. Получаем (рис. 6.12, а):

$$M_A = \sum M_{\text{ниж}} = 0.$$

Проведем теперь сечение немного ниже узла C . Суммируя моменты нижних сил, получим растяжение правых волокон:

$$M_C = \sum M_{\text{ниж}} = 30 \cdot 3 = 90 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Откладываем на эпюре ординату 90 кН·м вправо, со стороны растянутого волокна и соединяем с нулем в точке A .

Участок KC

Изгибающий момент в сечении K равен нулю, так как, суммируя моменты левых сил, обнаружим, что плечо силы 25 кН равно нулю:

$$M_K = \sum M_C^{\text{лев}} = 25 \cdot 0 = 0.$$

Выполняя сечение чуть левее узла C (рис. 6.12, б) и суммируя «левые» моменты, получим растяжение верхних волокон:

$$M_C = \sum M_C^{\text{лев}} = 25 \cdot 2 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)}.$$

Откладываем ординату 50 кН·м вверх и соединяем с нулем.

Участок CD

Так как на данном участке действует направленная вправо равномерно распределенная нагрузка, то эпюра изгибающих моментов должна быть представлена параболой с выпуклостью вправо. Найдем изгибающие моменты в трех сечениях.

В узле C сходятся три стержня. В узле с двумя стержнями, чтобы обеспечить равновесие узла, можно было изгибающий момент перенести с ригеля на стойку (и наоборот). Здесь следует поступить следующим образом. Уравновесим узел C (рис. 6.12, в). Очевидно, что ниже узла действует изгибающий момент $30 \cdot 3 = 90$ кН·м, растягивающий правые волокна, а левее узла имеет место момент левых сил $25 \cdot 2 = 50$ кН·м, растягивающий верхние волокна (рис. 6.12, в). Можно догадаться, что, чтобы уравновесить узел, изгибающий момент, действующий выше узла C , должен быть равен $90 - 50 = 40$ кН·м и направлен против хода часовой стрелки, а следовательно, растягивать правые волокна. Тогда равновесие узла будет обеспечено. Итак, выше узла действует момент $M_C = 90 - 50 = 40$ кН·м, направленный против хода часовой стрелки, а значит, он растягивает правые волокна. Откладываем полученную величину вправо от вертикального стержня CD в точке C .

Изгибающий момент в сечении D может быть получен суммированием моментов нижних сил (рис. 6.12, в). Принимая в расчетах, что моменты, растягивающие правые волокна, учитываем с плюсом, получаем:

$$M_C = \sum M_C^{\text{ниж}} = -25 \cdot 2 \text{ (л.в.)} - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \text{ (л.в.)} + 30 \cdot 6 \text{ (п.в.)} = +40 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Конечно, принятое правило знаков моментов является условным, и когда мы строим эпюру изгибающих моментов, откладывая значения со стороны растянутого волокна, знак момента не ставим.

Откладываем на эпюре изгибающих моментов в сечении D вправо $40 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Очевидно, что экстремальное значение изгибающего момента на участке будет ровно в середине участка, так как именно там эпюра поперечных сил переходит через ноль. Найдем момент в середине участка, принимая за положительные моменты, растягивающие левые волокна:

$$M_{\text{сеп}} = \sum M_{\text{сеп}}^{\text{ниж}} = 25 \cdot 2 \text{ (л.в.)} + 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 \text{ (л.в.)} - 30 \cdot 4,5 \text{ (п.в.)} = -62,5 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Полученный момент можно найти еще двумя способами.

Так как это максимальный момент на участке, то, разделив поперечную силу 30 кН на интенсивность нагрузки 20 кН/м , получим сначала $x_0 = 1,5 \text{ м}$, а затем, прибавляя к крайнему моменту $40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ площадь треугольника $(30 \cdot 1,5)/2 = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, получим максимальный момент $62,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. А, учитывая, что в данном частном случае место расположения максимального момента совпадает с серединой участка, можно применить прием подвешивания параболы. Стрелка параболы равна $f = (20 \cdot 32)/8 = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, и выпуклость параболы направлена вправо. Ордината по центру прямоугольника, отделенного от параболы, равна $40 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Прибавляем стрелку параболы, получаем $62,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Откладываем вправо эту величину, затем соединяем найденные три ординаты кривой линией.

Участок DG

Принимая за положительные моменты, растягивающие верхние волокна, найдем сумму моментов левых сил в сечении, расположенном правее узла D (рис 6.12, z).

$$M_D = \sum M_D^{\text{лев}} = 25 \cdot 2 \text{ (в.в.)} + 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \text{ (в.в.)} - 30 \cdot 6 \text{ (н.в.)} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (н.в.)}.$$

Получили растяжение нижних волокон изгибающим моментом величиной $40 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Более быстрый способ состоит в уравнивании узла D . Можно догадаться, что, если на вертикальном стержне момент растягивает правые волокна, т.е. направлен по ходу часовой стрелки, то момент на ригеле должен быть направлен ему навстречу (против хода часовой стрелки) и растягивать нижние волокна. То есть момент $40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ можно просто перенести на ригель на нижние волокна.

Изгибающий момент в сечении G (левее узла) найдем суммированием моментов правых (нижних) сил, условно считая за положительные моменты, растягивающие нижние волокна:

$$M_G = \sum M_G^{\text{прав}} = +40 \text{ (н.в.)} - 30 \cdot 3 \text{ (в.в.)} = -50 \text{ кН}\cdot\text{м (в.в.)}.$$

Это значение можно также найти, определив момент в верхнем сечении участка EG (ниже узла G), как показано на рис. 6.12, e (справа). Получается $50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ на правых волокнах. Затем, уравнивая узел G , можно перенести его на верхние волокна ригеля для сечения левее узла.

Участок BE

В любом сечении участка будет действовать один и тот же изгибающий момент:

$$M_{BE} = \sum M_{BE}^{\text{ниж}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (л.в.)}.$$

На данном участке имеем прямую, параллельную оси стержня. Растянуты правые волокна.

Участок EG

$$M_E = \sum M_E^{\text{ниж}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (л.в.)}.$$

$$M_G = \sum M_G^{\text{ниж}} = 40 \text{ (л.в.)} - 30 \cdot 3 \text{ (п.в.)} = -50 \text{ кН}\cdot\text{м (п.в.)}.$$

Как уже было сказано ранее, можно было перенести момент $50 \text{ кН}\cdot\text{м}$ с правых волокон в узел G на верхние волокна ригеля EG и перейти к построению эпюры на горизонтальном участке.

Откладываем соответствующие ординаты и соединяем точки прямой линией.

Для проверки эпюр можно рассмотреть выполнение условий равновесия узла C рамы (рис. 6.13). Приложим к сечениям внутренние усилия, взятые с эпюр, приведенных на рис. 6.13, и составим уравнения равновесия для данного узла:

$$\sum Y_{\text{узн}} = 0; 2,5 + 22,5 - 25 = 0;$$

$$\sum X_{\text{узн}} = 0; 30 - 30 = 0;$$

$$\sum M_{\text{узн}} = 0; 90 - 40 - 50 = 0.$$

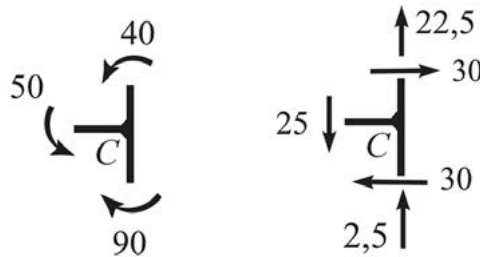


Рис. 6.13. Проверка равновесия узла C

Отметим, что все вектора взяты с эпюр, а не считаются заново. Что касается изгибающих моментов, «хвостик» стрелочки оставляем в эпюре, а ее указатель переносим через стержень, чтобы были растянуты те волокна, которые имеют место на эпюре. Положительные поперечные силы направлены так, чтобы стремиться повернуть узел по ходу часовой стрелки, все их значения взяты с эпюры Q . Положительные вектора продольной силы соответствуют растяжению узла, т.е. направлены от него. Их величины также взяты непосредственно с эпюры N .

Эпюры внутренних усилий представлены на рис. 6.9.

Определение перемещений в точке K

Вертикальное перемещение

На рис. 6.14 представлена эпюра изгибающих моментов и единичная эпюра, необходимая для определения вертикального перемещения в т. K .

Мы не будем рассматривать процесс ее построения, который не отличается от построения грузовой эпюры. Как обычно, сначала находят опорные реакции, а затем строят единичную эпюру.

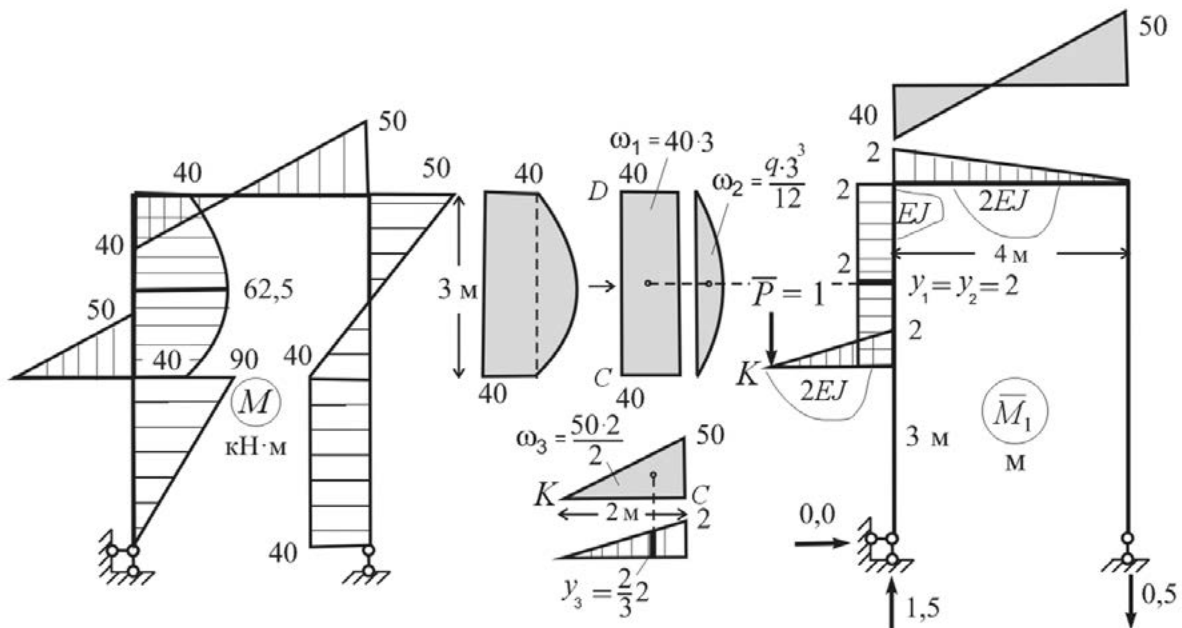


Рис. 6.14. К определению вертикального перемещения

$$\Delta_K^B = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[-(40 \cdot 3) \cdot 2 - \left(\frac{20 \cdot 3^3}{12} \right) \cdot 2 \right] + \\ + \frac{1}{2EJ} \left[\left(\frac{50 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{4}{6} (-2 \cdot 40 \cdot 2 + 50 \cdot 2) \right] = \frac{-316,7}{EJ}.$$

Эпюра моментов на верхней части левой стойки — это сумма прямоугольника и параболы. В первых квадратных скобках площадь прямоугольника грузовой эпюры моментов перемножается на ординату, отсекаемую на прямоугольной единичной эпюре в верхней части левой стойки на уровне центра тяжести грузовой эпюры. Далее мы видим перемножение площади параболы на ординату прямоугольника. Во второй квадратной скобке показано перемножение треугольника грузовой эпюры на консоли на треугольник единичной эпюры на этом участке. В третьей квадратной скобке представлено вычисление по формуле перемножения трапеций на ригеле. Здесь разнознаковая трапеция перемножается на треугольник. Жесткости участков вынесены за скобки.

Полученный отрицательный результат означает линейное перемещение «вверх», т.е. против приложенной к точке K единичной силы.

Горизонтальное перемещение

На рис. 6.15 представлена единичная эпюра, которая построена от горизонтальной единичной силы, приложенной в точке K , а ниже показано, как определить это перемещение.

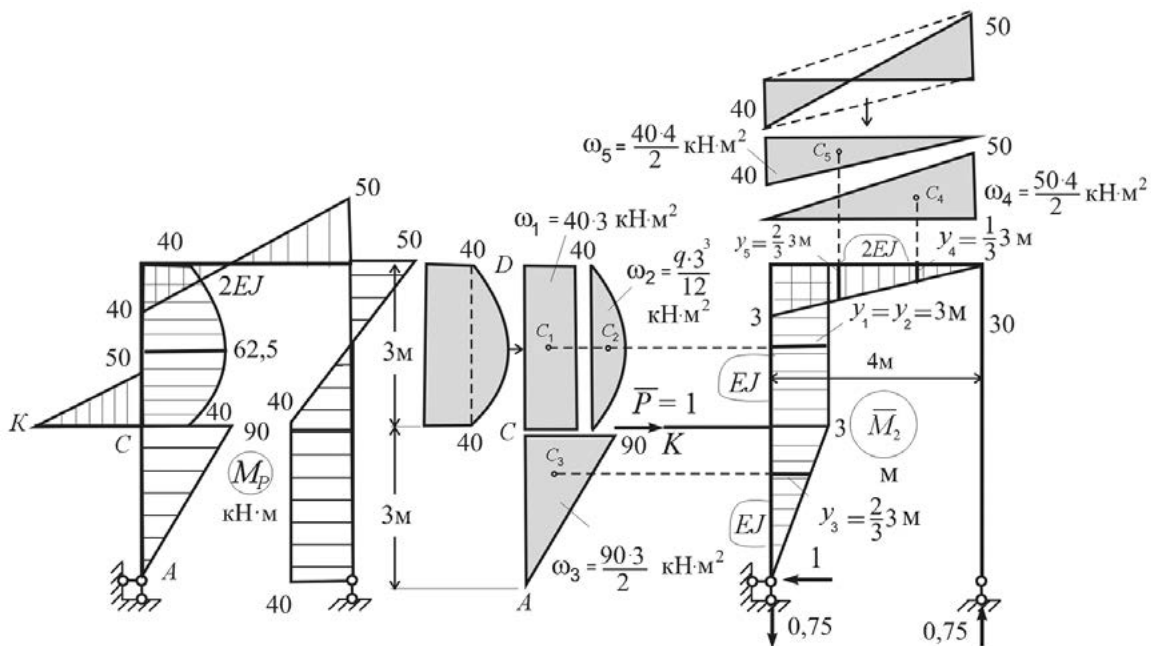


Рис. 6.15. К определению горизонтального перемещения

При нахождении вертикального перемещения для перемножения эпюр на верхнем ригеле длиной 4 м была применена формула перемножения трапеций, а в данном случае показан другой прием. Разнознаковая трапеция представляется, как сумма двух треугольников, которые отдельно перемножаются на треугольную единичную эпюру.

$$\Delta_K^r = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_2}{EJ} dx = + \frac{1}{EJ} \left[(40 \cdot 3) \cdot 3 + \left(\frac{20 \cdot 3^3}{12} \right) \cdot 3 \right] + \\ + \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{90 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] + \frac{1}{2EJ} \left[- \left(\frac{50 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \left(\frac{40 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{795}{EJ}.$$

Полученное значение перемещения со знаком «плюс» означает, что оно происходит «вправо», по направлению приложенной единичной силы.

Угол поворота

На рис. 6.16 представлены грузовая эпюра и единичная эпюра от сосредоточенного единичного момента в т. К. Направим его произвольно, например, против хода часовой стрелки. Здесь мы также применим формулу «перемножения трапеций» при вычислении интеграла Мора на ригеле длиной 4 м. Так как жесткость ригелей в два раза больше жесткости стоек, не забываем результаты расчетов на стойках делить на EJ , а на стойках — на $2EJ$.

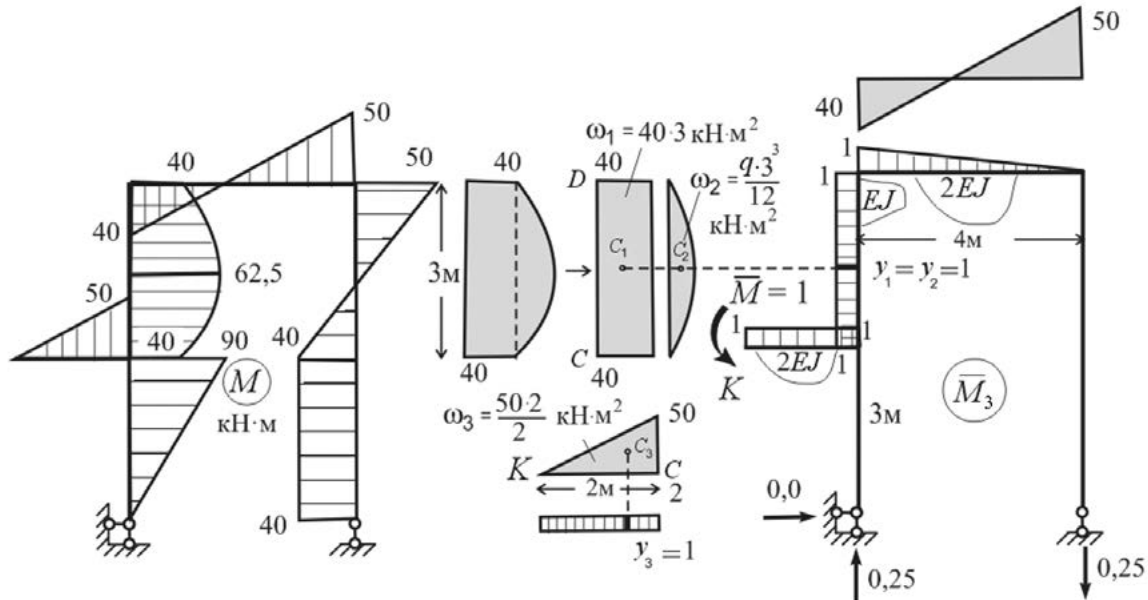


Рис. 6.16. К определению угла поворота

$$\varphi_K = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_3}{EJ} dx = + \frac{1}{EJ} \left[- (40 \cdot 3) \cdot 1 - \left(\frac{20 \cdot 3^3}{12} \right) \cdot 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \left[\left(\frac{50 \cdot 2}{2} \right) \cdot 1 \right] + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{4}{6} (-2 \cdot 40 \cdot 1 + 50 \cdot 1) \right] = \frac{-150}{EJ}.$$

Так как результат получен со знаком «-», поворот оси стержня в сечении К будет происходить против хода часовой стрелки (противоположно заданному направлению единичного момента).

6.2.4. Определение перемещений в раме от температуры

Задание

Для рамы (рис. 6.17, а) найти линейные перемещения точки К при температуре на наружном контуре рамы $t_H = -30^\circ\text{C}$, а на внутреннем контуре $t_B = +20^\circ\text{C}$, приняв температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$, высоту поперечного сечения всех стержней $h = 0,1\text{л}$.

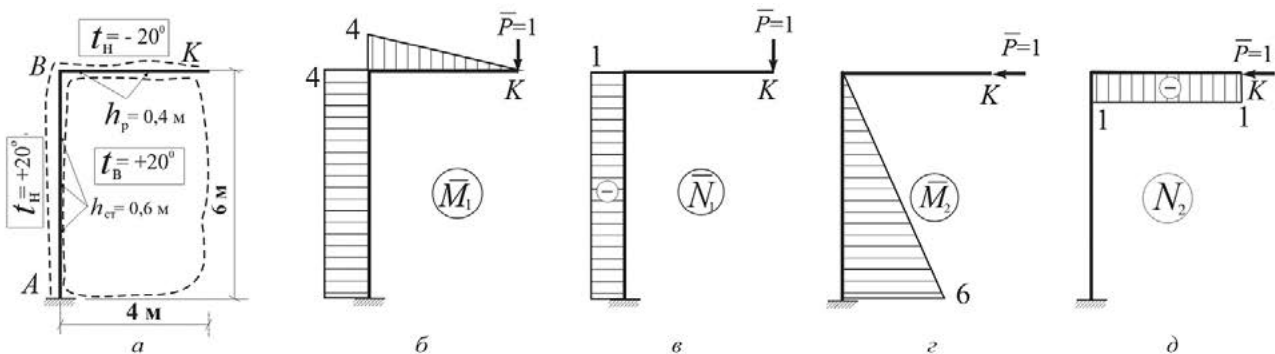


Рис. 6.17. Определение перемещений от температуры

Решение

Высота сечения ригеля равна $h_p = 0,1 \cdot 4 = 0,4$ м, высота сечения стойки равна $h_{ст} = 0,1 \cdot 6 = 0,6$ м.

Для определения вертикального перемещения точки K приложим в ней вертикальную силу и построим единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{N}_1$ (рис. 6.17, б и в).

Найдем вертикальное перемещение точки K :

$$\begin{aligned}\Delta_K^B &= \sum \alpha_t \left(\frac{\Delta_t}{h} \right) \Omega_{\bar{M}_1} + \sum \alpha_t (t_{cp}) \Omega_{\bar{N}_1} = \\ &= -1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C}) \frac{50^\circ\text{C}}{0,4 \text{ м}} \left[\frac{4 \text{ м} \cdot 4 \text{ м}}{2} \right] - 1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C}) \frac{50^\circ\text{C}}{0,6 \text{ м}} [4 \text{ м} \cdot 6 \text{ м}] + \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C}) 5^\circ\text{C} [1 \cdot 6 \text{ м}] = -0,0356 \text{ м} = -3,56 \text{ см}.\end{aligned}$$

Знак «–» означает, что перемещение происходит противоположно направлению единичной силы, т.е. вверх.

При вычислениях было учтено, что размерность единичной эпюры моментов — метры (м), а единичная эпюра продольных сил является безразмерной. Это объясняется тем, что приложенная единичная сила является безразмерной. Первый член формулы содержит площадь треугольника на ригеле высотой и длиной основания по 4 м. Во втором члене площадь единичной эпюры моментов на стойке представлена площадью прямоугольника: $4 \cdot 6$ м. Третий член, зависящий от продольной силы, содержит вычисление площади прямоугольника на стойке: $1 \cdot 6$ м. Знаки «–» двух первых членов объясняются тем, что единичная эпюра моментов построена со стороны менее нагретой внешней поверхности стержней, как ригеля, так и стойки (кривизны различного направления). Знак «+» в третьем члене, зависящем от продольной силы, свидетельствует о том, что и продольная сила, и средняя температура на стойке имеют отрицательный знак (минус на минус дает плюс).

Приложив единичную силу в горизонтальном направлении и построив единичные эпюры (рис. 6.17, з, д), найдем горизонтальное перемещение точки K .

$$\begin{aligned}\Delta_K^B &= \sum \alpha_t \left(\frac{\Delta_t}{h} \right) \Omega_{\bar{M}_2} + \sum \alpha_t (t_{cp}) \Omega_{\bar{N}_2} = \\ &= +1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C}) \frac{50^\circ\text{C}}{0,6 \text{ м}} \left[\frac{6 \text{ м} \cdot 6 \text{ м}}{2} \right] + 1,2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C}) 5^\circ\text{C} [1 \cdot 4 \text{ м}] = +0,0182 \text{ м} = +1,82 \text{ см}.\end{aligned}$$

Первый член формулы содержит площадь треугольника на стойке высотой и длиной основания по 6 м. Знак «+» здесь говорит о том, что единичная эпюра моментов на стойке построена со стороны более нагретого волокна. Второй член, зависящий от продольной силы, содержит вычисление площади прямоугольника $1 \cdot 4$ м на единичной эпюре продольных сил на ригеле. Знак «+» перед этим членом объясняется тем, что эпюра продольных сил и средняя температура ригеля имеют отрицательные знаки.

Перемещение направлено влево, в сторону приложенной единичной силы.

7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

7.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Статически неопределимыми системами называют геометрически неизменяемые системы, в которых невозможно найти неизвестные опорные реакции и внутренние усилия, используя только уравнения статики.

Степень статической неопределимости n равна числу лишних связей, удаление которых преобразует данную систему в статически определимую и геометрически неизменяемую.

Для определения степени статической неопределимости n можно напрямую использовать зависимость $n = 3K - \Pi$, как раз и предназначенную для этой цели. Напомним, что K — это число замкнутых контуров, а Π — число простых шарниров. Можно также найти число степеней свободы по формуле $W = 3Д - 2\Pi - C_0$, а затем взять эту величину с обратным знаком ($n = -W$). Применение этих формул обсуждалось при рассмотрении кинематического анализа стержневых систем.

Для расчета статически неопределимых систем, наряду с использованием уравнений равновесия, записывают дополнительные уравнения, число которых равно числу лишних связей. Они называются каноническими уравнениями метода сил.

Первый этап расчета состоит в построении основной системы метода сил. Это — некоторая статически определимая геометрически неизменяемая система, полученная из статически неопределимой системы путем удаления лишних связей.

Удалив лишние связи, заменяют их неизвестными усилиями X_i , приложенными по направлению отброшенных связей (индекс i изменяется от 1 до n). Если удалить вертикальную связь шарнирно неподвижной опоры, которая препятствует вертикальному перемещению, то по направлению этой отброшенной связи прикладывают вертикальную силу, которая является неизвестной вертикальной опорной реакцией, если удаляют горизонтальную связь, то ее заменяют горизонтальным усилием. Удаление в жесткой заделке условной связи, которая препятствует повороту сечения, приводит к появлению реактивного момента.

Так как удалять можно любые лишние связи, стремясь при этом только к одной цели — получению геометрически неизменяемой системы, то из одной статически неопределимой системы можно получить огромное количество основных систем. На рис. 7.1 представлены различные основные системы для одной и той же три раза статически неопределимой П-образной рамы.

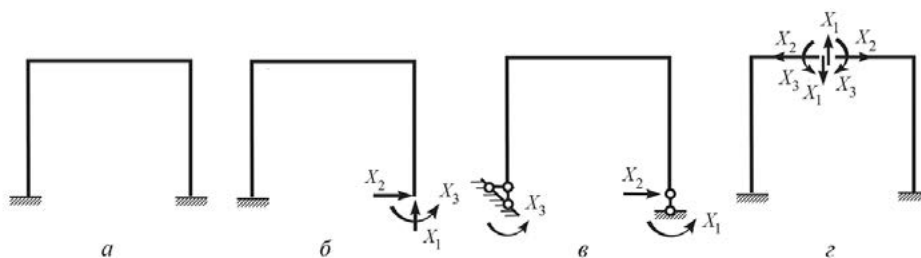


Рис. 7.1. Варианты основных систем статически

Самый простой вариант основной системы получен отбрасыванием правой заделки (рис. 7.1, б). В опоре имеются три неизвестных опорных реакции: две силы и момент. Можно заменить заделку на левой опоре шарнирно неподвижной опорой, а на правой — шарнирно подвижной (рис. 7.1, в). И, наконец, можно выполнить сквозное сечение посередине ригеля (рис. 7.1, г) и в качестве неизвестных иметь три внутренних усилия в сечении. Указанными тремя вариантами основной системы далеко не исчерпывается число основных систем, которое может приближаться к бесконечности. При выборе основной системы нужно стремиться к наиболее рациональному пути решения статически неопределимой задачи и владеть кинематическим анализом. Естественно, что основная система не должна быть ни механизмом, ни мгновенно изменяемой системой.

Далее составляются канонические уравнения метода сил, которые в случае n неизвестных имеют вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} = 0;$$

.....

$$\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \delta_{n3} X_3 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} = 0.$$

Для рамы, рассмотренной на рис. 7.1, получим систему из трех уравнений:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

В канонических уравнениях встречается величина δ_{ij} , называемая единичным перемещением. Оно равно перемещению по направлению неизвестной от единичного усилия $\bar{X}_j = 1$. Например, δ_{23} — это перемещение по направлению неизвестной X_2 от усилия $\bar{X}_3 = 1$. Тогда произведение $\delta_{23} X_3$ — это полное перемещение по направлению X_2 от неизвестной X_3 .

Рассмотрим физический смысл первой строки канонических уравнений для случая основной системы, представленной на рис 7.1, б.

Здесь δ_{11} — это перемещение в основной системе по направлению первой неизвестной X_1 от нее самой, но принятой равной единице, т.е. при $\bar{X}_1 = 1$. Естественно, что, когда мы умножим δ_{11} на истинную, неизвестную пока величину X_1 (член $\delta_{11} X_1$), мы получим перемещение по направлению X_1 от нее самой в основной системе.

Вторая неизвестная X_2 также создает свой вклад в перемещение правой опоры основной системы по направлению X_1 . Здесь δ_{12} — это единичное перемещение по направлению X_1 от $\bar{X}_2 = 1$. При умножении его на истинную величину X_2 получим перемещение по направлению X_1 от X_2 .

Третья неизвестная — реактивный момент X_3 — также создает перемещение правой опоры в основной системе по направлению X_1 . Величина δ_{13} — это единичное перемещение по направлению X_1 от $\bar{X}_3 = 1$. Если умножить δ_{13} на истинную величину X_3 , то получим перемещение по направлению X_1 от X_3 .

Δ_{1P} — это перемещение по направлению X_1 от нагрузок, действующих на основную систему.

Естественно, что в статически неопределимой системе суммарное перемещение по направлению X_1 равно нулю, так как заделка блокирует это перемещение. В этом и состоит смысл первого канонического уравнения.

Вторая строка свидетельствует о том, что суммарное перемещение по направлению X_2 в основной системе равно нулю, а третья — что перемещение по направлению X_3 равно нулю.

Число канонических уравнений равно числу неизвестных метода сил.

Для определения перемещений, которые входят в систему канонических уравнений, применяют метод Мора.

Рассмотрим порядок действий при расчете методом сил:

- 1) устанавливают степень статической неопределимости n ;
- 2) строят основную систему метода сил удалением n лишних связей с заменой каждой из них неизвестным усилием X_i ;
- 3) записывают систему канонических уравнений, число которых равно степени статической неопределимости;
- 4) строят в основной системе n единичных эпюр $\bar{M}_i$ от каждого неизвестного усилия $\bar{X}_i = 1$, т.е. неизвестные усилия приравняются единице;

- 5) строят в основной системе эпюру M_P (грузовую эпюру) от нагрузок;
 6) определяют коэффициенты $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ и грузовые члены Δ_{iP} системы канонических уравнений по формулам

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{M_i \bar{M}_j}{EJ} dx; \quad \Delta_{iP} = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_i}{EJ} dx;$$

- 7) решают систему канонических уравнений, вычисляя значения неизвестных усилий X_i ;
 8) так как статическая неопределимость раскрыта и все ранее неизвестные усилия X_i стали известны, строят окончательные эпюры внутренних усилий N , Q и M в статически неопределимой раме;
 9) выполняют кинематическую проверку, «перемножив» окончательную эпюру моментов на каждую из единичных:

$$\Delta_i = \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_i}{EJ} dx.$$

Последнее равенство отражает тот факт, что перемещения в статически неопределимой системе по направлениям отброшенных связей равны нулю.

Окончательную эпюру изгибающих моментов можно строить и другим способом, по формуле $M = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n$.

7.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.2.1. Расчет один раз статически неопределимой рамы

Задание

Требуется рассчитать статически неопределимую раму (рис. 7.2, а) методом сил. При расчете примем разные жесткости EJ стержней, которые обозначены на рис. 7.2.

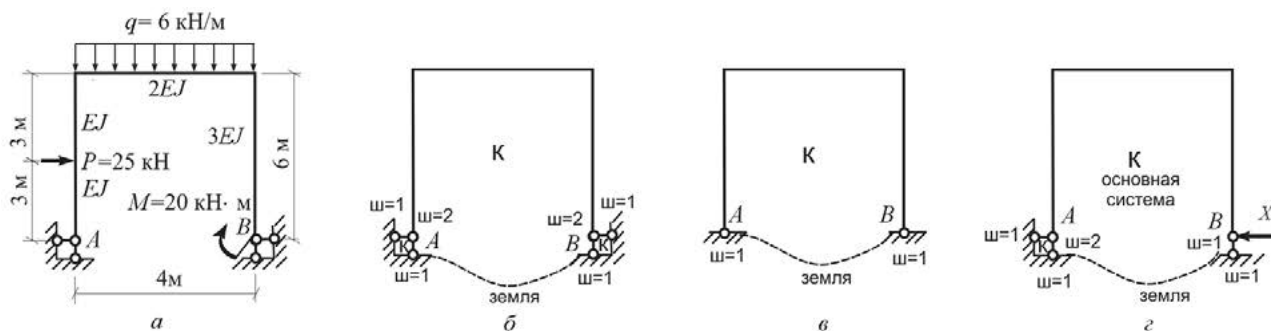


Рис. 7.2. Рама и основная система метода сил

Решение

Можно подсчитать количество опорных реакций в раме, а их 4. Учитывая, что количество уравнений статики равно 3, имеем одну лишнюю неизвестную реакцию. То есть имеется одна лишняя опора с одной лишней реакцией. Степень статической неопределимости $n = 4 - 3 = 1$.

Также можно подсчитать число степеней свободы W по формуле $W = 3D - 2Ш - C_0$, а затем найти степень статической неопределимости n , взяв ее с обратным знаком: $n = -W$.

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1; \quad n = -W = 1.$$

Наконец, применим формулу $n = 3K - Ш$. Из рис. 7.2, б следует, что $n = 3 \cdot 3 - 8 = 1$. Можно шарнирно неподвижные опоры заменить на шарниры (рис. 7.2, в). Тогда расчеты упростятся, так как число замкнутых контуров уменьшится до одного: $n = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

Итак, рама является один раз статически неопределимой, т.е. имеется одна лишняя связь. Теперь необходимо выбрать пригодную для расчетов основную систему метода сил, которая получается, если отбросить лишние связи. Основная система должна быть статически опре-

делимой и геометрически неизменяемой. Можно удалить, например, любую из двух опорных вертикальных связей, а вот горизонтальные связи трогать нельзя. Так, если оставить в опоре B только горизонтальную связь, убрав вертикальную, то система станет мгновенно изменяемой, так как все три связи, соединяющие раму с землей, будут пересекаться в точке A , что является нарушением принципа 2.

Выберем для расчета основную систему, показанную на рис. 7.2, z , полученную удалением правого горизонтального опорного стержня. Система стала статически определимой, так как $n = 3 \cdot 2 - 6 = 0$.

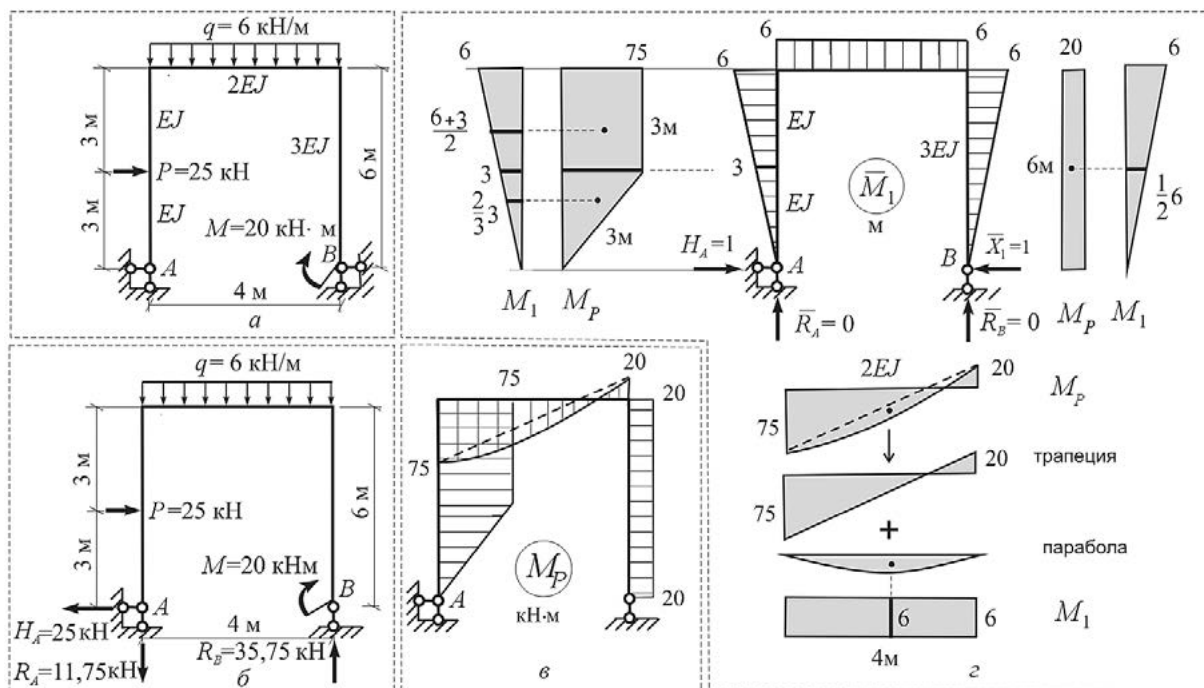


Рис. 7.3. К расчету рамы методом сил

Напомним, что при $n \geq 0$ и $W \leq 0$ требуется выполнить второй этап кинематического анализа. Исследуя основную систему на рис. 7.2, z , замечаем, что рама, являющаяся диском, и земля соединены при помощи трех опорных связей, оси которых не параллельны и не пересекаются в одной точке (принцип 2). Поэтому полученная основная система является статически определимой и геометрически неизменяемой. Основную систему загружаем неизвестной горизонтальной опорной реакцией X_1 . Приравнявая ее единице, строим единичную эпюру $\bar{M}_1$, изображенную на рис. 7.3, z . На рис. 7.3, $в$ приведена грузовая эпюра M_P , построенная в основной системе на действие нагрузки.

Процесс построения эпюр внутренних усилий опускаем, так как он был рассмотрен ранее. Из канонических уравнений метода сил останется одно:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Найдем δ_{11} :

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{6 \cdot 6}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] + \frac{1}{2EI} \left[(6 \cdot 4) \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EI} \left[\left(\frac{6 \cdot 6}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] = \frac{168}{EI}.$$

Найдем Δ_{1P} :

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_1}{EI} dx = & \frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{75 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - (75 \cdot 3) \cdot \left(\frac{6+3}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2EI} \left[- \left(\frac{75-20}{2} \cdot 4 \right) \cdot 6 - \left(\frac{6 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EI} \left[(20 \cdot 6) \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right] = \frac{1543,5}{EI}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что перед каждым «перемножением» соответствующих эпюр на участке находится дробь, содержащая значение жесткости участка в знаменателе. Так, например, перед вычислениями на правой стойке перед квадратной скобкой мы видим дробь $\frac{1}{3EJ}$, а на ригеле — $\frac{1}{2EJ}$. Числовые значения жесткостей можно не раскрывать, если знать их отношение.

После нахождения значений коэффициентов канонического уравнения метода сил записываем его с числами и решаем относительно X_1 :

$$\frac{168}{EJ} X_1 - \frac{1543,5}{EJ} = 0.$$

Жесткости в знаменателе сокращаются, и реактивное усилие в отброшенной связи равно:

$$X_1 = H_B = \frac{1543,5}{168} = 9,19 \text{ кН}.$$

Все остальные опорные реакции легко определяются из уравнений равновесия:

$$\sum X = 0; -H_A + 25 - 9,19 = 0, H_A = 15,81 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; 25 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 20 - R_B \cdot 4 = 0, R_B = 35,75 \text{ кН (вверх)};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 4 + 25 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 20 = 0, R_A = 11,75 \text{ кН (вниз)}.$$

Проверим величины вертикальных опорных реакций:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - 6 \cdot 4 = -11,75 + 35,75 - 24 = 0.$$

На рис. 7.4 представлены окончательные эпюры внутренних усилий, которые приводятся без объяснений.

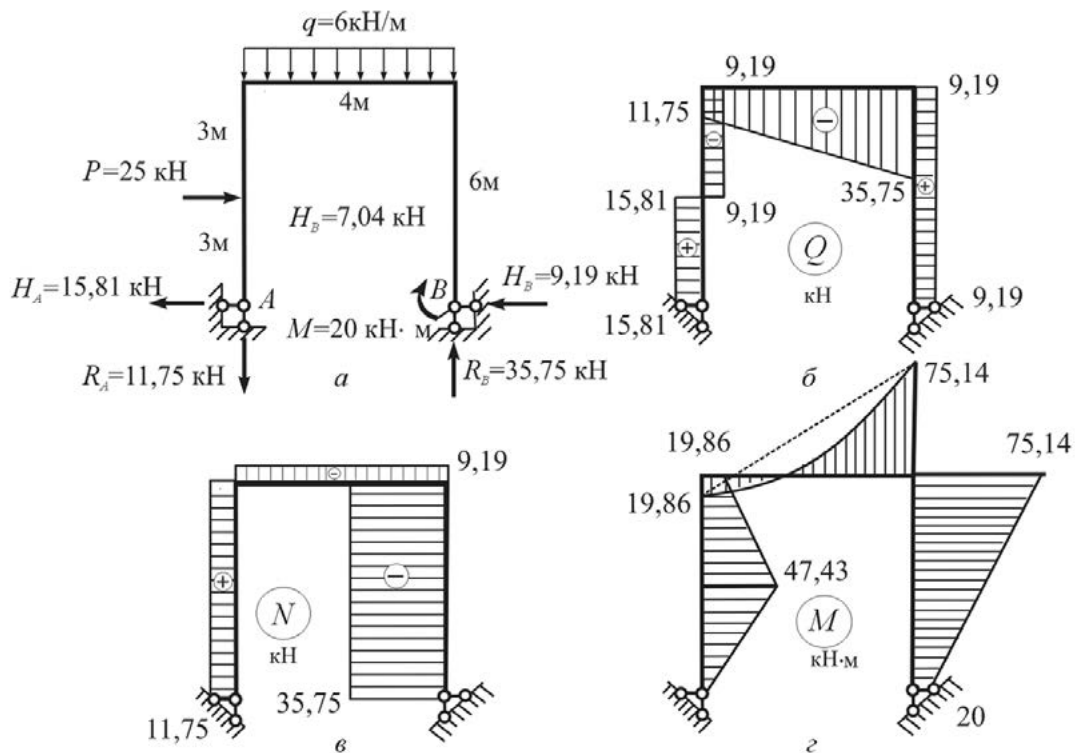


Рис. 7.4. Результаты расчета

Проверим равновесие узлов рамы (рис. 7.5), что является частью статической проверки результатов расчета.

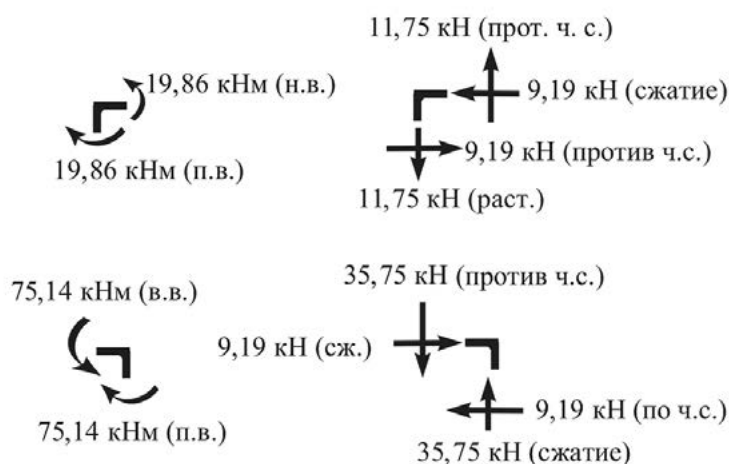


Рис. 7.5. Равновесие узлов рамы

Видно, что уравнения равновесия для всех узлов выполняются.

Окончательную эпюру моментов можно также построить, используя метод суперпозиции, т.е. суммируя эпюру M_P с эпюрой $\bar{M}_1$, умноженной на X_1 : $M = M_P + \bar{M}_1 X_1$ (рис. 7.6).

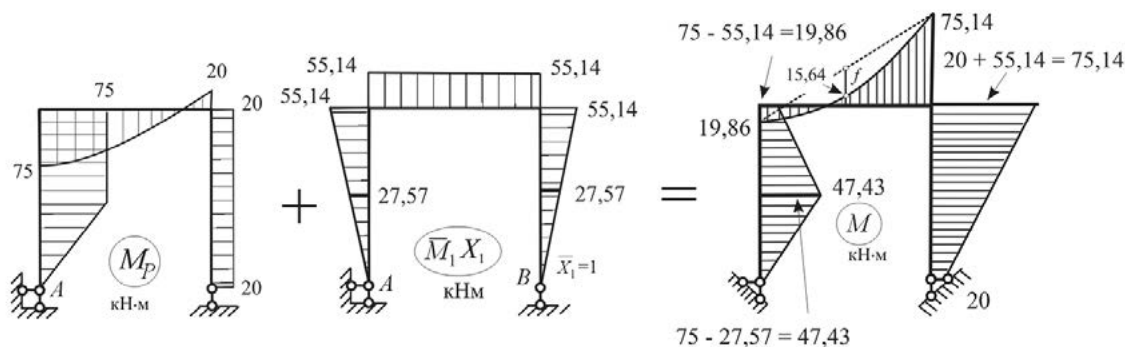


Рис. 7.6. Построение окончательной эпюры сложением эпюр M_P и $\bar{M}_1 X_1$

Можно уточнить третью точку на кривой путем подвешивания параболы. Найдем стрелку параболы:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{6 \cdot 4^2}{8} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вычислим среднюю линию трапеции, которая равна:

$$(75,14 - 19,86)/2 = 27,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, ордината середины участка на кривой будет равна

$$27,64 - 12 = 15,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Возникает вопрос, а как по эпюре изгибающих моментов построить эпюры поперечных и продольных сил, если не находить опорные реакции?

Вспомним, что эпюра поперечных сил является первой производной от эпюры изгибающих моментов, т.е., по-другому, эпюра Q — это эпюра тангенсов наклона эпюры M . На рис. 7.7 показано, как получают эпюры поперечных сил путем дифференцирования эпюр изгибающих моментов. Задача состоит в определении тангенсов углов поворота эпюры изгибаю-

щих моментов. Принимается *правило знаков*, согласно которому, если поворот секущей прямой, параллельной стержню, до совмещения с самой эюрой с наименьшим углом происходит по ходу часовой стрелки, то знак эюры Q будет положительным.

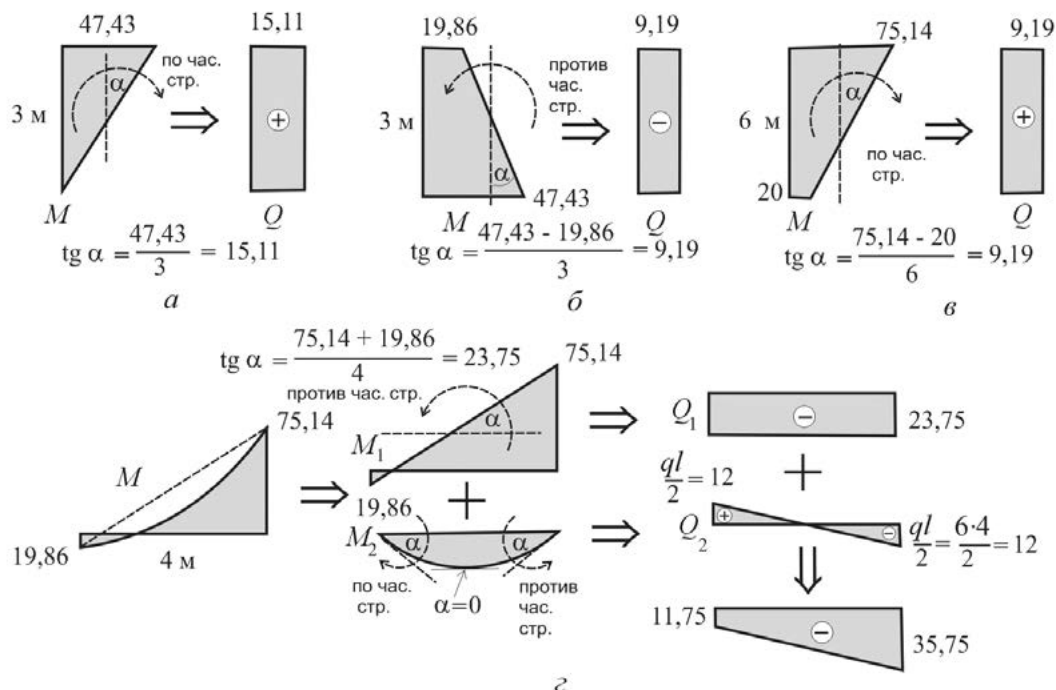


Рис. 7.7. Построение эюры Q дифференцированием эюры M

Верхний ряд (а, б и в) относится к линейным эюрам, а нижний (з) — к параболической эюре моментов на ригеле. Параболическая эюра представляется как сумма линейной эюры и параболы, которая соответствует эюре в балке на двух опорах, загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Линейная эюра моментов даст нам прямоугольную эюру Q с ординатой $-23,75$ кН, а параболическая — разнознаковую косимметричную трапецию, ординаты которой равны $ql/2$, так как полное падение эюры Q на данном участке равно ql . В центре участка угол наклона эюры M равен нулю, поэтому в этом сечении наблюдается нулевая поперечная сила. Геометрическая сумма двух линейных эюр дает нам эюру Q на ригеле. На левом конце ригеля получим $-23,75 + 12 = -11,75$ кН, а на правом конце $-23,75 - 12 = -35,75$ кН.

Теперь у нас есть эюра поперечных сил. Эюру продольных сил строим по эюре поперечных сил, вырезая узлы рамы (рис. 7.8).

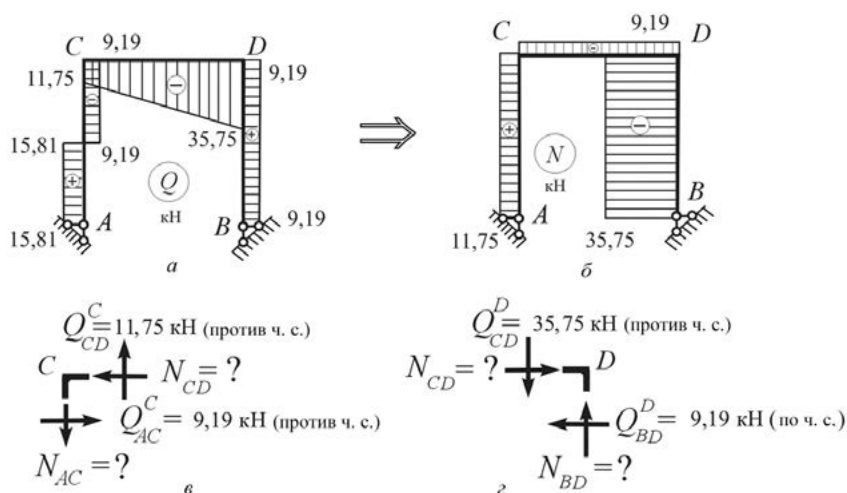


Рис. 7.8. Построение эюры N по эюре Q

Направляя положительные поперечные силы вблизи узлов таким образом, чтобы они стремились повернуть узел по часовой стрелке (рис. 7.8, в, г), уравниваем узлы, чтобы выполнялись уравнения равновесия узловых сил. То есть суммы проекций всех сил в узле на горизонтальную и вертикальную ось должны равняться нулю. Продольную силу, направленную от узла, считаем положительной и наоборот. Так как при построении эпюры N принято не учитывать распределенные продольные нагрузки, то полученное значение продольной силы, действующей вблизи узла, распространяем на длину всего стержня. На рис. 7.8, а, б показана получившаяся эпюра N , построенная по эпюре Q .

Выполним кинематическую проверку. Для удобства расположим окончательную эпюру изгибающих моментов, полученную в статически неопределимой раме, рядом с единичной эпюрой (рис. 7.9).

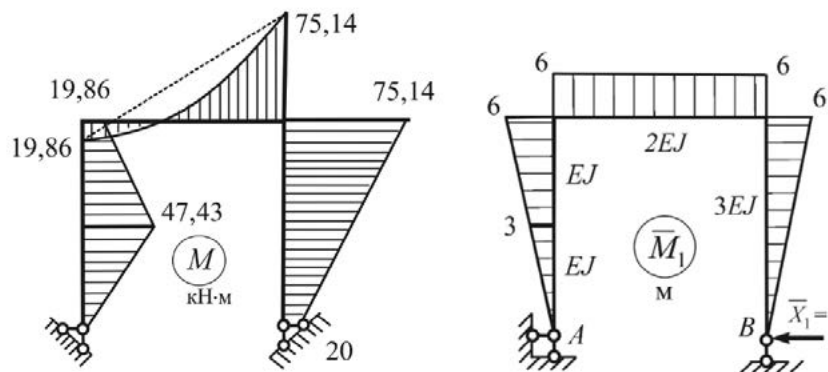


Рис. 7.9. К кинематической проверке

Перемножая две указанные эпюры, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[- \left(\frac{47,43 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{6} (2 \cdot 47,43 \cdot 3 + 2 \cdot 19,86 \cdot 6 + 47,43 \cdot 6 + 19,86 \cdot 3) \right] + \\ &+ \frac{1}{2EJ} \left[\left(\frac{75,14 - 19,86}{2} \cdot 4 \right) \cdot 6 - \left(\frac{6 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EJ} \left[\frac{6}{6} (2 \cdot 75,14 \cdot 6 + 20 \cdot 6) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} (-142,29 - 433,53 + 331,68 - 96 + 340,56) = \frac{672,24 - 671,82}{EJ} = - \frac{0,42}{EJ}. \end{aligned}$$

Для вычисления погрешности расчетов сложим отдельно все положительные и отрицательные числа. Полученный результат разделим на одно из сравниваемых чисел, а модуль отношения двух чисел умножим на 100 %.

$$\Delta\% = \frac{0,42}{671,82} 100\% = 0,0625\% \leq 3\%.$$

Результат «перемножения» эпюр практически равен нулю. Кинематическая проверка выполняется.

7.2.2. Расчет два раза статически неопределимой балки

Задание

Требуется рассчитать статически неопределимую балку (рис. 7.10, а) методом сил.

Решение

Можно подсчитать количество опорных реакций, а их 5. Учитывая, что количество уравнений статики равно 3, имеем две лишние неизвестные опорные реакции. То есть имеются две лишние опоры. Степень статической неопределимости $n = 5 - 3 = 2$.

Применяя формулу $n = 3K - \text{III}$, получим $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Основную систему получим, отбрасывая шарнирно-подвижные опоры балки (рис. 7.10, б).

На рис. 7.10, *г–е* представлены грузовая и единичные эпюры.

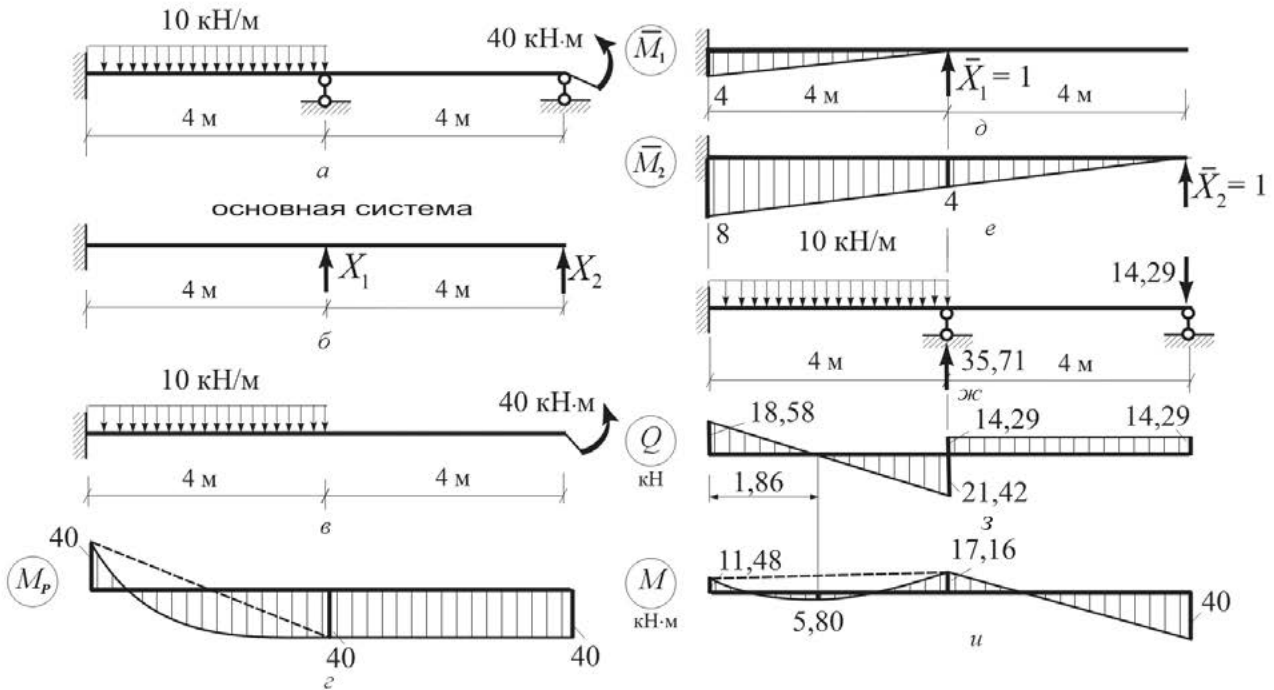


Рис. 7.10. Схема балки с нагрузками и эпюры

Канонические уравнения в случае двух неизвестных запишутся в виде:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Найдем коэффициенты уравнений:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{4 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{21,33}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4) \right] = \frac{53,33}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{8 \cdot 8}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 \right] = \frac{170,67}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (-2 \cdot 40 \cdot 4 + 40 \cdot 4) + \left(\frac{10 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_2}{EJ} dx = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[(40 \cdot 4) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{4}{6} (-2 \cdot 40 \cdot 8 + 2 \cdot 40 \cdot 4 - 40 \cdot 4 + 40 \cdot 8) + \left(\frac{10 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \left(\frac{8+4}{2} \right) \right] = -\frac{533,33}{EJ}. \end{aligned}$$

Запишем канонические уравнения с найденными величинами, сокращая EJ в знаменателе и перенося грузовые члены в правую часть:

$$21,33 X_1 + 53,33 X_2 = 0;$$

$$53,33 X_1 + 170,67 X_2 = 533,33.$$

Решая систему уравнений, получим: $X_1 = 35,71$ кН; $X_2 = -14,29$ кН.

На рис. 7.10, *ж*, *з*, *и* показаны балка с найденными опорными реакциями, а также окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Выполним кинематическую проверку:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{M\bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (-11,48 \cdot 4 \cdot 2 - 17,16 \cdot 4) + \left(\frac{10 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \\ &= \frac{-106,98 + 106,67}{EJ} = -\frac{0,31}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\Delta \% = \frac{0,31}{106,67} 100 \% = 0,283 \% \leq 3 \%;$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum \int_0^l \frac{M\bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4}{6} (-2 \cdot 11,48 \cdot 8 - 2 \cdot 17,16 \cdot 4 - 17,16 \cdot 8 - 11,48 \cdot 4) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{10 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \left(\frac{8+4}{2} \right) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 17,16 \cdot 4 + 40 \cdot 4) \right] = \frac{-336,11 + 335,15}{EJ} = -\frac{0,96}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\Delta \% = \frac{0,96}{335,15} 100 \% = 0,286 \% \leq 3 \%.$$

Кинематическая проверка выполняется.

8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

8.1. Основные определения и формулы

8.1.1. Критическая сила

Формулы, полученные ранее для случая центрального растяжения и сжатия прямого стержня, оказываются не всегда справедливыми. Если рассматривать короткие стержни, то для них справедливы все рассуждения и формулы, применяемые как для растяжения, так и для сжатия. Однако, при центральном сжатии длинного стержня он может резко искривиться при достижении сжимающей силой некоторого предельного значения. Сила, при которой происходит резкое искривление стержня при его центральном сжатии, называется критической силой и обозначается $P_{кр}$. Такое явление также называют продольным изгибом или потерей устойчивости по Эйлеру, так как критическая сила, при которой происходит продольный изгиб, определяется по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}.$$

В формуле Эйлера E — модуль упругости, J — осевой момент инерции, $l_0 = \mu l$ — приведенная длина, а μ — коэффициент приведения длины, зависящий от вида опор (рис. 8.1).

Разделив обе части выражения для критической силы на площадь поперечного сечения, получают вторую форму формулы Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

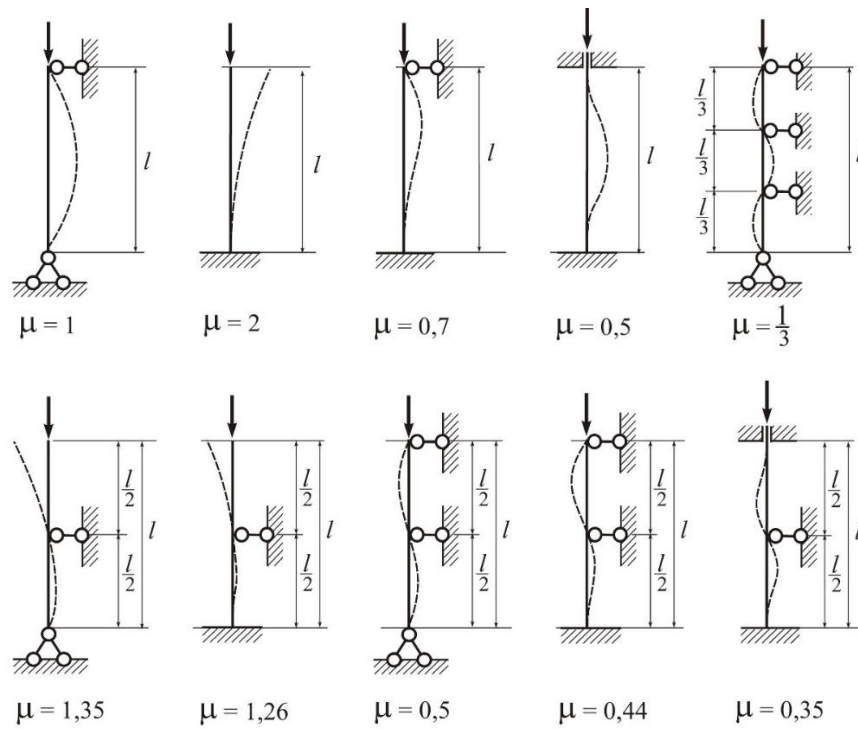


Рис. 8.1. Коэффициенты приведения длины μ

Безразмерная величина, обозначаемая λ , называется гибкостью. Она равна отношению приведенной длины к радиусу инерции:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{\mu l}{i}.$$

При расчете стальных стержней на устойчивость формула Эйлера не всегда справедлива. На практике используют схему решения, которая представлена на рис. 8.2.

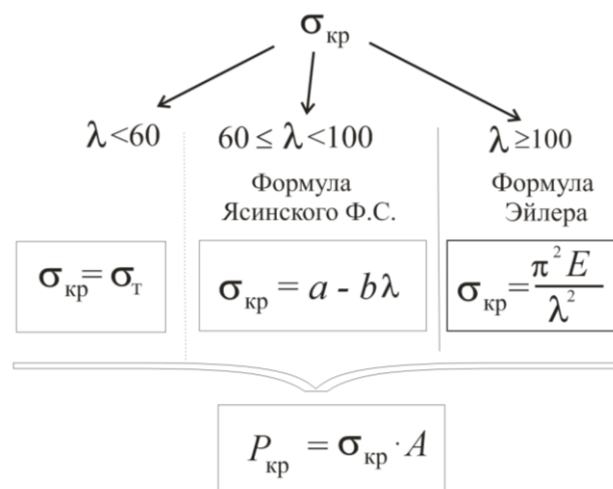


Рис. 8.2. Схема определения критической силы

Для стальных стержней большой гибкости при $\lambda \geq 100$ используют формулу Эйлера. Для стержней средней гибкости при $100 \geq \lambda > 60$ можно рекомендовать применение эмпирической формулы Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

Для сталей обычной прочности в формуле Ф.С. Ясинского принимают: $a = 310 \text{ МПа} = 31 \text{ кН/см}^2$, $b = 1,14 \text{ МПа} = 0,114 \text{ кН/см}^2$.

При расчете коротких стержней при $\lambda < 60$ обычно принимают, что $\sigma_{кр} = \sigma_T$, т.е. считают, что такие стержни не искривляются при центральном сжатии, а критические напряжения при этом равны пределу текучести.

Стержни могут иметь различные опоры в разных плоскостях. Схема нахождения критической силы в этом случае следующая. Надо найти две гибкости в двух плоскостях, а затем выбрать из них максимальную. В плоскости максимальной гибкости, которую и считают наиболее опасной, будет происходить потеря устойчивости. Все расчеты на устойчивость проводят по максимальной гибкости, а формулу для определения критической силы выбирают в зависимости от числового интервала (рис. 8.2).

В соответствии с современными строительными нормами на критические напряжения оказывают влияние не только гибкость и модуль упругости, но и ряд других факторов — вид материала, форма сечения, остаточные напряжения, случайные эксцентриситеты и др. Поэтому представленная схема определения критической силы, как правило, применяется в основном для оценочных расчетов.

8.1.2. Практический метод расчета на устойчивость

Используя строительные нормы по расчету стальных конструкций [7], условие устойчивости запишем в виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R \gamma_c.$$

Напомним, что R — расчетное сопротивление стали по пределу текучести, γ_c — коэффициент условий работы, очевидно, что продольная сила N равна сжимающей силе P , A — площадь поперечного сечения. Величину φ

называют *коэффициентом устойчивости* или *коэффициентом продольного изгиба при центральном сжатии*.

Левая часть неравенства содержит нормальное напряжение сжатия (по модулю) в стержне $\sigma = N/A$, а произведение φR в правой части не может по смыслу быть ничем иным, как критическим напряжением $\sigma_{кр}$.

Тогда $\sigma_{кр}\gamma_c$ – это и есть то предельное напряжение, которое не должно быть превышено. Получается, что коэффициент продольного изгиба φ равен отношению критического напряжения к расчетному сопротивлению:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{R}.$$

В соответствии с [7] коэффициент φ также зависит от формы поперечного сечения и других факторов.

Расчет по строительным нормам начинают с определения гибкости λ , затем находят условную гибкость по формуле

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R}{E}}.$$

где E — модуль упругости, R — расчетное сопротивление стали.

Из условия устойчивости можно попробовать подобрать сечение, решив неравенство

$$A \geq \frac{N}{\varphi R \gamma_c},$$

но при этом окажется, что и левая и правая части этого неравенства зависят от площади сечения A , так как φ зависит от критического напряжения, а оно, в свою очередь, зависит от гибкости λ , которая непосредственно зависит от площади A , так как радиус инерции $i = \sqrt{J/A}$. Получается, что представленное неравенство не позволяет сразу найти площадь поперечного сечения A .

В соответствии с [7] коэффициент φ также зависит от формы поперечного сечения и других факторов.

В табл. П2.2 из прил. 2, взятой из [7, прил. Д], представлена зависимость коэффициента продольного изгиба от приведенной гибкости.

При использовании данной таблицы следует брать ту или иную колонку (a , b или c) в зависимости от формы сечения (табл. П2.1, прил. 2).

Как уже было отмечено, формула не позволяет сразу найти площадь сечения A . Поэтому в расчетах часто применяется метод последовательных приближений. Из табл. П2.2 в прил. 2 видно, что коэффициент φ лежит в пределах от 0 до 1. Поэтому в первом приближении можно задать любую величину φ из этого интервала, например $\varphi_1 = 0,5$. Затем определяется площадь A_1 в первом приближении, гибкости в двух плоскостях и, по максимальной гибкости находится еще раз φ (обозначим его φ'_1). После этого проверяется условие устойчивости и, если левая часть значительно отличается от правой части (более чем на 2–4 %), то сечение увеличивают или уменьшают, добиваясь их примерного равенства.

Процесс нахождения площади сечения A можно формализовать, приняв значение φ_2 второго приближения по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Опять подставляют φ_2 в формулу, находят площадь сечения A_2 во втором приближении, затем гибкости в главных плоскостях, затем по таблице по максимальной гибкости находится φ'_2 , проверяется условие устойчивости, и, если оно не выполняется, продолжают расчеты по рассмотренной схеме.

Иногда приходится находить не критическую, а допускаемую строительными нормами сжимающую силу $P_{\text{доп}}$, которая определяется из того же неравенства, которое решается относительно N .

$$\frac{N}{A} \leq \varphi R \gamma_c \rightarrow N \leq \varphi R A \gamma_c.$$

Очевидно, что наибольшая сжимающая продольная сила N и равна допускаемой силе $P_{\text{доп}}$, то есть $P_{\text{доп}} = \varphi R A \gamma_c$.

В соответствии с [8] для расчета деревянных конструкций коэффициент продольного изгиба φ для древесины следует определять не по таблице, а по формулам:

– при $\lambda \leq 70$: $\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$;

– при $\lambda > 70$: $\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}$.

8.2. Примеры решения задач

8.2.1. Определение критической силы для стального стержня составного сечения

Для стального центрально сжатого стержня, представленного на рис. 8.3, приняв модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 245$ МПа (сталь С245) , требуется определить:

- 1) геометрические характеристики сечения;
- 2) гибкости в главных плоскостях;
- 3) значение критической силы $P_{кр}$.

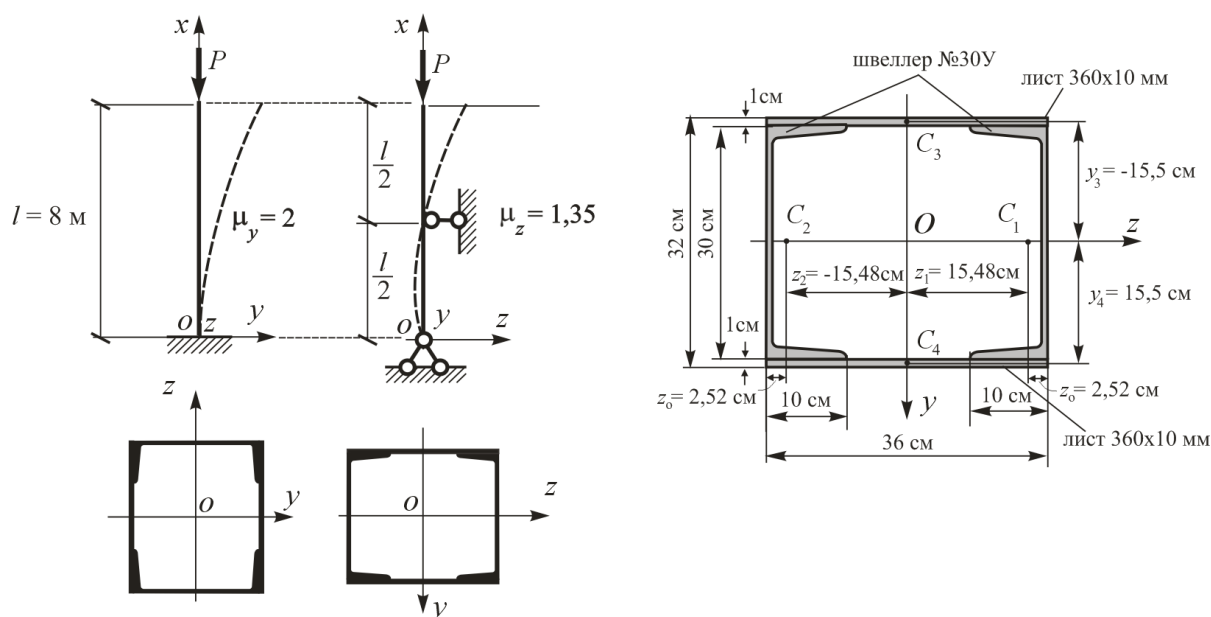


Рис. 8.3. Схема стержня и его поперечное сечение

Решение

Определение геометрических характеристик сечения

Сечение представляет собой два листа 360×10 мм и два швеллера №30У.

Из сортамента выписываем значения собственных геометрических характеристик швеллера № 30У по ГОСТ 8240-97 «Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент» [14]:

– площадь поперечного сечения $A = 40,5$ см²;

– осевые моменты инерции $J_z = 5810 \text{ см}^4$; $J_y = 327 \text{ см}^4$ (надо учитывать, что J_z берется из колонки J_x , так как в сортаменте горизонтальная ось обозначается (X-X);

– размеры поперечного сечения: высота $h = 30 \text{ см}$; ширина полки $b = 10 \text{ см}$; толщина стенки $s = 0,65 \text{ см}$ (мы ее обычно обозначаем d) и средняя толщина полки $t = 1,1 \text{ см}$.

Важное значение имеет параметр $z_0 = 2,52 \text{ см}$ (в сортаменте обозначен x_0), так как он указывает положение центра тяжести швеллера.

Также на рис. 8.3 имеются два листа $360 \times 10 \text{ мм}$ (в поперечном сечении — прямоугольники).

На рис. 8.3 в масштабе изображено сечение стержня.

Обозначим на рис. 8.3 четыре центра тяжести и найдем их координаты относительно главных центральных осей Ozy :

$$\begin{aligned}y_1 = y_2 = 0; y_3 = -15,5 \text{ см}; y_4 = 15,5 \text{ см}; \\z_1 = 18 - 2,52 = 15,48 \text{ см}; z_2 = -15,48 \text{ см}; z_3 = z_4 = 0.\end{aligned}$$

Площади поперечных сечений элементов поперечного сечения будут равны:

$$\begin{aligned}A_1 = A_2 = 40,5 \text{ см}^2; \\A_3 = A_4 = 36 \cdot 1 = 36 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

Найдем суммарную площадь поперечного сечения:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 \cdot 40,5 + 2 \cdot 36 = 153 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции элементов сечения относительно их собственных главных центральных осей равны:

$$\begin{aligned}J_{z_1} = J_{z_2} = 5810 \text{ см}^4; \\J_{z_3} = J_{z_4} = \frac{36 \cdot 1^3}{12} = 3,0 \text{ см}^4; \\J_{y_1} = J_{y_2} = 327 \text{ см}^4; \\J_{y_3} = J_{y_4} = \frac{1 \cdot 36^3}{12} = 3888 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

Найдем осевые моменты инерции:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{z_i} + y_i^2 A_i] = [J_{z_1} + y_1^2 A_1] + [J_{z_2} + y_2^2 A_2] + [J_{z_3} + y_3^2 A_3] +$$

$$+ [J_{z_4} + y_4^2 A_3] = 2[5810 + 0^2 \cdot 40,5] + 2[3,0 + 15,5^2 \cdot 36] = 28924 \text{ см}^4.$$

$$J_y = \sum_{i=1}^{n=4} [J_{y_i} + z_i^2 A_i] = [J_{y_1} + z_1^2 A_1] + [J_{y_2} + z_2^2 A_2] + [J_{y_3} + z_3^2 A_3] +$$

$$+ [J_{y_4} + z_4^2 A_3] = 2[327 + 15,48^2 \cdot 40,5] + 2[3888 + 0^2 \cdot 36] = 27840 \text{ см}^4.$$

Подсчитаем радиусы инерции:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{28\,924}{153}} = 13,8 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{27\,840}{153}} = 13,5 \text{ см}.$$

Определение гибкостей в главных плоскостях

Значения коэффициента приведения длины μ возьмем, используя данные рис. 8.1.

Гибкость в плоскости Оху:

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{2 \cdot 800}{13,8} = 115,9.$$

Гибкость в плоскости Охз:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{1,35 \cdot 800}{13,5} = 80.$$

Возможна потеря устойчивости в плоскости наибольшей гибкости Оху, так как $\lambda_{\max} = \lambda_y = 115,9$.

Определение критической силы

Так как максимальная гибкость оказалась больше 100, расчет проводим по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2}{115,9^2} = 15,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Критическая сила равна:

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 15,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 69,6 \text{ см}^2 = 1972 \text{ кН} \approx 197,2 \text{ тс}.$$

8.2.2. Определение критической и допускаемой силы для стальной стойки из двух двутавров

Определить критическую и допускаемую силу для центрально сжатой стойки (рис. 8.4) длиной 4 м, сечение которой состоит из двух стальных колонных двутавров № 15К1 ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15].

Стойка имеет разные опорные закрепления в главных плоскостях. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление $R = 240$ МПа (сталь С245), коэффициенты надежности принимаются равными $\gamma_c = \gamma_f = \gamma_n = 1$.

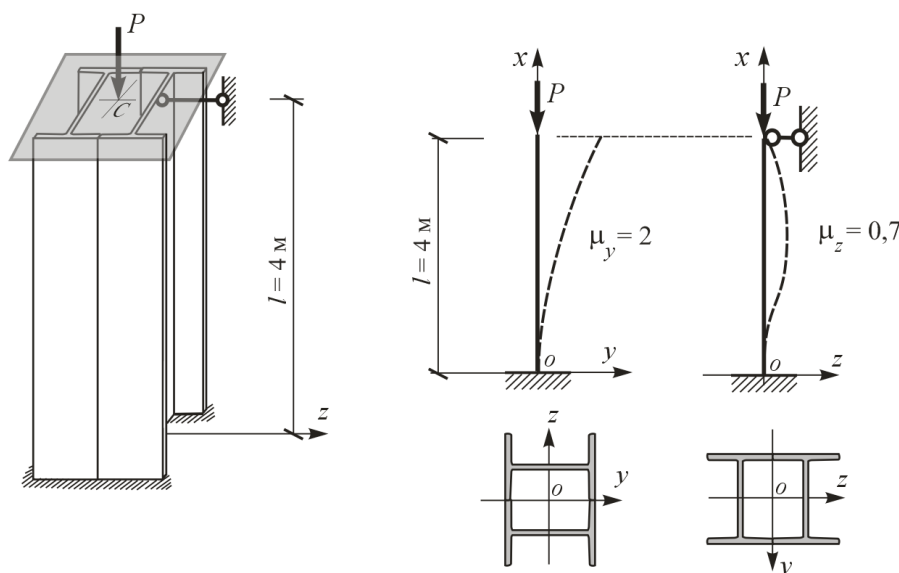


Рис. 8.4. К задаче 8.2.2

Решение

1. Геометрические характеристики.

Для одного двутавра: $h = 14,7$ см; $b = 14,9$ см; $A_{(1)} = 34,17$ см²; $J_z^{(1)} = 1366,76$ см⁴; $J_y^{(1)} = 469,21$ см⁴; $i_z^{(1)} = 63,25$ мм = 6,325 см; $i_y^{(1)} = 37,06$ мм = 3,706 см.

Для двух двутавров:

$$A = 2A_{(1)} = 2 \cdot 34,17 = 68,34 \text{ см}^2.$$

$$i_z = \sqrt{\frac{2J_z^{(1)}}{2A_{(1)}}} = \sqrt{\frac{J_z^{(1)}}{A_{(1)}}} = i_z^{(1)} = 6,325 \text{ см}.$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2 \left[J_y^{(1)} + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \cdot A^{(1)} \right]}{2A^{(1)}}} = \sqrt{(i_y^{(1)})^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2} = \sqrt{3,706^2 + 7,45^2} = 8,321 \text{ см.}$$

2. Гибкости в двух плоскостях.

Для определения коэффициента приведения длины используем прил. 2. В плоскости Oxz стержень жестко закреплен внизу и шарнирно оперт сверху, принимаем для него $\mu_z = 0,7$. В плоскости Oxy стержень имеет жесткую заделку внизу и свободный конец сверху, для него $\mu_y = 2$.

Плоскость Oxz :

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 400}{8,321} = 33,6.$$

Плоскости Oxy :

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{2 \cdot 400}{6,325} = 126,5.$$

Максимальная гибкость равна $\lambda_{\max} = \lambda_y = 126,5$. Возможна потеря устойчивости в плоскости Oxy , так как $\lambda_y > \lambda_z$.

Определяем критическую силу.

Так как гибкость $\lambda_{\max}$ больше 100, для определения критической силы используем формулу Эйлера.

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2}{126,5^2} = 12,94 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

Критическая сила равна:

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 12,94 \cdot 68,34 = 884,3 \text{ кН.}$$

Определяем допускаемую силу.

Допускаемая сила находится по формуле:

$$P_{\text{доп}} = \varphi R A \gamma_c.$$

Сначала найдем условную гибкость:

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\max} \sqrt{\frac{R}{E}} = 126,5 \sqrt{\frac{240}{2,1 \cdot 10^5}} = 4,28.$$

По табл. П2.2 из прил. 2 для типа сечения «b» (оно наилучшим образом подходит к симметричному сечению, представленному в строке «b» табл. П2.1 из прил. 2) находим $\varphi(\bar{\lambda} = 4,2) = 0,422$; $\varphi(\bar{\lambda} = 4,4) = 0,392$. Функция $\varphi(\bar{\lambda})$ — убывающая. Аппроксимируя участок между $\bar{\lambda} = 4,2$ и $\bar{\lambda} = 4,4$ прямой линией (линейная интерполяция), находим $\varphi(\bar{\lambda} = 4,28)$:

$$\begin{aligned}\varphi(4,28) &= \varphi(4,2) - \frac{\varphi(4,2) - \varphi(4,4)}{4,4 - 4,2} (4,28 - 4,2) = \\ &= 0,422 - \frac{0,422 - 0,392}{0,2} 0,08 = 0,410 .\end{aligned}$$

Находим продольную силу N , которая и равна допускаемой силе $P_{\text{доп}}$:

$$P_{\text{доп}} = \varphi R A \gamma_c = 0,410 \cdot 24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 68,38 \text{ см}^2 \cdot 1 = 672,9 \text{ кН}.$$

Если разделить критическую силу на допускаемую, то мы получим общий коэффициент запаса устойчивости. В нашей задаче имеем:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P_{\text{доп}}} = \frac{884,3}{672,9} = 1,32 .$$

В условии задачи было принято, что все коэффициенты надежности равны единице, т.е. $\gamma_c = \gamma_f = \gamma_n = 1$. В реальных расчетах, когда эти коэффициенты не равны единице, величина общего коэффициента запаса устойчивости будет немного больше.

8.2.3. Подбор сечения деревянного стержня квадратного сечения

Деревянная стойка квадратного сечения со стороной a (рис. 8.5) длиной $l = 2$ м шарнирно оперта с двух концов. Условия закрепления в двух главных плоскостях одинаковые. Стержень загружен расчетной сжимающей силой $P = 10$ кН. При расчете следует принять: расчетное сопротивление древесины $R = 15$ МПа $= 1,5$ кН/см², модуль упругости $E = 1 \cdot 10^4$ МПа, коэффициенты $\gamma_c = \gamma_f = \gamma_n = 1$.

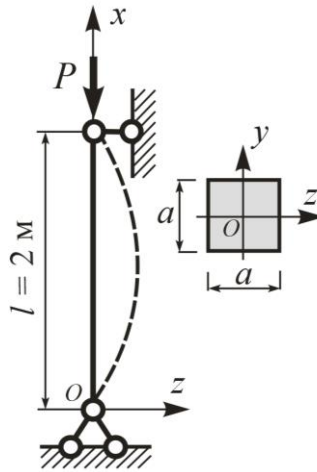


Рис. 8.5. К примеру 8.2.3

Напомним, что в соответствии с [8] коэффициент продольного изгиба φ для древесины следует определять по формулам:

- при гибкости элемента $\lambda \leq 70$: $\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$;
- при гибкости элемента $\lambda > 70$: $\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}$

То есть никаких таблиц не требуется.

Решение

Очевидно, что расчетная продольная сила N равна расчетной сжимающей силе P . Расчет ведем методом последовательных приближений.

Первое приближение

Задаем $\varphi_1 = 0,5$:

$$A_1 \geq \frac{N}{\varphi_1 R} = \frac{10}{0,5 \cdot 1,5} = 13,3 \text{ см}^2;$$

$$a_1 = \sqrt{13,3} = 3,65 \text{ см};$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A_1}} = \sqrt{\frac{a_1^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{12}} = \frac{3,65}{\sqrt{12}} = 1,05 \text{ см}.$$

Гибкости в двух главных плоскостях одинаковы:

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = \frac{1 \cdot 200}{1,05} = 190,5.$$

Так как гибкость $\lambda_1 > 70$, используем вторую формулу:

$$\varphi'_1 = \frac{3000}{\lambda^2} = \frac{3000}{190,5^2} = 0,0827.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\frac{N}{\varphi_1 A_1} = \frac{10}{0,0827 \cdot 13,3} = 9,09 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 90,9 \text{ МПа}; R_{\gamma_c} = 15 \text{ МПа},$$

$90,9 > 15$, условие устойчивости не выполняется.

Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,0827}{2} = 0,291.$$

$$A_2 \geq \frac{N}{\varphi_2 R} = \frac{10}{0,291 \cdot 1,5} = 22,9 \text{ см}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{22,9} = 4,79 \text{ см};$$

$$i_2 = \frac{a_2}{\sqrt{12}} = \frac{4,79}{\sqrt{12}} = 1,38 \text{ см}.$$

Гибкости в двух главных плоскостях одинаковы:

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_2} = \frac{1 \cdot 200}{1,38} = 144,9.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2' = \frac{3000}{\lambda^2} = \frac{3000}{144,9^2} = 0,143.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\frac{N}{\varphi_2' A_2} = \frac{10}{0,143 \cdot 22,9} = 3,05 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 30,5 \text{ МПа}; R_{\gamma_c} = 15 \text{ МПа},$$

$30,5 > 15$, условие устойчивости не выполняется.

Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,291 + 0,143}{2} = 0,217;$$

$$A_3 \geq \frac{N}{\varphi_3 R} = \frac{10}{0,217 \cdot 1,5} = 30,7 \text{ см}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{30,7} = 5,54 \text{ см};$$

$$i_3 = \frac{a_3}{\sqrt{12}} = \frac{5,54}{\sqrt{12}} = 1,6 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_3} = \frac{1 \cdot 200}{1,6} = 125.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3' = \frac{3000}{\lambda^2} = \frac{3000}{125^2} = 0,192.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\frac{N}{\varphi_3' A_3} = \frac{10}{0,192 \cdot 30,7} = 1,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 17 \text{ МПа}; R_{\gamma c} = 15 \text{ МПа},$$

17 > 15; условие устойчивости не выполняется.

Четвертое приближение

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \frac{0,217 + 0,192}{2} = 0,2045;$$

$$A_4 \geq \frac{N}{\varphi_4 R} = \frac{10}{0,2045 \cdot 1,5} = 32,6 \text{ см}^2;$$

$$a_4 = \sqrt{32,6} = 5,71 \text{ см};$$

$$i_4 = \frac{a_4}{\sqrt{12}} = \frac{5,71}{\sqrt{12}} = 1,65 \text{ см};$$

$$\lambda_4 = \frac{\mu l}{i_4} = \frac{1 \cdot 200}{1,65} = 121,2.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_4' = \frac{3000}{\lambda^2} = \frac{3000}{121,2^2} = 0,204.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\frac{N}{\varphi_4' A_4} = \frac{10}{0,204 \cdot 32,6} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 15 \text{ МПа}; R_{\gamma c} = 15 \text{ МПа}.$$

Получено $N/\varphi A = R_{\gamma c}$, т.е. условие устойчивости выполняется.

Высота и ширина выбранного квадратного сечения $a = 5,71$ см. Найдем значение критической силы. Так как $\lambda_4 \geq 70$, используем формулу Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^3}{121,2^2} = 0,671 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 6,71 \text{ МПа};$$

$$P_{кр} = A_4 \sigma_{кр} = 32,6 \cdot 0,671 = 21,9 \text{ кН}.$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости, разделив критическую силу на расчетную сжимающую силу:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{21,9}{10} = 2,19.$$

Получили, что строительные нормы дают запас устойчивости в 2,19 раза.

8.2.4. Подбор сечения стержня из стального двутавра

Стойка длиной 6 м имеет различные опорные закрепления в главных плоскостях и загружена центрально приложенной нормативной силой $P = 2000$ кН (рис. 8.6). Требуется подобрать сечение колонного двутавра по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными

гранями полок» [15], определить критическую силу $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. При расчете следует принять модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление стали $R = 240$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 245$ МПа (сталь С245), коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент надежности по ответственности $\gamma_n = 1$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

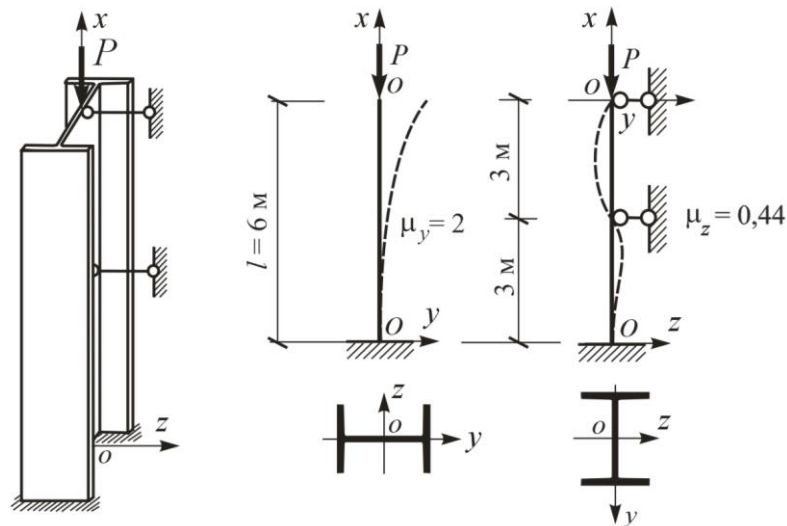


Рис. 8.6. К примеру 8.2.4

Решение

Найдем расчетную силу:

$$P_p = P \cdot \gamma_f \cdot \gamma_n = 2000 \cdot 1,2 \cdot 1,0 = 2400 \text{ кН}$$

Очевидно, что продольная расчетная сжимающая сила N_p в стержне равна расчетной силе:

$$N_p = P_p = 2400 \text{ кН}.$$

Из условия устойчивости [7]

$$\sigma = \frac{N_p}{\varphi A} \leq R \gamma_c$$

найдем площадь поперечного сечения по формуле

$$A \geq \frac{N_p}{\varphi R \gamma_c}.$$

Так как значение φ лежит в пределах от нуля до единицы, можно задать любое значение из этого интервала.

Первое приближение

Задаем $\varphi_1 = 0,5$.

Находим требуемую площадь A_1 :

$$A_1 \geq \frac{N_p}{\varphi_1 R \gamma_c} = \frac{2400}{0,5 \cdot 24 \cdot 0,9} = 222,2 \text{ см}^2.$$

Из сортамента по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок» [15] выбираем колонный двутавр № 30К9 с фактический площадью сечения $A_1 = 232,14 \text{ см}^2$, радиусами инерции $i_z = 137,65 \text{ мм} = 13,765 \text{ см}$ $i_y = 92,58 \text{ мм} = 9,258 \text{ см}$. Напомним, что в сортаменте горизонтальная ось обозначена X-X, поэтому колонка i_x соответствует i_z в осях, представленных на рис. 8.6.

Определяем гибкости в двух плоскостях.

Гибкость в плоскости Oхz (перпендикулярно оси у):

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,44 \cdot 600}{9,258} = 28,5.$$

Гибкость в плоскости Oху (перпендикулярно оси z):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{2 \cdot 600}{13,765} = 87,2.$$

Потеря устойчивости будет происходить в расчетной плоскости Oху (нормальной к оси z), так как $\lambda_y > \lambda_z$, а максимальная гибкость равна $\lambda_{\max} = \lambda_y = 87,2$.

В соответствии с табл. 7 [7] (табл. П2.1 из прил. 2) используем колонку «b». В случае, когда расчетная плоскость нормальна к главной минимальной оси двутавра (а это ось у), для расчетов из табл. Д1 прил. Д [7] следует выбирать коэффициент устойчивости из колонки «с».

Сначала найдем условную гибкость:

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\max} \sqrt{\frac{R}{E}} = 87,2 \sqrt{\frac{240}{2,1 \cdot 10^5}} = 2,95.$$

Используя табл. П2.2 прил. 2, соответствующую табл. Д.1 прил. Д СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» (колонка «b») [7], получим $\varphi(\bar{\lambda}=2,8) = 0,683$; $\varphi(\bar{\lambda}=3,0) = 0,643$. Функция $\varphi(\bar{\lambda})$ — убывающая.

Аппроксимируя участок между $\bar{\lambda} = 2,8$ и $\bar{\lambda} = 3,0$ прямой линией (линейная интерполяция), находим $\varphi(\bar{\lambda} = 2,95)$:

$$\begin{aligned}\varphi'_1 = \varphi(2,95) &= \varphi(2,8) - \frac{\varphi(2,8) - \varphi(3,0)}{3,0 - 2,8} (2,95 - 2,8) = \\ &= 0,683 - \frac{0,683 - 0,643}{0,2} 0,15 = 0,653.\end{aligned}$$

Ниже, на рис. 8.7 приведена графическая иллюстрация линейной интерполяции. На участке между $\bar{\lambda} = 2,8$ и $\bar{\lambda} = 3,0$ кривая заменяется на прямую.

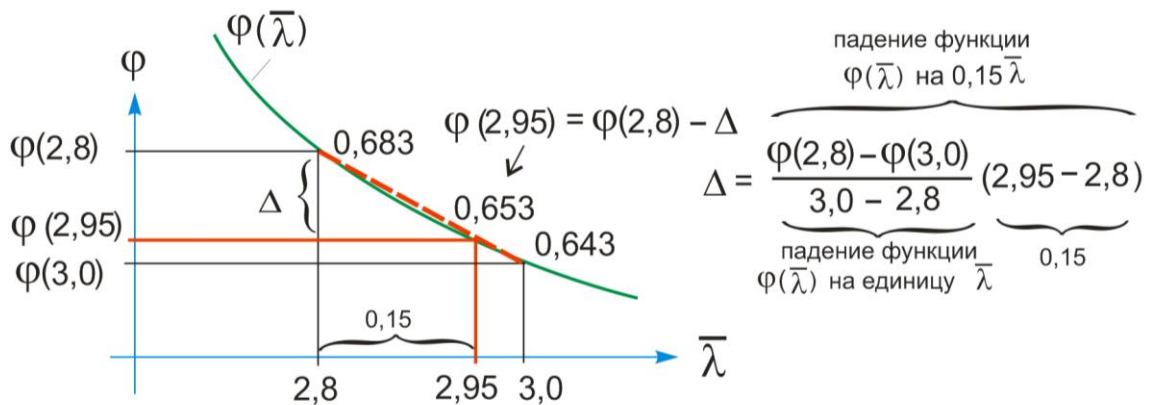


Рис. 8.7. Линейная интерполяция кривой на участке

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N_p}{\varphi'_1 A_1} = \frac{2400}{0,653 \cdot 232,14} = 15,8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = \\ &= 158 \text{ МПа} < R\gamma_c = 240 \cdot 0,9 = 216 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Условие устойчивости выполняется, однако сечение не экономично, так как имеется достаточно большое расхождение с предельным напряжением, равным 216 МПа.

Второе приближение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,653}{2} = 0,576.$$

Находим требуемую площадь A_2 :

$$A_2 \geq \frac{N_p}{\varphi_2 R\gamma_c} = \frac{2400}{0,576 \cdot 24 \cdot 0,9} = 192,9 \text{ см}^2.$$

Из сортамента выбираем двутавр № 25К8.

Площадь поперечного сечения $A_2 = 194,97 \text{ см}^2$.

Радиусы инерции $i_z = 115,86 \text{ мм} = 11,586 \text{ см}$, $i_y = 66,25 \text{ мм} = 6,625 \text{ см}$.

Определяем гибкости в двух плоскостях.

Гибкость в плоскости Oxz (перпендикулярно оси y):

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,44 \cdot 600}{6,625} = 39,8$$

Гибкость в плоскости Oxy (перпендикулярно оси z):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{2 \cdot 600}{11,586} = 103,6.$$

Потеря устойчивости будет происходить в плоскости Oxy (перпендикулярно оси z), так как $\lambda_y > \lambda_z$, а максимальная гибкость равна $\lambda_{\max} = \lambda_y = 103,6$.

Найдем условную гибкость:

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\max} \sqrt{\frac{R}{E}} = 103,6 \sqrt{\frac{240}{2,1 \cdot 10^5}} = 3,50.$$

Используя табл. (строка «b»), получим $\varphi(\bar{\lambda}=3,4) = 0,562$, $\varphi(\bar{\lambda}=3,6) = 0,524$. Функция $\varphi(\bar{\lambda})$ — убывающая. При аппроксимации прямой линией на участке, можно заключить, что величина 3,5 находится посередине этой прямой, значит $\varphi(\bar{\lambda}=3,5) = (0,562 + 0,524)/2 = 0,543$. Проверим это утверждение.

$$\begin{aligned} \varphi'_2 = \varphi(3,5) &= \varphi(3,4) - \frac{\varphi(3,4) - \varphi(3,6)}{3,6 - 3,4} (3,5 - 3,4) = \\ &= 0,562 - \frac{0,562 - 0,524}{0,2} 0,1 = 0,543. \end{aligned}$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N_p}{\varphi'_2 A_2^\Phi} = \frac{2400}{0,543 \cdot 194,97} = 22,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = \\ &= 227 \text{ МПа} > R\gamma_c = 240 \cdot 0,9 = 216 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости не выполняется.

Третье приближение

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,576 + 0,543}{2} = 0,560.$$

Находим требуемую площадь A_3 :

$$A_3 \geq \frac{N_p}{\varphi_3 R \gamma_c} = \frac{2400}{0,560 \cdot 24 \cdot 0,9} = 198,4 \text{ см}^2.$$

Из сортамента выбираем двутавр № 25К9 с площадью сечения $A_3 = 218,2 \text{ см}^2$, радиусами инерции $i_z = 117,51 \text{ мм} = 11,751 \text{ см}$, $i_y = 66,63 \text{ мм} = 6,663 \text{ см}$.

Определяем гибкости в двух плоскостях.

Гибкость в плоскости Oxz (перпендикулярно оси y):

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_y} = \frac{0,44 \cdot 600}{6,663} = 39,6.$$

Гибкость в плоскости Oxy (перпендикулярно оси z):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_z} = \frac{2 \cdot 600}{11,751} = 102,1.$$

Потеря устойчивости будет происходить в плоскости Oxy (относительно оси z), так как $\lambda_y > \lambda_z$, а максимальная гибкость равна $\lambda_{\max} = \lambda_y = 102,1$.

Найдем условную гибкость

$$\bar{\lambda} = \lambda_{\max} \sqrt{\frac{R}{E}} = 102,1 \sqrt{\frac{240}{2,1 \cdot 10^5}} = 3,45.$$

Используя табл. (строка «b»), получим $\varphi(\bar{\lambda}=3,4) = 0,562$, $\varphi(\bar{\lambda}=3,6) = 0,524$.

Функция $\varphi(\bar{\lambda})$ — убывающая. Проводим линейную интерполяцию

$$\begin{aligned} \varphi'_3 = \varphi(3,45) &= \varphi(3,4) - \frac{\varphi(3,4) - \varphi(3,6)}{3,6 - 3,4} (3,5 - 3,45) = \\ &= 0,562 - \frac{0,562 - 0,524}{0,2} 0,05 = 0,552. \end{aligned}$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{N_p}{\varphi'_3 A_3} &= \frac{2400}{0,552 \cdot 218,2} = 19,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 199 \text{ МПа} \leq R \gamma_c = \\ &= 240 \cdot 0,9 = 216 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости выполняется, значения в левой и правой части неравенства мало отличаются одно от другого.

Оставляем полученный двутавр № 25К9 с площадью поперечного сечения $A_3 = 218,2 \text{ см}^2$.

Найдем критическое напряжение. Так как максимальная гибкость больше 100, то расчет ведем по формуле Эйлера.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4}{102,1^2} = 19,86 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 198,6 \text{ МПа.}$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} A = 19,86 \cdot 218,2 = 4333 \text{ кН.}$$

Найдем коэффициент запаса устойчивости, разделив критическую силу на нормативную силу:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{4333}{2000} = 2,17.$$

Библиографический список

1. Андреев В.И. Техническая механика : учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Изд-во АСВ, 2013. — 255 с. — ISBN 978-5-93093-867-8.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна, Н.М. Атарова. — Москва : Инфра-М, 2016. — 512 с. — ISBN 978-5-16-009587-5.
3. Атаров Н.М. Сопротивление материалов с основами строительной механики : учебник / Н.М. Атаров, Г.С. Варданян, А.А. Горшков ; под ред. Г.С. Варданяна, Н.М. Атарова. — Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2023. — 416 с. — ISBN 978-5-16-010220-7.
4. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах : учебное пособие / Н.М. Атаров. — Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2024. — 428 с. — ISBN 978-5-16-018387-9.
5. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения = Reliability for constructions and foundations. General principles : межгосударственный стандарт : издание официальное : утвержден приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 11 декабря 2014 г. № 1974-ст и введен в действие с 1 июля 2015 г. : введен впервые : дата введения 2015-07-01. — Москва : Стандартинформ, 2019. — 23 с. — Текст : электронный. — URL: <https://internet-law.ru/gosts/gost/58469>. — Режим доступа: свободный.
6. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия = Loads and actions: издание официальное : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации (Минстрой России) от 3 декабря 2016 г. № 891/пр и введен в действие с 4 июня 2017 : дата введения 2017-06-04. — Москва : Стандартинформ, 2018. — 118 с. — Текст : электронный. — URL: <https://docs.cntd.ru/document/456044318>. — Режим доступа: свободный.
7. СП 16.13330.2017. Стальные конструкции = Steel structures. Актуализированная редакция СНиП II-23-81* : издание официальное : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 27 февраля 2017 г. № 126/пр и введен в действие с 28 августа 2017 г. : дата введения 2017-08-28. — Москва : Стандартинформ, 2017. — 142 с. — Текст : электронный. — URL: <https://docs.cntd.ru/document/456069588>. — Режим доступа: свободный.
8. СП 64.13330.2017. Деревянные конструкции = Timber structures. Актуализированная редакция СНиП II-25-80 : издание официальное : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 27 февраля 2017 г. № 129/пр и введен в действие с 28 августа 2017 г. : дата введения 2017-08-28. — Москва : Стандартинформ, 2017. — 105 с. — Текст : электронный. — URL: <https://docs.cntd.ru/document/456082589>. — Режим доступа: свободный.
9. СП 128.13330.2016. Алюминиевые конструкции = Aluminium structures. Актуализированная редакция СНиП 2.03.06-85: издание официальное : утвержден приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 16 декабря 2016 г. № 948/пр и введен в действие с 17 июня 2017 г. : введен впервые : дата введения 2017-06-17. — Москва : Минстрой России, 2017. — 86 с. — Текст : электронный. — URL: <https://docs.cntd.ru/document/456044319>. — Режим доступа: свободный.
10. Российская Федерация. Законы. Технический регламент о безопасности зданий и сооружений : Федеральный закон № 384-ФЗ : [принят Государственной Думой 23 декабря 2009 года : одобрен Советом Федерации 25 декабря 2009 года]. — Текст : электронный. — URL: <https://docs.cntd.ru/document/902192610>. — Режим доступа: свободный.
11. Российская Федерация. Законы. Градостроительный кодекс Российской Федерации : федеральный закон от 29.12.2004 № 190-ФЗ (ред. от 25.12.2023) (с изм. и доп., вступ. в силу с 01.05.2024) : [принят Государственной Думой 22 декабря 2004 года : одобрен Советом Федерации 24 декабря 2004 года]. — Текст : электронный. — URL: www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_51040/. — Режим доступа: свободный.
12. ГОСТ 8509-93. Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент = Hot-rolled steel equal-leg angles. Dimensions : межгосударственный стандарт : издание официальное : утвержден постановлением Комитета Российской Федерации по стандартизации, метрологии и сертификации от 20.02.96 № 85 и введен в действие с 1 января 1997 г. : дата введения 1997-01-01. — Москва : Стандар-

тинформ, 2005. — 10 с. — Текст : электронный. — URL: <https://internet-law.ru/gosts/gost/9227/?ysclid=m2f2qfz4y167276817>. — Режим доступа: свободный.

13. ГОСТ 8510-86. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент = Hot-rolled steel unequal-leg angles. Dimensions: межгосударственный стандарт : издание официальное : утвержден и введен в действие постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 15.10.86 № 3082 : дата введения 1986-10-15. — Текст : электронный. — URL: <https://internet-law.ru/gosts/gost/12130/?ysclid=m2f3za2j73452102363>. — Режим доступа: свободный.

14. ГОСТ 8240-97. Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент = Hot-rolled steel channels. Assortment: межгосударственный стандарт : издание официальное : утвержден постановлением Государственного комитета Российской Федерации по стандартизации и метрологии от 5.04.2001 № 166-ст и введен в действие с 1 января 2002 г. : дата введения 2002-01-01. — Москва : Стандартинформ, 2008. — 14 с. — Текст : электронный. — URL: <https://internet-law.ru/gosts/gost/6545/?ysclid=m2f4vc0zd6702924330>. — Режим доступа: свободный.

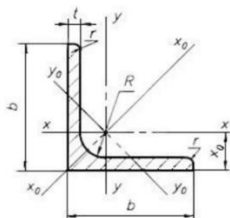
15. ГОСТ Р 57837-2017. Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок = Hot-rolled steel I-beams with parallel edges of flanges. Specifications : межгосударственный стандарт : издание официальное : утвержден и введен в действие приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 24 октября 2017 г. № 1515-ст : дата введения 2017-10-24. — Москва : Стандартинформ, 2019. — 44 с. — Текст : электронный. — URL: <https://internet-law.ru/gosts/gost/65603/?ysclid=m2f59v8ozy664595215>. — Режим доступа: свободный.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Сортамент прокатной стали (сокращенный)

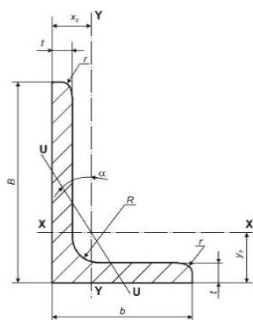
ГОСТ 8509-93 «Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент»



Номер уголка	b	t	R	r	F, см²												Масса 1 м, кг
	мм					x-x			x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀			I _{xy} , см⁴	x ₀ см		
						I _x , см⁴	W _x , см³	i _x , см	I _{x0} , max, см⁴	i _{x0} max, см	I _{y0} min, см⁴	W _{y0} , см³	i _{y0} min, см				
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89	
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12	
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27	
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36	
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46	
		4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91	
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60	
		4	4,5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10	
		5	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58	
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85	
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42	
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98	
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08	
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73	
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37	
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32	
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05	
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77	
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47	
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44	
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25	
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90	
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81	
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72	
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87	
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38	
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39	
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39	
		8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37	
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80	
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89	
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96	
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02	
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07	

Номер уголка	<i>b</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	<i>F</i> , см ²											Масса 1 м, кг
	мм					<i>x-x</i>			<i>x₀-x₀</i>		<i>y₀-y₀</i>			<i>I_{xy}</i> , см ⁴	<i>x₀</i> см	
						<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>I_{x0}</i> , max, см ⁴	<i>i_{x0}</i> max, см	<i>I_{y0}</i> min, см ⁴	<i>W_{y0}</i> , см ³	<i>i_{y0}</i> min, см			
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,35	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
		8	12,0	4,0	16,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63
		16	12,0	4,0	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06	23,30
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,6
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41
		18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00
12	16,0			5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
		18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	22,039	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22	24,0	8,0	106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,30	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25	24,0	8,0	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28	24,0	8,0	133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30	24,0	8,0	141,96	8176,82	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	111,44
		35	24,0	8,0	163,71	9281,05	530,11	7,53	14682,73	9,47	3879,37	366,13	4,87	5401,68	7,53	128,51

ГОСТ 8510-86 «Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент»



Номер уголка	мм					Площадь поперечного сечения, см ²	Справочные величины для осей									x ₀ , см	y ₀ , см	J _{yy} , см ⁴	Угол наклона на осн. l _{гс}	Масса 1 м уголка, кг
							х—х			у—у			u—u							
	B	b	t	R	r		J _{xx} , см ⁴	W _{xx} , см ³	i _{xx} , см	J _{yy} , см ⁴	W _{yy} , см ³	i _{yy} , см	J _{umins} , см ⁴	W _{uy} , см ³	i _{umins} , см					
2.5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2*	30	20	3			1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,0	0,43	0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17		
			4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52		
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48		
			4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281	1,94		
			5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37		
4/3*	40	30	4	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26		
			5	3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46		
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,72	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68		
			4	2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20		
5/3,2	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,9		
			4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,4		
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81		
			5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46		
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17		
			5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91		
			6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63		
			8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03		
6,5/5*	65	50	5	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,567	4,36		
			6	6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18		
			7	7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98		
			8	8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77		
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79		
			6	7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69		
			7*	8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57		
			8	9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43		
8/5	80	50	5	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387	4,49		
			6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92		
8/6*	80	60	6	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39		
			7	9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39		
			8	10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37		
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17		
			6	8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70		
			8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77		
10/6,3	100	63	6	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	5,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53		
			7	11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70		
			8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87		
			10	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14		
10/6,5*	100	65	7	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81		
			8	12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99		
			10	15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30		
11/7	110	70	6,5	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98		
			8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93		
12,5/8	125	80	7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04		
			8	15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406	12,58		
			10	19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404	15,47		
			12	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400	18,34		
14/9	140	90	8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	0,411	14,13		
			10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409	17,46		
16/10	160	100	9	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391	17,96		
			10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390	19,85		
			12	30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388	23,58		
			12	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385	27,26		
			14																	
18/11	180	110	10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376	22,20		
			12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374	26,40		
20/12,5	200	125	11	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	456,00	0,392	27,37		
			12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392	29,74		
			13	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390	34,43		
			14	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388	39,03		

ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры
стальные горячекатаные с
параллельными гранями полок»

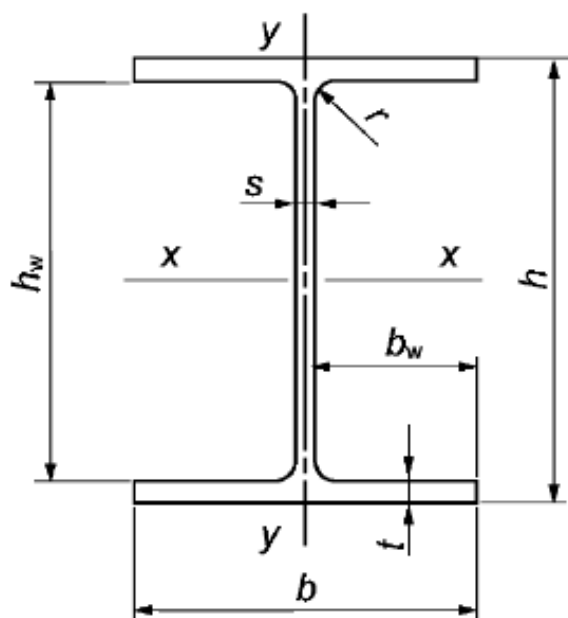


Таблица 1 — Номинальные размеры двутавров и площадь поперечного сечения, масса 1 м длины, справочные величины для осей

Номер профиля	Номинальные размеры, мм						Номинальная площадь поперечного сечения F_H , см ²	Номинальная масса 1 м двутавра, кг	Справочные величины для осей профиля								
	h	b	s	t	h_w	b_w			r	I_{x1} , см ⁴	W_{x1} , см ³	S_{x1} , см ³	i_{x1} , мм	I_{y1} , см ⁴	W_{y1} , см ³	S_{y1} , см ³	i_{y1} , мм
Тип Б — Балочные нормальные двутавры																	
10Б1	100,0	55,0	4,1	5,7	88,6	25,45	7,0	10,32	8,10	171,01	34,20	19,70	40,70	15,92	5,79	4,57	12,42
12Б1	117,6	64,0	3,8	5,1	107,4	30,10	7,0	11,03	8,70	257,36	43,80	24,94	48,30	22,39	7,00	5,49	14,25
12Б2	120,0	64,0	4,4	6,3	107,4	29,80	7,0	13,21	10,40	317,75	53,00	30,36	49,04	27,67	8,65	6,79	14,47
14Б1	137,4	73,0	3,8	5,6	126,2	34,60	7,0	13,39	10,50	434,86	63,30	35,80	56,98	36,42	9,98	7,76	16,49
14Б2	140,0	73,0	4,7	6,9	126,2	34,15	7,0	16,43	12,90	541,22	77,30	44,17	57,40	44,92	12,31	9,62	16,54
16Б1	157,0	82,0	4,0	5,9	145,2	39,00	9,0	16,18	12,70	689,28	87,80	49,55	65,27	54,43	13,27	10,35	18,34
16Б2	160,0	82,0	5,0	7,4	145,2	38,50	9,0	20,09	15,80	869,29	108,70	61,93	65,78	68,31	16,66	13,05	18,44
18Б1	177,0	91,0	4,3	6,5	164,0	43,35	9,0	19,58	15,40	1062,74	120,10	67,66	73,68	81,89	18,00	13,98	20,45
18Б2	180,0	91,0	5,3	8,0	164,0	42,85	9,0	23,95	18,80	1316,96	146,30	83,21	74,16	100,85	22,16	17,30	20,52
20Б0	198,0	99,0	4,5	7,0	184,0	47,25	11,0	23,18	18,20	1581,56	159,80	89,88	82,60	113,62	22,95	17,86	22,14
20Б1	200,0	100,0	5,5	8,0	184,0	47,25	11,0	27,16	21,30	1844,26	184,40	104,73	82,41	133,91	26,78	20,97	22,21
20Б2	203,0	101,0	6,5	9,5	184,0	47,25	11,0	32,19	25,30	2218,49	218,60	124,99	83,02	163,93	32,46	25,50	22,57
20Б3	208,0	102,0	8,0	12,0	184,0	47,00	11,0	40,24	31,60	2852,62	274,30	158,46	84,20	213,50	41,86	33,02	23,03
25Б1	248,0	124,0	5,0	8,0	232,0	59,50	12,0	32,68	25,70	3537,11	285,30	159,68	104,04	254,85	41,11	31,80	27,93
25Б2	250,0	125,0	6,0	9,0	232,0	59,50	12,0	37,66	29,60	4051,73	324,10	182,93	103,73	293,85	47,02	36,55	27,93
25Б3	255,0	126,0	7,5	11,5	232,0	59,25	12,0	47,62	37,40	5238,16	410,80	233,88	104,88	384,79	61,08	47,67	28,43
25Б4	260,0	127,0	9,0	14,0	232,0	59,00	12,0	57,68	45,30	6481,01	498,50	286,25	106,00	480,07	75,60	59,24	28,85
30Б1	298,0	149,0	5,5	8,0	282,0	71,75	13,0	40,80	32,00	6318,22	424,00	237,53	124,44	442,00	59,33	45,88	32,91
30Б2	300,0	150,0	6,5	9,0	282,0	71,75	13,0	46,78	36,70	7209,26	480,60	271,06	124,14	507,53	67,67	52,56	32,94
30Б3	305,0	151,0	8,0	11,5	282,0	71,50	13,0	58,74	46,10	9254,92	606,90	344,37	125,52	661,88	87,67	68,31	33,57
30Б4	310,0	152,0	9,5	14,0	282,0	71,25	13,0	70,80	55,60	11381,41	734,30	419,40	126,79	822,37	108,21	84,60	34,08
35Б1	346,0	174,0	6,0	9,0	328,0	84,00	14,0	52,68	41,40	11094,49	641,30	358,09	145,12	791,54	90,98	70,11	38,76

Продолжение таблицы 1

Номер профиля	Номинальные размеры, мм							Номинальная площадь поперечного сечения F_n , см^2	Номинальная масса 1 м двутавра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_x , см^4	W_x , см^3	S_x , см^3	i_x , мм	I_y , см^4	W_y , см^3	S_y , см^3	i_y , мм
3552	350,0	175,0	7,0	11,0	328,0	84,00	14,0	63,14	49,60	13559,01	774,80	433,96	146,54	984,34	112,50	86,79	39,48
3553	355,0	176,0	8,5	13,5	328,0	83,75	14,0	77,08	60,50	16797,02	946,30	533,54	147,62	1229,36	139,70	108,13	39,94
3554	361,0	177,0	10,0	16,5	328,0	83,50	14,0	92,89	72,90	20719,71	1147,90	651,07	149,35	1528,90	172,76	134,02	40,57
4051	396,0	199,0	7,0	11,0	374,0	96,00	16,0	72,16	56,60	20018,83	1011,10	563,93	166,56	1447,14	145,44	111,97	44,78
4052	400,0	200,0	8,0	13,0	374,0	96,00	16,0	84,12	66,00	23704,43	1185,20	663,13	167,87	1736,39	173,64	133,82	45,43
4053	406,0	201,0	9,5	16,0	374,0	95,75	16,0	102,05	80,10	29352,45	1445,90	813,38	169,60	2169,89	215,91	166,74	46,11
4054	412,0	202,0	11,0	19,0	374,0	95,50	16,0	120,10	94,30	35196,83	1708,60	966,65	171,19	2616,25	259,03	200,47	46,67
4551	446,0	199,0	8,0	12,0	422,0	95,50	18,0	84,30	66,20	28697,35	1286,90	725,06	184,50	1580,03	158,80	123,29	43,29
4552	450,0	200,0	9,0	14,0	422,0	95,50	18,0	96,76	76,00	33450,76	1486,70	839,53	185,93	1871,57	187,16	145,46	43,98
4553	456,0	201,0	10,5	17,0	422,0	95,25	18,0	115,43	90,60	40710,41	1785,50	1012,55	187,80	2307,62	229,61	178,81	44,71
4554	462,0	202,0	12,0	20,0	422,0	95,00	18,0	134,22	105,40	48197,42	2086,50	1188,75	189,50	2756,66	272,94	213,01	45,32
5051	492,0	199,0	8,8	12,0	468,0	95,10	20,0	92,38	72,50	36841,89	1497,60	853,45	199,70	1581,96	158,99	124,86	41,38
5052	496,0	199,0	9,0	14,0	468,0	95,00	20,0	101,27	79,50	41869,08	1688,30	957,23	203,33	1844,89	185,42	144,88	42,68
5053	500,0	200,0	10,0	16,0	468,0	95,00	20,0	114,23	89,70	47846,05	1913,80	1087,59	204,66	2140,79	214,08	167,48	43,29
5054	508,0	201,0	12,0	20,0	468,0	94,50	20,0	139,99	109,90	59953,57	2360,40	1348,82	206,94	2717,85	270,43	212,23	44,06
5055	516,0	202,0	15,0	24,0	468,0	93,50	20,0	170,59	133,90	73345,26	2842,80	1642,68	207,35	3315,53	328,27	260,04	44,09
5551	543,0	220,0	9,5	13,5	516,0	105,25	24,0	113,36	89,00	55677,42	2050,70	1164,94	221,62	2405,54	218,69	171,67	46,06
5552	547,0	220,0	10,0	15,5	516,0	105,00	24,0	124,74	97,90	62784,45	2295,60	1301,49	224,34	2761,34	251,03	196,56	47,05
5553	553,0	221,0	12,0	18,5	516,0	104,50	24,0	148,63	116,70	75321,22	2724,10	1554,49	225,11	3342,92	302,53	237,99	47,42
5554	560,0	222,0	14,0	22,0	516,0	104,00	24,0	174,86	137,30	89907,09	3211,00	1842,20	226,75	4032,07	363,25	286,76	48,02
6051	596,0	199,0	10,0	15,0	566,0	94,50	22,0	120,45	94,60	68715,90	2305,90	1325,36	238,85	1979,66	198,96	157,64	40,54
6052	600,0	200,0	11,0	17,0	566,0	94,50	22,0	134,41	105,50	77632,25	2587,70	1489,36	240,32	2278,16	227,82	180,72	41,17
6053	604,0	201,0	12,5	19,0	566,0	94,25	22,0	151,28	118,80	87472,10	2896,40	1675,38	240,46	2586,62	257,38	205,28	41,35

Продолжение таблицы 1

Номер профиля	Номинальные размеры, мм							Номинальная площадь поперечного сечения F_{H-} см^2	Номи- нальная масса 1 м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$S_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{мм}$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$S_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{мм}$
60Б4	612,0	202,0	15,0	23,0	566,0	93,50	22,0	181,97	106509,50	3480,70	2026,68	241,93	3182,62	315,11	253,12	41,82	
70Б1	691,0	260,0	12,0	15,5	660,0	124,00	24,0	164,74	125922,20	3644,60	2094,79	276,47	4557,35	350,57	276,64	52,60	
70Б2	697,0	260,0	12,5	18,5	660,0	123,75	24,0	183,64	145904,02	4186,63	2392,68	281,87	5437,68	418,28	328,41	54,41	
70Б3	702,0	261,0	14,5	21,0	660,0	123,25	24,0	210,26	167085,05	4760,30	2736,06	281,89	6248,49	478,81	378,10	54,51	
70Б4	710,0	262,0	17,0	25,0	660,0	122,50	24,0	248,14	199679,98	5624,80	3249,28	283,67	7531,16	574,90	456,29	55,09	
Тип Ш — Балочные широкополочные двутавры																	
20Ш0	190,0	149,0	5,0	7,0	176,0	72,00	13,0	31,11	2079,60	218,90	120,97	81,76	386,62	51,90	39,79	35,25	
20Ш1	194,0	150,0	6,0	9,0	176,0	72,00	13,0	39,01	2689,74	277,30	154,28	83,04	507,16	67,62	51,85	36,06	
20Ш2	199,0	151,0	7,5	11,5	176,0	71,75	13,0	49,38	3502,14	352,00	198,01	84,21	661,25	87,58	67,27	36,59	
20Ш3	204,0	152,0	9,0	14,0	176,0	71,50	13,0	59,85	4362,01	427,70	243,18	85,37	821,37	108,08	83,18	37,05	
20Ш4	211,0	155,0	11,0	17,5	176,0	72,00	13,0	75,06	5696,83	540,00	311,20	87,12	1089,19	140,54	108,38	38,09	
20Ш5	218,0	157,0	13,0	21,0	176,0	72,00	13,0	90,27	7117,64	653,00	381,26	88,80	1359,05	173,13	133,81	38,80	
20Ш6	228,0	159,0	16,0	26,0	176,0	71,50	13,0	112,29	9312,80	816,90	485,66	91,07	1749,68	220,09	170,75	39,47	
25Ш0	240,0	174,0	6,0	9,0	222,0	84,00	16,0	46,84	4981,13	415,10	229,64	103,13	791,75	91,01	69,84	41,11	
25Ш1	244,0	175,0	7,0	11,0	222,0	84,00	16,0	56,24	6121,23	501,70	279,19	104,33	984,48	112,51	86,36	41,84	
25Ш2	249,0	176,0	8,5	13,5	222,0	83,75	16,0	68,59	7624,69	612,40	343,94	105,44	1229,33	139,70	107,41	42,34	
25Ш3	256,0	177,0	10,5	17,0	222,0	83,25	16,0	85,69	9819,49	767,20	436,06	107,05	1575,20	177,99	137,18	42,88	
25Ш4	264,0	182,0	13,0	21,0	222,0	84,50	16,0	107,50	12751,44	966,00	556,26	108,91	2116,49	232,58	179,70	44,37	
25Ш5	274,0	184,0	16,0	26,0	222,0	84,00	16,0	133,40	16478,26	1202,80	703,59	111,14	2710,17	294,58	228,44	45,07	
25Ш6	286,0	186,0	19,0	32,0	222,0	83,50	16,0	163,42	21287,68	1488,70	884,76	114,13	3448,57	370,81	288,22	45,94	
30Ш0	290,0	199,0	7,0	10,0	270,0	96,00	18,0	61,48	9429,75	650,30	360,60	123,85	1316,09	132,27	101,70	46,27	
30Ш1	294,0	200,0	8,0	12,0	270,0	96,00	18,0	72,38	11338,30	771,30	429,51	125,16	1603,26	160,33	123,28	47,06	
30Ш2	300,0	201,0	9,0	15,0	270,0	96,00	18,0	87,38	14209,66	947,30	529,86	127,52	2034,13	202,40	155,42	48,25	

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номинальная площадь поперечного сечения $F_{пн}$, см ²	Номи- нальная масса 1м двугав- ра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	i_x , мм	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³	i_y , мм
30Ш3	306,0	203,0	11,0	18,0	270,0	96,00	18,0	105,56	82,90	17455,33	1140,90	644,63	128,59	2515,46	247,83	190,85	48,82
30Ш4	314,0	206,0	13,0	22,0	270,0	96,50	18,0	128,52	100,90	21967,16	1399,20	798,35	130,74	3213,67	312,01	240,56	50,00
30Ш5	326,0	208,0	16,0	28,0	270,0	96,00	18,0	162,46	127,50	29037,68	1781,50	1031,79	133,69	4213,04	405,10	313,16	50,92
30Ш6	342,0	210,0	20,0	36,0	270,0	95,00	18,0	207,98	163,30	39315,66	2299,20	1357,14	137,49	5580,38	531,47	412,35	51,80
35Ш1	334,0	249,0	8,0	11,0	312,0	120,50	20,0	83,17	65,30	17107,05	1024,40	565,71	143,42	2834,62	227,68	174,45	58,38
35Ш2	340,0	250,0	9,0	14,0	312,0	120,50	20,0	101,51	79,70	21676,50	1275,10	706,03	146,13	3650,97	292,08	223,45	59,97
35Ш3	347,0	252,0	11,0	17,5	312,0	120,50	20,0	125,95	98,90	27535,21	1587,00	886,41	147,86	4674,90	371,02	284,26	60,92
35Ш4	354,0	254,0	13,0	21,0	312,0	120,50	20,0	150,67	118,30	33692,45	1903,50	1072,31	149,54	5745,80	452,43	347,18	61,75
35Ш5	364,0	258,0	16,0	26,0	312,0	121,00	20,0	187,51	147,20	43231,44	2375,40	1354,36	151,84	7458,32	578,16	444,79	63,07
35Ш6	376,0	260,0	19,0	32,0	312,0	120,50	20,0	229,11	179,90	54967,48	2923,80	1688,25	154,89	9398,88	722,99	557,28	64,05
35Ш7	392,0	262,0	23,0	40,0	312,0	119,50	20,0	284,79	223,60	71815,25	3664,00	2150,36	158,80	12030,69	918,37	709,81	65,00
40Ш1	383,0	299,0	9,5	12,5	358,0	144,75	22,0	112,91	88,60	30554,32	1595,50	880,73	164,50	5576,08	372,98	285,42	70,27
40Ш2	390,0	300,0	10,0	16,0	358,0	145,00	22,0	135,95	106,70	38674,10	1983,30	1093,97	168,66	7207,77	480,52	366,53	72,81
40Ш3	397,0	302,0	12,0	19,5	358,0	145,00	22,0	164,89	129,40	47846,38	2410,40	1339,96	170,34	8962,48	593,54	453,33	73,72
40Ш4	406,0	304,0	14,5	24,0	358,0	144,75	22,0	201,98	158,60	60107,10	2960,90	1662,00	172,51	11253,74	740,38	566,43	74,64
40Ш5	418,0	309,0	17,5	30,0	358,0	145,75	22,0	252,20	198,00	77867,25	3725,70	2114,90	175,71	14776,27	956,39	732,65	76,54
40Ш6	430,0	311,0	21,0	36,0	358,0	145,00	22,0	303,25	238,10	96432,24	4485,20	2578,21	178,32	18086,35	1163,11	893,43	77,23
40Ш7	446,0	313,0	25,0	44,0	358,0	144,00	22,0	369,09	289,70	122543,61	5495,20	3204,85	182,21	22547,07	1440,71	1109,25	78,16
45Ш0	434,0	299,0	10,0	15,0	404,0	144,50	24,0	135,04	106,00	46794,17	2156,40	1192,24	186,15	6692,40	447,65	342,87	70,40
45Ш1	440,0	300,0	11,0	18,0	404,0	144,50	24,0	157,38	123,60	56069,13	2548,60	1412,44	188,75	8111,31	540,75	413,80	71,79
45Ш2	446,0	302,0	13,0	21,0	404,0	144,50	24,0	184,30	144,70	66379,08	2976,60	1661,51	189,78	9655,62	639,44	490,29	72,38
45Ш3	452,0	304,0	15,0	24,0	404,0	144,50	24,0	211,46	166,00	77050,83	3409,30	1915,99	190,88	11258,33	740,68	569,04	72,97
45Ш4	464,0	308,0	18,0	30,0	404,0	145,00	24,0	262,46	206,00	98962,82	4265,60	2420,93	194,18	14639,89	950,64	731,39	74,69

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номиналь- ная площадь поперечного сечения F_{H^0} см^2	Номиналь- ная масса 1м двутав- ра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			$I_{x^*}, \text{см}^4$	$W_{x^*}, \text{см}^3$	$S_{x^*}, \text{см}^3$	$I_{y^*}, \text{см}^4$	$W_{y^*}, \text{см}^3$	$S_{y^*}, \text{см}^3$	$I_y, \text{мм}^4$	
45Ш5	476,0	310,0	21,0	36,0	404,0	144,50	24,0	312,98	245,70	121722,09	5114,40	2932,26	197,21	17919,22	1156,08	891,09	75,67
45Ш6	492,0	312,0	25,0	44,0	404,0	143,50	24,0	380,50	298,70	153856,39	6254,30	3633,74	201,08	22341,69	1432,16	1106,76	76,63
50Ш1	482,0	300,0	11,0	15,0	452,0	144,50	26,0	145,52	114,20	60366,76	2504,80	1395,56	203,67	6763,81	450,92	347,62	68,18
50Ш2	487,0	300,0	14,5	17,5	452,0	142,75	26,0	176,34	138,40	71863,01	2951,30	1666,63	201,87	7897,76	526,52	409,42	66,92
50Ш3	493,0	300,0	15,5	20,5	452,0	142,25	26,0	198,86	156,10	83437,19	3384,90	1912,66	204,83	9251,07	616,74	478,76	68,21
50Ш4	499,0	300,0	16,5	23,5	452,0	141,75	26,0	221,38	173,80	95277,59	3818,70	2161,40	207,45	10604,77	706,98	548,21	69,21
50Ш5	508,0	302,0	19,0	28,0	452,0	141,50	26,0	260,80	204,70	114959,83	4526,00	2578,55	209,95	12894,50	853,94	663,27	70,31
50Ш6	518,0	310,0	22,0	33,0	452,0	144,00	26,0	309,84	243,20	140248,12	5415,00	3106,50	212,75	16442,93	1060,83	825,05	72,85
50Ш7	532,0	312,0	26,0	40,0	452,0	143,00	26,0	372,92	292,70	174203,77	6549,00	3797,96	216,13	20335,66	1303,57	1017,09	73,84
50Ш8	548,0	314,0	30,0	48,0	452,0	142,00	26,0	442,84	347,60	214879,98	7842,30	4598,03	220,28	24895,52	1585,70	1240,04	74,98
60Ш1	582,0	300,0	12,0	17,0	548,0	144,00	28,0	174,49	137,00	102709,98	3529,60	1981,30	242,62	7669,85	511,32	396,49	66,30
60Ш2	589,0	300,0	16,0	20,5	548,0	142,00	28,0	217,41	170,70	126193,28	4285,00	2438,84	240,92	9259,23	617,28	483,58	65,26
60Ш3	597,0	300,0	18,0	24,5	548,0	141,00	28,0	252,37	198,10	150035,32	5026,30	2869,72	243,82	11069,15	737,94	578,58	66,23
60Ш4	605,0	300,0	20,0	28,5	548,0	140,00	28,0	287,33	225,60	174450,48	5767,00	3305,39	246,40	12881,17	858,74	674,12	66,96
60Ш5	616,0	302,0	23,0	34,0	548,0	139,50	28,0	338,13	265,40	210467,04	6833,40	3941,46	249,49	15686,68	1038,85	817,44	68,11
60Ш6	630,0	315,0	27,0	41,0	548,0	144,00	28,0	412,99	324,20	266239,93	8452,10	4907,09	253,90	21476,18	1363,57	1073,64	72,11
60Ш7	644,0	317,0	31,0	48,0	548,0	143,00	28,0	480,93	377,50	318172,04	9881,10	5788,14	257,21	25653,76	1618,53	1279,02	73,04
60Ш8	664,0	319,0	36,0	58,0	548,0	141,50	28,0	574,05	450,60	394963,73	11896,50	7047,57	262,30	31634,21	1983,34	1572,47	74,23
70Ш1	692,0	300,0	13,0	20,0	652,0	143,50	28,0	211,49	166,00	172424,05	4983,40	2814,39	285,53	9024,74	601,65	468,07	65,32
70Ш2	698,0	300,0	15,0	23,0	652,0	142,50	28,0	242,53	190,40	198779,77	5695,70	3233,41	286,29	10382,92	692,19	540,47	65,43
70Ш3	707,0	300,0	18,0	27,5	652,0	141,00	28,0	289,09	226,90	239021,10	6761,60	3867,01	287,54	12424,20	828,28	650,29	65,56
70Ш4	715,0	300,0	20,5	31,5	652,0	139,75	28,0	329,39	258,60	275127,01	7695,90	4426,46	289,01	14242,00	949,47	748,55	65,76
70Ш5	725,0	300,0	23,0	36,5	652,0	138,50	28,0	375,69	294,90	319781,96	8821,60	5099,30	291,75	16514,18	1100,95	870,34	66,30

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номиналь- ная площадь поперечного сечения $F_{пн}$, см ²	Номи- нальная масса 1 м двуглав- ра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	I_x , мм	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³	I_y , мм
70Ш6	740,0	313,0	27,0	44,0	652,0	143,00	28,0	458,21	359,70	403258,33	10898,90	6334,98	296,66	22622,21	1445,51	1143,72	70,26
70Ш7	758,0	315,0	32,0	53,0	652,0	141,50	28,0	549,27	431,20	496466,98	13099,40	7693,00	300,64	27822,58	1766,51	1405,68	71,17
70Ш8	780,0	317,0	38,0	64,0	652,0	139,50	28,0	660,25	518,30	616075,38	15796,80	9389,94	305,47	34321,60	2165,40	1734,01	72,10
Тип К — Колонные двугавры																	
15K1	147,0	149,0	6,0	8,5	130,0	71,50	11,0	34,17	26,80	1366,76	186,00	103,63	63,25	469,21	62,98	48,05	37,06
15K2	150,0	150,0	7,0	10,0	130,0	71,50	11,0	40,14	31,50	1641,33	218,80	123,04	63,95	563,28	75,10	57,36	37,46
15K3	155,0	151,0	8,5	12,5	130,0	71,25	11,0	49,84	39,10	2117,61	273,20	155,69	65,18	718,46	95,16	72,78	37,97
15K4	160,0	152,0	10,0	15,0	130,0	71,00	11,0	59,64	46,80	2629,16	328,60	189,67	66,40	879,66	115,74	88,65	38,41
15K5	166,0	153,0	12,0	18,0	130,0	70,50	11,0	71,72	56,30	3291,43	396,60	232,39	67,74	1077,13	140,80	108,12	38,75
20K1	196,0	199,0	6,5	10,0	176,0	96,25	13,0	52,69	41,40	3846,06	392,50	216,41	85,44	1314,47	132,11	100,38	49,95
20K2	200,0	200,0	8,0	12,0	176,0	96,00	13,0	63,53	49,90	4715,63	471,60	262,75	86,15	1601,53	160,15	121,91	50,21
20K3	204,0	201,0	9,0	14,0	176,0	96,00	13,0	73,57	57,80	5602,48	549,30	308,35	87,26	1896,76	188,73	143,72	50,78
20K4	210,0	201,0	10,5	17,0	176,0	95,25	13,0	88,27	69,30	6962,62	663,10	376,57	88,81	2303,59	229,21	174,72	51,09
20K5	214,0	202,0	12,0	19,0	176,0	95,00	13,0	99,33	78,00	7970,40	744,90	426,84	89,58	2613,87	258,80	197,63	51,30
20K6	220,0	202,0	14,0	22,0	176,0	94,00	13,0	114,97	90,30	9488,15	862,60	500,34	90,84	3027,75	299,78	229,45	51,32
20K7	226,0	203,0	16,0	25,0	176,0	93,50	13,0	131,11	102,90	11136,66	985,60	578,16	92,16	3493,41	344,18	263,98	51,62
20K8	234,0	203,0	18,0	29,0	176,0	92,50	13,0	150,87	118,40	13375,48	1143,20	679,29	94,16	4053,99	399,41	306,76	51,84
25K1	246,0	249,0	8,0	12,0	222,0	120,50	16,0	79,72	62,60	9170,92	745,60	410,68	107,26	3090,06	248,20	188,61	62,26
25K2	250,0	250,0	9,0	14,0	222,0	120,50	16,0	92,18	72,40	10832,61	866,60	480,25	108,41	3648,81	291,90	221,88	62,92
25K3	253,0	251,0	10,0	15,5	222,0	120,50	16,0	102,21	80,20	12153,56	960,80	535,41	109,05	4088,75	325,80	247,85	63,25
25K4	257,0	252,0	11,0	17,5	222,0	120,50	16,0	114,82	90,10	13927,17	1083,80	607,67	110,14	4672,01	370,79	282,18	63,79
25K5	262,0	253,0	12,5	20,0	222,0	120,25	16,0	131,15	103,00	16243,92	1240,00	701,07	111,29	5404,02	427,20	325,46	64,19
25K6	267,0	253,0	14,0	22,5	222,0	119,50	16,0	147,13	115,50	18593,24	1392,80	793,96	112,42	6080,59	480,68	366,65	64,29

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номиналь- ная площадь поперечного сечения F_H , см ²	Номи- нальная масса 1м двутав- ра, кг	Справочные величины для осей профиля						
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	I_x , мм	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³
25K7	274,0	258,0	16,0	26,0	222,0	121,00	16,0	171,88	22416,62	1636,30	942,16	114,20	7452,57	577,72	441,04	65,85
25K8	281,0	259,0	18,0	29,5	222,0	120,50	16,0	194,97	26169,72	1862,60	1083,49	115,86	8556,67	660,75	505,09	66,25
25K9	288,0	260,0	20,0	33,0	222,0	120,00	16,0	218,20	30128,76	2092,30	1228,96	117,51	9685,85	745,07	570,29	66,63
25K10	298,0	261,0	23,0	38,0	222,0	119,00	16,0	251,62	36112,37	2423,70	1442,84	119,80	11288,10	864,99	663,49	66,98
30K1	298,0	299,0	9,0	14,0	270,0	145,00	18,0	110,80	18848,66	1265,00	694,64	130,43	6241,19	417,47	316,82	75,05
30K2	300,0	300,0	10,0	15,0	270,0	145,00	18,0	119,78	20410,21	1360,70	750,59	130,54	6754,83	450,32	342,13	75,10
30K3	300,0	305,0	15,0	15,0	270,0	145,00	18,0	134,78	21535,21	1435,70	806,84	126,40	7104,76	465,89	358,04	72,60
30K4	304,0	301,0	11,0	17,0	270,0	145,00	18,0	134,82	23380,49	1538,20	852,74	131,69	7732,59	513,79	390,46	75,73
30K5	308,0	301,0	12,0	19,0	270,0	144,50	18,0	149,56	26362,99	1711,90	953,96	132,77	8642,78	574,27	436,61	76,02
30K6	312,0	302,0	13,0	21,0	270,0	144,50	18,0	164,72	29508,74	1891,60	1059,44	133,84	9648,60	638,98	485,99	76,53
30K7	316,0	302,0	14,5	23,0	270,0	143,75	18,0	180,85	32732,42	2071,70	1167,93	134,53	10569,09	699,94	533,09	76,45
30K8	316,0	357,0	14,5	23,0	270,0	171,25	18,0	206,15	38173,52	2416,10	1353,26	136,08	17452,10	977,71	741,50	92,01
30K9	322,0	358,0	16,0	26,0	270,0	171,00	18,0	232,14	43983,21	2731,90	1541,60	137,65	19896,06	1111,51	843,38	92,58
30K10	328,0	359,0	18,0	29,0	270,0	170,50	18,0	259,60	50113,52	3055,70	1738,68	138,94	22381,16	1246,86	947,13	92,85
30K11	334,0	360,0	20,0	32,0	270,0	170,00	18,0	287,18	56488,07	3382,50	1939,98	140,25	24906,98	1383,72	1052,25	93,13
30K12	341,0	361,0	22,0	35,5	270,0	169,50	18,0	318,49	64158,87	3763,00	2176,26	141,93	27866,03	1543,82	1175,02	93,54
30K13	350,0	362,0	24,0	40,0	270,0	169,00	18,0	357,18	74376,59	4250,10	2481,31	144,30	31663,84	1749,38	1332,11	94,15
30K14	356,0	371,0	27,0	43,0	270,0	172,00	18,0	394,74	83542,72	4693,40	2760,90	145,48	36649,59	1975,72	1506,68	96,36
30K15	364,0	372,0	30,0	47,0	270,0	171,00	18,0	433,46	93889,39	5158,80	3062,80	147,17	40396,23	2171,84	1659,03	96,54
30K16	374,0	373,0	33,0	52,0	270,0	170,00	18,0	479,80	107317,14	5738,90	3441,68	149,56	45068,65	2416,55	1848,28	96,92
30K17	384,0	374,0	36,0	57,0	270,0	169,00	18,0	526,34	121512,35	6328,80	3831,76	151,94	49816,72	2664,00	2040,04	97,29
30K18	396,0	375,0	39,0	63,0	270,0	168,00	18,0	580,58	139424,86	7041,70	4307,16	154,97	55520,26	2961,08	2269,45	97,79
30K19	408,0	385,0	43,0	69,0	270,0	171,00	18,0	650,18	162282,28	7955,00	4912,82	157,99	65823,94	3419,43	2622,83	100,62

Продолжение таблицы 1

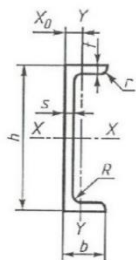
Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номиналь- ная площадь поперечного сечения $F_{п}$, $см^2$	Номи- нальная масса 1м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			$I_x, см^4$	$W_x, см^3$	$S_x, см^3$	$i_x, мм$	$I_y, см^4$	$W_y, см^3$	$S_y, см^3$	$i_y, мм$
30K20	422,0	387,0	47,0	76,0	270,0	170,00	18,0	563,60	187072,37	8866,00	5534,78	161,42	73671,75	3807,33	2923,99	101,30	
30K21	440,0	389,0	52,0	85,0	270,0	168,50	18,0	631,50	221339,16	10060,90	6361,10	165,87	83732,23	4305,00	3311,01	102,02	
35K1	342,0	348,0	10,0	15,0	312,0	169,00	20,0	109,10	31247,91	1827,40	1001,17	149,92	10542,21	605,87	459,67	87,08	
35K1,5	346,0	349,0	11,0	17,0	312,0	169,00	20,0	122,80	35711,23	2064,20	1135,84	151,10	12051,44	690,63	524,08	87,78	
35K2	350,0	350,0	12,0	19,0	312,0	169,00	20,0	136,50	40295,09	2302,60	1272,61	152,23	13585,82	776,33	589,29	88,39	
35K3	355,0	351,0	13,5	21,5	312,0	168,75	20,0	154,20	46230,77	2604,60	1448,66	153,39	15506,81	883,58	671,24	88,84	
35K4	360,0	352,0	15,0	24,0	312,0	168,50	20,0	172,10	52353,70	2908,50	1627,80	154,55	17459,86	992,04	754,25	89,25	
35K5	365,0	353,0	16,5	26,5	312,0	168,25	20,0	190,00	58667,44	3214,70	1810,04	155,70	19445,30	1101,72	838,34	89,64	
35K6	369,0	360,0	18,0	28,5	312,0	171,00	20,0	207,90	64960,86	3520,90	1991,80	156,63	22183,47	1232,42	938,35	91,53	
35K7	376,0	361,0	20,0	32,0	312,0	170,50	20,0	233,10	74398,83	3957,40	2256,32	158,31	25119,61	1391,67	1060,65	91,99	
35K8	382,0	362,0	22,0	35,0	312,0	170,00	20,0	255,50	82894,78	4340,00	2491,96	159,59	27708,51	1530,86	1168,17	92,27	
35K9	389,0	363,0	24,0	38,5	312,0	169,50	20,0	280,90	93053,12	4784,20	2767,25	161,26	30738,03	1693,56	1293,57	92,68	
35K10	396,0	364,0	26,5	42,0	312,0	168,75	20,0	307,60	103736,94	5239,20	3054,44	162,70	33819,63	1858,22	1421,64	92,90	
35K11	404,0	374,0	29,0	46,0	312,0	172,50	20,0	343,80	118982,06	5890,20	3458,40	164,82	40183,36	2148,84	1644,63	95,78	
35K12	414,0	375,0	32,0	51,0	312,0	171,50	20,0	381,30	135721,11	6556,60	3886,58	167,15	44924,28	2395,96	1836,42	96,17	
35K13	424,0	376,0	35,0	56,0	312,0	170,50	20,0	419,00	153322,14	7232,20	4326,20	169,49	49742,08	2645,86	2030,81	96,54	
35K14	434,0	377,0	38,0	61,0	312,0	169,50	20,0	456,80	171810,18	7917,50	4777,34	171,83	54637,74	2898,55	2227,81	96,90	
35K15	446,0	378,0	42,0	67,0	312,0	168,00	20,0	503,20	195206,29	8753,70	5336,35	174,51	60526,72	3202,47	2466,48	97,17	
35K16	458,0	392,0	46,0	73,0	312,0	173,00	20,0	564,60	227053,17	9915,00	6094,32	177,67	73566,95	3753,42	2891,61	101,13	
35K17	472,0	393,0	50,0	80,0	312,0	171,50	20,0	618,80	258357,05	10947,30	6796,66	181,04	81286,57	4136,72	3191,54	101,55	
35K18	488,0	394,0	55,0	88,0	312,0	169,50	20,0	681,80	296560,11	12154,10	7629,66	184,79	90173,86	4577,35	3538,66	101,90	
35K19	506,0	395,0	60,0	97,0	312,0	167,50	20,0	751,20	342451,59	13535,60	8591,51	189,17	100237,84	5075,33	3929,92	102,35	
35K20	520,0	409,0	65,0	104,0	312,0	172,00	20,0	829,70	392963,38	15114,00	9664,42	192,82	119352,51	5836,31	4520,43	106,26	

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номиналь- ная площадь поперечного сечения F_H , см ²	Номи- нальная масса 1м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей профиля							
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_{x_1} , см ⁴	W_{x_1} , см ³	S_{x_1} , см ³	i_{x_1} , мм	I_{y_1} , см ⁴	W_{y_1} , см ³	S_{y_1} , см ³	i_{y_1} , мм
30K20	422,0	387,0	47,0	76,0	270,0	170,00	18,0	717,92	187072,37	8866,00	5534,78	161,42	73671,75	3807,33	2923,99	101,30	
30K21	440,0	389,0	52,0	85,0	270,0	168,50	18,0	804,48	221339,16	10060,90	6361,10	165,87	83732,23	4305,00	3311,01	102,02	
35K1	342,0	348,0	10,0	15,0	312,0	169,00	20,0	139,03	31247,91	1827,40	1001,17	149,92	10542,21	605,87	459,67	87,08	
35K1,5	346,0	349,0	11,0	17,0	312,0	169,00	20,0	156,41	35711,23	2064,20	1135,84	151,10	12051,44	690,63	524,08	87,78	
35K2	350,0	350,0	12,0	19,0	312,0	169,00	20,0	173,87	40295,09	2302,60	1272,61	152,23	13585,82	776,33	589,29	88,39	
35K3	355,0	351,0	13,5	21,5	312,0	168,75	20,0	196,48	46230,77	2604,60	1448,66	153,39	15506,81	883,58	671,24	88,84	
35K4	360,0	352,0	15,0	24,0	312,0	168,50	20,0	219,19	52353,70	2908,50	1627,80	154,55	17459,86	992,04	754,25	89,25	
35K5	365,0	353,0	16,5	26,5	312,0	168,25	20,0	242,00	58667,44	3214,70	1810,04	155,70	19445,30	1101,72	838,34	89,64	
35K6	369,0	360,0	18,0	28,5	312,0	171,00	20,0	264,79	64960,86	3520,90	1991,80	156,63	22183,47	1232,42	938,35	91,53	
35K7	376,0	361,0	20,0	32,0	312,0	170,50	20,0	296,87	74398,83	3957,40	2256,32	158,31	25119,61	1391,67	1060,65	91,99	
35K8	382,0	362,0	22,0	35,0	312,0	170,00	20,0	325,47	82894,78	4340,00	2491,96	159,59	27708,51	1530,86	1168,17	92,27	
35K9	389,0	363,0	24,0	38,5	312,0	169,50	20,0	357,82	93053,12	4784,20	2767,25	161,26	30738,03	1693,56	1293,57	92,68	
35K10	396,0	364,0	26,5	42,0	312,0	168,75	20,0	391,87	103736,94	5239,20	3054,44	162,70	33819,63	1858,22	1421,64	92,90	
35K11	404,0	374,0	29,0	46,0	312,0	172,50	20,0	437,99	118982,06	5890,20	3458,40	164,82	40183,36	2148,84	1644,63	95,78	
35K12	414,0	375,0	32,0	51,0	312,0	171,50	20,0	485,77	135721,11	6556,60	3886,58	167,15	44924,28	2395,96	1836,42	96,17	
35K13	424,0	376,0	35,0	56,0	312,0	170,50	20,0	533,75	153322,14	7232,20	4326,20	169,49	49742,08	2645,86	2030,81	96,54	
35K14	434,0	377,0	38,0	61,0	312,0	169,50	20,0	581,93	171810,18	7917,50	4777,34	171,83	54637,74	2898,55	2227,81	96,90	
35K15	446,0	378,0	42,0	67,0	312,0	168,00	20,0	640,99	195206,29	8753,70	5336,35	174,51	60526,72	3202,47	2466,48	97,17	
35K16	458,0	392,0	46,0	73,0	312,0	173,00	20,0	719,27	227053,17	9915,00	6094,32	177,67	73566,95	3753,42	2891,61	101,13	
35K17	472,0	393,0	50,0	80,0	312,0	171,50	20,0	788,23	258357,05	10947,30	6796,66	181,04	81286,57	4136,72	3191,54	101,55	
35K18	488,0	394,0	55,0	88,0	312,0	169,50	20,0	868,47	296560,11	12154,10	7629,66	184,79	90173,86	4577,35	3538,66	101,90	
35K19	506,0	395,0	60,0	97,0	312,0	167,50	20,0	956,93	342451,59	13535,60	8591,51	189,17	100237,84	5075,33	3929,92	102,35	
35K20	520,0	409,0	65,0	104,0	312,0	172,00	20,0	1056,95	392963,38	15114,00	9664,42	192,82	119352,51	5836,31	4520,43	106,26	

Продолжение таблицы 1

Номер профи- ля	Номинальные размеры, мм							Номи- нальная площадь поперечно- го сечения F_n , см ²	Номи- нальная масса 1м дву- тавра, кг	Справочные величины для осей профиля						
	h	b	s	t	h_w	b_w	r			I_x , см ⁴	W_x , см ³	S_x , см ³	i_x , мм	I_y , см ⁴	W_y , см ³	S_y , см ³
35K21	540,0	411,0	71,0	114,0	312,0	170,00	20,0	1162,03	912,20	16816,70	10869,85	197,67	132896,31	6466,97	5017,71	106,94
35K22	562,0	413,0	77,0	125,0	312,0	168,00	20,0	1276,17	1001,80	18742,40	12243,01	203,15	148011,27	7167,62	5568,89	107,69
35K23	580,0	426,0	84,0	134,0	312,0	171,00	20,0	1407,19	1104,70	20926,80	13777,86	207,67	174271,92	8181,78	6362,61	111,29
35K24	604,0	430,0	92,0	146,0	312,0	169,00	20,0	1546,07	1213,70	23338,60	15522,09	213,51	195579,56	9096,72	7087,61	112,47
40K1	394,0	398,0	11,0	18,0	358,0	193,50	22,0	186,81	146,70	2850,00	1559,22	173,36	18922,62	950,89	720,40	100,64
40K2	400,0	400,0	13,0	21,0	358,0	193,50	22,0	218,69	171,70	3331,10	1836,23	174,54	22412,67	1120,63	849,93	101,23
40K3	406,0	403,0	16,0	24,0	358,0	193,50	22,0	254,87	200,10	3844,30	2139,84	174,98	26200,19	1300,26	988,59	101,39
40K4	414,0	405,0	18,0	28,0	358,0	193,50	22,0	295,39	231,90	4481,70	2513,15	177,22	31026,87	1532,19	1165,56	102,49
40K4,5	420,0	403,0	20,0	31,0	358,0	191,50	22,0	325,61	255,60	4934,80	2786,46	178,40	33850,08	1679,90	1279,67	101,96
40K5	429,0	400,0	23,0	35,5	358,0	188,50	22,0	370,49	290,80	5607,90	3198,49	180,19	37914,87	1895,74	1447,08	101,16
40K6	438,0	370,0	25,0	40,0	358,0	172,50	22,0	389,65	305,90	5864,50	3381,88	181,55	33828,59	1828,57	1400,59	93,18
40K7	448,0	371,0	28,0	45,0	358,0	171,50	22,0	438,29	344,10	6611,60	3848,78	183,82	38379,67	2068,98	1587,47	93,58
40K8	458,0	372,0	31,0	50,0	358,0	170,50	22,0	487,13	382,40	7366,80	4327,20	186,09	43005,94	2312,15	1777,05	93,96
40K9	470,0	373,0	35,0	56,0	358,0	169,00	22,0	547,21	429,60	8286,80	4920,70	188,65	48584,93	2605,09	2007,28	94,23
40K10	484,0	374,0	39,0	63,0	358,0	167,50	22,0	615,01	482,80	9361,10	5620,76	191,92	55131,74	2948,22	2276,18	94,68
40K11	494,0	392,0	43,0	68,0	358,0	174,50	22,0	691,21	542,60	10592,20	6402,77	194,55	68534,68	3496,67	2700,52	99,57
40K12	510,0	393,0	48,0	76,0	358,0	172,50	22,0	773,35	607,10	11912,90	7286,50	198,19	77250,09	3931,30	3043,64	99,94
40K13	528,0	394,0	53,0	85,0	358,0	170,50	22,0	863,69	678,00	13415,80	8303,29	202,50	87133,42	4423,02	3430,99	100,44
40K14	548,0	395,0	59,0	95,0	358,0	168,00	22,0	965,87	758,20	15127,30	9480,79	207,15	98243,26	4974,34	3868,52	100,85
40K15	564,0	410,0	65,0	103,0	358,0	172,50	22,0	1081,45	848,90	17103,50	10811,51	211,18	119192,55	5814,27	4525,42	104,98
40K16	588,0	412,0	72,0	115,0	358,0	170,00	22,0	1209,51	949,50	19362,10	12395,01	216,94	135224,96	6564,32	5120,62	105,74
40K17	616,0	414,0	80,0	129,0	358,0	167,00	22,0	1358,67	1066,60	22077,00	14322,16	223,71	154171,56	7447,90	5823,25	106,52
40K18	638,0	430,0	87,0	140,0	358,0	171,50	22,0	1519,61	1192,90	25099,80	16419,75	229,54	187578,96	8724,60	6820,27	111,10



ГОСТ 8240-97 «Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент»

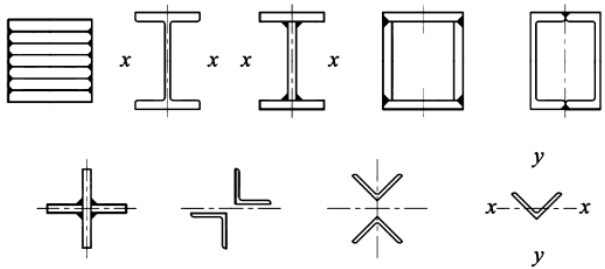
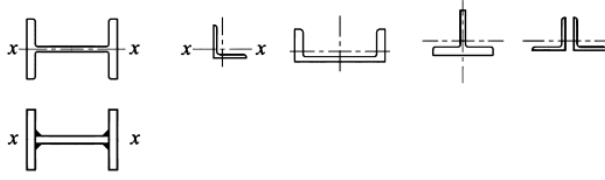
Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения F , см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							X_0 , см
					не более	X-X				Y-Y						
						I_x , см ⁴			W_{x_3} , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см		
мм																
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14У	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

К расчету на устойчивость

Таблица П2.1

Типы сечений

(СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции», табл. 7)

Тип сечения		Значение коэффициента	
обозначение	форма	α	β
<i>a</i>		0,03	0,06
<i>b</i>		0,04	0,09
<i>c</i>		0,04	0,14
Примечания 1 Значения коэффициентов для прокатных двутавров высотой свыше 500 мм при расчете на устойчивость в плоскости стенки следует принимать по типу сечения <i>a</i>. 2 На рисунках настоящей таблицы оси «x-x» и «y-y» обозначены в сечениях, нормально к которым располагается расчетная плоскость для определения φ по формуле (8); в остальных сечениях коэффициенты не зависят от расчетной плоскости.			

Коэффициенты устойчивости φ при центральном сжатии
(СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции», прил. Д, табл. Д.1)

Условная гибкость $\bar{\lambda}$	Коэффициенты ϕ для типа сечения			Условная гибкость $\bar{\lambda}$	Коэффициенты ϕ для типа сечения		
	a	b	c		a	b	c
0,4	1000	1000	984	4,6	359	329	
0,6	994	986	956	4,8	330	308	
0,8	981	967	929	5,0	304	289	
1,0	968	948	901	5,2	281	271	
1,2	953	927	872	5,4	261	255	
1,4	938	905	842	5,6	242	241	
1,6	920	881	811	5,8	226		
1,8	900	855	778	6,0	211		
2,0	877	826	744	6,2	198		
2,2	851	794	709	6,4	186		
2,4	821	760	672	6,6	174		
2,6	786	723	635	6,8	164		
2,8	747	683	598	7,0	155		
3,0	704	643	562	7,2	147		
3,2	660	602	527	7,4	139		
3,4	616	562	493	7,6	132		
3,6	572	524	460	7,8	125		
3,8	526	487	430	8,0	119		
4,0	475	453	402	8,5	105		
4,2	431	422	375	9,0	094		
4,4	393	392	351	9,5	084		
				10,0	076		

Примечание — Значения коэффициентов ϕ в таблице увеличены в 1000 раз.

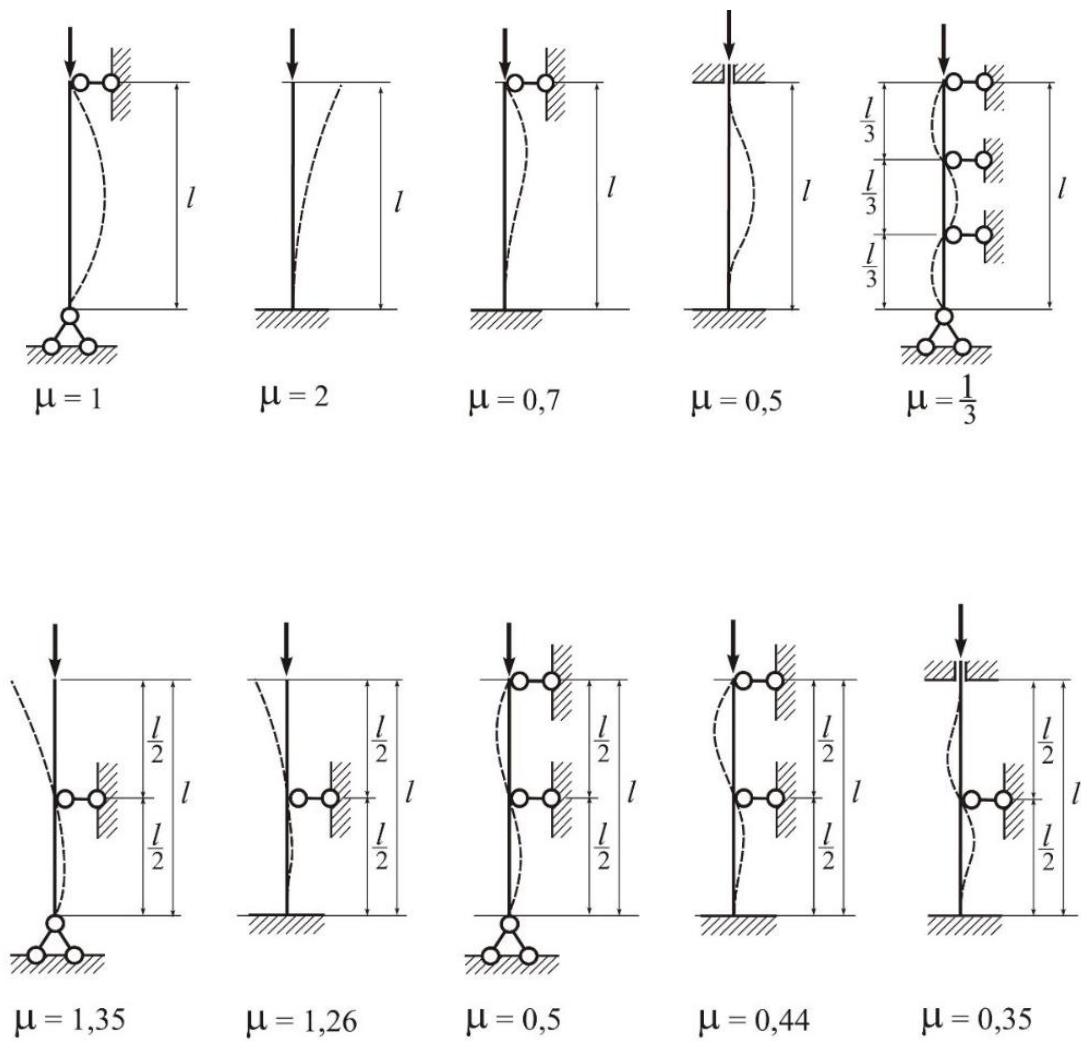


Рис. П.2 Значения коэффициентов приведения длины μ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.Г. Паушкин

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рекомендовано
Учебно-методическим советом НИУ МГСУ в качестве учебного пособия
для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность,
27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство
(№ 3 от 12.03.2024)

ISBN 978-5-7264-

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Москва
Издательство МИСИ – МГСУ
2024

УДК 539.3
ББК 30.121
П21

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент *В.И. Иванов-Дятлов*,
доцент кафедры строительной механики
Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ);
доктор технических наук, профессор *В.И. Андреев*,
профессор кафедры сопротивления материалов НИУ МГСУ

Паушкин, Александр Глебович.

П21 Техническая механика. Решение задач по расчету стержней и стержневых систем [Электронный ресурс] : [учебное пособие для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство] / А.Г. Паушкин ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, кафедра сопротивления материалов. — Электрон. дан. и прогр. (9,5 Мб). — Москва : Издательство МИСИ – МГСУ, 2024. — Учебное электронное издание: 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — Систем. требования: Intel; Microsoft Windows (XP, Vista, Windows 7, 10); дисковод CD-ROM, 512 Мб ОЗУ; разрешение экрана не ниже 1024×768; ПО Adobe Acrobat, мышь. — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-7264-xxxx-x

Учебное пособие может использоваться для изучения дисциплины бакалавриата «Техническая механика». Целью изучения дисциплины является освоение обучающимися компетенций, позволяющих грамотно решать простейшие задачи сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. В учебное пособие включены следующие разделы: «Центральное растяжение и сжатие прямого стержня», «Геометрические характеристики сечений», «Плоский прямой изгиб стержня», «Кинематический анализ стержневых систем», «Эпюры внутренних усилий в рамах», «Определение перемещений стержневых систем», «Статически неопределимые системы», «Устойчивость сжатых стержней».

Для обучающихся по направлениям подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, 27.03.01 Стандартизация и метрология, 08.03.01 Строительство.

Учебное электронное издание

Минимальные системные требования: процессор стандартной архитектуры x86 с тактовой частотой от 1,6 ГГц и выше; операционная система Microsoft Windows XP, Vista, Windows 7 и выше;
от 512 Мб оперативной памяти; от 1 Гб свободного пространства на жестком диске;
разрешение экрана не ниже 1024×768; программа Adobe Acrobat

© ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ», 2024

Учебное электронное издание

Паушкин Александр Глебович

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Редактор *Л.В. Светличная*
Корректор *Ю.М. Викторова*
Верстка и дизайн титульного экрана *Д.Л. Разумного*

Для создания электронного издания использовано:
Microsoft Word 2010, Adobe InDesign CS6, ПО Adobe Acrobat

Подписано к использованию *xx.xx.202x.*
Объем данных 9,5 Мб, 1 CD-ROM. Тираж 10 экз.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет».
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел.: (495) 287-49-14, вн. 14-23, (499) 183-91-90, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru